98. *Sur une propriété des ensembles plans de mesure positive.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Dec. 12, 1941.)

1. Pour fixer les idées, considérons un ensemble plan E situé dans le carré $T: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$. Si la mesure de E (au sens de M. Lebesgue) est positive, il existe un sous-ensemble fermé F de E qui est de mesure positive. Désignons par p la mesure de F. Divisons ensuite le carré T en n_1^2 carrés (fermés) $e_{n_1}^{(1)}$ égaux par des droites parallèles aux axes de coordonnées. *Si n_1 est assez grand, il existe un carré $e_{n_1}^{(1)}$ jouissant de la propriété : la mesure de la partie commune à F et à ce carré est plus grande que $(1-\varepsilon_1)/n_1^2$, ε_1 étant un nombre réel positif arbitraire, mais donné d'avance.* En effet, supposons qu'il existe σ_{n_1} carrés c'_{n_1} disjoints de F, et τ_{n_1} carrés d'_{n_1} qui ont des points communs avec F. La somme des carrés $c'_{n_1}(n_1=1, 2, 3, \dots)$ étant égale au complémentaire de F, la quantité σ_{n_1}/n_1^2 tend vers $1-p$ lorsque n_1 s'augmente indéfiniment. Par suite la quantité τ_{n_1}/n_1^2 tend vers p avec $n_1 \to \infty$. Si, pour tout carré d'_{n_1}, la mesure de $F \cdot d'_{n_1}$ est inférieure ou égale à $(1-\varepsilon_1)/n_1^2$, la mesure de F serait inférieure ou égale à $\tau_{n_1}(1-\varepsilon_1)/n_1^2$, et celui-ci tend vers $(1-\varepsilon_1)p$. Cela est impossible, puisque $p>0$. Donc, il existe un nombre n_1 et un carré d'_{n_1}, soit $e_{n_1}^{(1)*}$, tel que la mesure de $F \cdot e_{n_1}^{(1)*}$ est supérieure à $(1-\varepsilon_1)/n_1^2$. Supposons d'ailleurs que nous ayons $0<\varepsilon_1<1/18$.

Divisons, maintenant, le carré $e_{n_1}^{(1)*}$ en n_2^2 carrés (fermés) $e_{n_2}^{(2)}$ égaux. Le côté horizontal du carré $e_{n_1}^{(1)}$ sera divisé en n_2 intervalles que nous désignerons par $\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_{n_2}^{(2)}$, et le côté perpendiculaire sera divisé également en n_2 intervalles désignés par $\eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \dots, \eta_{n2}^{(2)}$. Le petit carré ainsi obtenu sera désigné donc par $(\xi_\mu^{(2)}, \eta_\mu^{(2)})$, ou plus brièvement par (μ, ν), $\mu, \nu=1, 2, 3, \dots, n_2$. Supposons qu'il existe σ_{n_2} carrés c''_{n_2} disjoints de F et τ_{n2} carrés d''_{n2} qui ont des points communs avec F.

Soit ε_2 un nombre réel arbitraire satisfaisant à l'inégalité : $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$. Je dis qu'*il existe alors un nombre n_2 assez grand jouissant de la propriété non seulement qu'il existe un carré d''_{n2} dont la mesure de la partie commune avec F est supérieure à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2 \times n_2^2)$, mais encore que la mesure de la somme des parties communes à F des $e_{n2}^{(2)}$ tels que la mesure de $e_{n_2}^{(2)} \cdot F$ soit supérieure à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2 \times n_2^2)$ surpasse $(1-2\varepsilon_1)/n_1^2$.* En effet, désignons d'abord par p_1 la mesure de la partie commune $e_{n_1}^{(1)*} \cdot F$. Remarquons que la somme de l'aire des c''_{n_2} tend vers $(1/n_1^2)-p_1$ lorsque n_2 s'augmente indéfiniment. Si la mesure de la somme des $d''_{n2} \cdot F$ tels que la mesure de $d''_{n_2} \cdot F$ soit supérieure à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2 \times n_2^2)$ reste inférieure ou égale à $(1-2\varepsilon_1)/n_1^2$, on a, en désignant par τ'_{n_2} le nombre de tels carrés,

$$\tau'_{n_2} \leq (1-2\varepsilon_1)/n_1^2 : (1-\varepsilon_2)/(n_1^2 \times n_2^2),$$

$$\tau_{n_2} - \tau'_{n2} \geq \tau_{n_2} - (1-2\varepsilon_1) \times n_2^2/(1-\varepsilon_2) \tag{1}$$

Or, comme

$$\lim_{n_2 \to \infty} \{\tau_{n_2}/(n_1^2 \times n_2^2)\} = p_1, \tag{2}$$

nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} \{\tau'_{n_2}/(n_1^2\times n_2^2)+(\tau_{n_2}-\tau'_{n_2})/(n_1^2\times n_2^2)\}=p_1$ (3)

En désignant par p'_{n_2} la mesure de la partie de F contenue dans la somme de tous les tels carrés, nous avons

$$\tau'_{n_2}/(n_1^2\times n_2^2)\geq p'_{n_2} \tag{4}$$

et $(\tau_{n_2}-\tau'_{n_2})/(n_1^2\times n_2^2)\geq(\tau_{n_2}-\tau'_{n_2})(1-\varepsilon_2)/(n_1^2\times n_2^2)\geq p_1-p'_{n_2}$ (5)

D'après (3), (4) et (5), on a

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\tau'_{n_2}}{n_1^2\times n_2^2}+\frac{(\tau_{n_2}-\tau'_{n_2})(1-\varepsilon_2)}{n_1^2\times n_2^2}\right\}=p_1\,.$$

Donc, (1) entraîne

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\tau'_{n_2}}{n_1^2\times n_2^2}+\frac{\tau_{n_2}-(1-2\varepsilon_1)n_2^2/(1-\varepsilon_2)}{n_1^2\times n_2^2}\times(1-\varepsilon_2)\right.$$
$$\left.+\frac{\tau_{n_2}-\tau'_{n_2}}{n_1^2\times n_2^2}-\frac{\tau_{n_2}-(1-2\varepsilon_1)n_2^2/(1-\varepsilon_2)}{n_1^2\times n_2^2}\right\}\geq p_1\,,$$

ou $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\tau_{n_2}}{n_1^2\times n_2^2}(1-\varepsilon_2)+\frac{(1-2\varepsilon_1)\varepsilon_2}{n_1^2(1-\varepsilon_2)}\right\}\geq p_1\,.$$

D'après (2), on a alors

$$p_1(1-\varepsilon_2)+\frac{(1-2\varepsilon_1)\varepsilon_2}{n_1^2(1-\varepsilon_2)}\geq p_1 \quad \text{ou} \quad \frac{1-2\varepsilon_1}{(1-\varepsilon_2)n_1^2}\geq p_1\,.$$

Comme $p_1\geq(1-\varepsilon_1)/n_1^2$, nous avons finalement

$$1-2\varepsilon_1\geq(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)>1-\varepsilon_1-\varepsilon_2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_1\leq\varepsilon_2\,,$$

ce qui est contraire à notre supposition, c. q. f. d.

D'ailleurs, il est évident que nous pouvons poser $n_2=3\sigma_2$. Alors, $\xi_\mu^{(2)}$ se groupe en σ_2 classes: $\xi_{3i-2}^{(2)}$, $\xi_{3i-1}^{(2)}$, $\xi_{3i}^{(2)}$ $(i=1, 2, 3, \dots, \sigma_2)$. De même, $\eta_\nu^{(2)}$ se groupe en σ_2 classes: $\eta_{3j-2}^{(2)}$, $\eta_{3j-1}^{(2)}$, $\eta_{3j}^{(2)}(j=1, 2, \dots, \sigma_2)$. La paire (i, j) nous donne alors neuf carrés. Tous les carrés (μ, ν) se groupe donc neuf par neuf en σ_2^2 classes.

Je dis, maintenant, qu'*il existe une classe* (i, j) *dont tous les neuf carrés satisfont à la condition: la mesure de la partie commune à* F *et à chacun de ces carrés est supérieure à* $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2\times n_2^2)$. En effet, s'il existe, pour toutes les classes (i, j), au moins un carré pour lequel la mesure de la partie commune à F est inférieure ou égale à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2\times n_2^2)$, le nombre des carrés d''_{n_2} pour lesquels la mesure de la partie commune à F est superieure à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2\times n_2^2)$ ne surpassera pas $n_2^2\times(8/9)$. Donc, la mesure totale de ces parties (commune à F) serait inférieure ou égale à $8/(9\times n_1^2)$. Ceci est absurde, puisque nous aurions alors $(1-2\varepsilon_1)/n_1^2\geq 8/(9\times n_1^2)$ ou $\varepsilon_1\leq 1/18$. Donc, il existe une classe (i, j) dont tous les neuf carrés satisfont à la condition: la mesure de la partie commune à F et à chacun de ces carrés est supérieure à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2\times n_2^2)$.

Parmi les neuf carrés de cette classe, les quatre qui se trouvent aux coins seront désignes par $e_{n_2}^{(2)*}$. Ainsi, nous avons démontré qu'il existe quatre carrés $e_{n_2}^{(2)*}$, qui satisfont aux conditions suivantes:

(1) Les projections sur l'axe Ox et sur l'axe Oy des quatre carrés coïncident deux à deux, et elles sont situées à la distance mutuelle $1/(n_1 \times n_2)$.

(2) La mesure de la partie commune à ces carrés et à F est supérieure à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2 \times n_2^2)$. Supposons de plus qu'on ait $0 < \varepsilon_2 < 1/(2 \times 4 \times 9)$.

Supposons maintenant, pour un nombre k, $k \geq 3$, il existe des carrés $e_{n_{k'}}^{k'*}$ $(k'=1, 2, 3, \dots, k-1)$, satisfaisant aux conditions suivantes:

(1) $e_{n_{k'}}^{k'*}$ $(k'=2, 3, \dots, k-1)$ sont des carrés obtenus en divisant un carré $e_{n_{k'-1}}^{(k'-1)*}$ en $n_{k'}^2$ petits carrés égaux par des droites parallèles aux axes de coordonnées.

(2) Les $e_{n_{k'}}^{(k')*}$ sont en nombre $4^{k'-1}$. Les projections de $e_{n_{k'}}^{(k')*}$ sur les deux axes Ox et Oy coïncident $2^{k'-1}$ par $2^{k'-1}$; elles se compose d'un nombre $2^{k'-1}$ des intervalles fermés, disjoints et de longuer $1/(n_1 \times n_2 \times \cdots n_{k'})$.

(3) Ces intervalles se groupent deux à deux en $2^{k'-2}$ $(k > k' \geq 3)$ classes; toute classe contient deux intervalles situes à la distance $1/(n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k)$ et leures sommes sont à la distance $2/(n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_{k'-1}) - 1/(n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_{k'})$ de celles des voisines.

(4) Il existe des nombres réels positifs $\varepsilon_{k'}$ $(k'=1, 2, 3 \dots, k-1)$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots > \varepsilon_{k-1}$, $0 < \varepsilon_{k'} < 1/(2 \times 4^{k'-1} \times 9)$, tels que la mesure de la partie du carré $e_{k_{k'}}^{(k')*}$ commune à l'ensemble F est supérieure à $(1-\varepsilon_{k'})/(n_1^2 \times n_2^2 \times \cdots \times n_{k'}^2)$.

Divisons, maintenant, chacun des 4^{k-2} carrés $e_{n_{k-1}}^{(k-1)*}$ en $n_k^2 = (3\sigma_k)^2$ petits carrés égaux $e_{n_k}^{(k)}$ par des lignes droites équidistants et parallèles à l'axe Ox ou à l'axe Oy. Nous pouvons démontrer maintenant, comme nous avons fait plus haut, que, si n_k devient assez grand, n_k jouit de la propriété: la mesure de la somme totale des parties communes à F et aux $e_{n_k}^{(k)}$ tels que la mesure de $e_{n_k}^{(k)} \cdot F$ soit supérieure à $(1-\varepsilon_k)/(n_1^2 \times n_2^2 \times \cdots \times n_k^2)$, où ε_k est un nombre réel positif inférieur à ε_{k-1}, surpasse $(1-2\varepsilon_{k-1})/(n_1^2 \times n_2^2 \times \cdots \times n_{k-1}^2)$, et cela pour tous les $e_{n_{k-1}}^{(k-1)*}$. Supposons d'ailleurs que nous ayons $0 < \varepsilon_k < 1/(2 \times 4^{k-1} \times 9)$.

Les $4^{k-2} \times n_k^2$ petits carrés $e_{n_k}^{(k)}$ pourront classés de la manière suivante. Prenons un $e_{n_{k-1}}^{(k-1)*}$. Les $e_{n_k}^{(k)}$ contenus dans un $e_{n_{k-1}}^{(k-1)*}$ peuvent être désignés par deux nombres μ et ν, $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n_k$ en signifiant la paire de μ-ième petit intervalle de la projection de $e_{n_k}^{(k)}$ sur l'axe Ox et ν-ième petit intervalle de la projection de $e_{n_k}^{(k)}$ sur l'axe Oy, obtenus par la division exécutée plus haut. Comme nous avons posé $n_k = 3\sigma_k$, les numéros μ seront classés en σ_k classes, le i-ième classe $(i=1, 2, \dots, \sigma_k)$ en contient trois: $3i-2$, $3i-1$, $3i$. De même, les numéros ν seront classés en σ_k classes, le j-ième classe $(j=1, 2, 3, \dots, \sigma_k)$ en contient trois: $3j-2$, $3j-1$, $3j$. Désignons maintenant par (i, j) la classe de tous ces neuf carrés *et tous les petits carrés contenus dans les autres* $e_{n_{k-1}}^{(k-1)*}$, *mais situés dans la même position relative (par rapport à* $e_{n_{k-1}}^{(k-1)*}$ *qui* *les contient*). Toute classe (i, j) contient alors $4^{k-2}\times 9$ petits carrés égaux ; et il existe donc σ_k^2 de classes ; les carrés sont toujours disjoints, c. à d. tous les carrés sont comptés une et une seule fois.

Alors, il existe une classe (i, j) dont tous les $4^{k-2}\times 9$ carrés satisfont à la condition : la mesure de la partie commune à F et à chacun de ces carrés est supérieure à $(1-\varepsilon_2)/(n_1^2\times n_2^2\times\cdots\times n_k^2)$. En effet, s'il existe, pour toutes classes (i, j), au moins un carrés $e_{n_k}^{(k)}$ pour lequel la mesure de la partie commune à F est inférieure ou égale à $(1-\varepsilon_k)/(n_1^2\times n_2^2\times\cdots\times n_k^2)$, le nombre des carrés pour lesquels la mesure de la partie commune à F est supérieure à $(1-\varepsilon_k)/(n_1^2\times n_2^2\times\cdots\times n_k^2)$ ne surpassera pas $(4^{k-2}\times n_k^2)\{(4^{k-2}\times 9-1)/(4^{k-2}\times 9)\}$. Donc, la mesure totale de ces parties (commune à F) serait inférieure ou égale à $(4^{k-2}\times n_k^2)\{(4^{k-2}\times 9-1)/(4^{k-2}\times 9)\}/(n_1^2\times n_2^2\times\cdots\times n_k^2)$. Ceci est absurde, puisque nous aurions alors $(4^{k-2}\times n_k^2)\{(4^{k-2}\times 9-1)/(4^{k-2}\times 9)\}/(n_1^2\times n_2^2\times\cdots\times n_k^2)\geq\{(1-2\varepsilon_{k-1})/(n_1^2\times\cdots\times n_{k-1}^2)\}4^{k-2}$, c. à d.

$$\frac{1}{2\times 4^{k-2}\times 9}\leq\varepsilon_{k-1}.$$

Parmi les $4^{k-2}\times 9$ carrés $e_{n_k}^{(k)}$ de cette classe, les 4^{k-1} qui sont trouvés aux coins (par rapport aux sommes des 9 carrés contigus) seront désignés par $e_{n_k}^{(k)*}$. Ainsi, nous avons vu que les carrés $e_{n_k}^{(k)*}$ satisfont aux conditions suivantes :

(1) $e_{n_k}^{(k)*}$ sont en nombre 4^{k-1}. Les projections de $e_{n_k}^{(k)*}$ sur les deux axes Ox et Oy coincident 2^{k-1} par 2^{k-1}.

(2) Cette projection se compose d'un nombre 2^{k-1} des intervalles fermés et disjoints, de longueur $1/(n_1\times n_2\times\cdots\times n_k)$.

(3) Ces intervalles se groupent deux à deux en 2^{k-2} classes ; toute classe contient deux intervalles situés à la distance $1/(n_1\times n_2\times\cdots\times n_k)$ et leures sommes sont à la distance $2/(n_1\times n_2\times\cdots\times n_{k-1})-1/(n_1\times n_2\times\cdots\times n_k)$ de celles des voisines.

(4) La mesure de la partie du carré $e_{n_k}^{(k)}$ commune à l'ensemble F est supérieure à $(1-\varepsilon_k)/(n_1^2\times n_2^2\times\cdots\times n_k^2)$, ε_k étant un nombre réel, $0<\varepsilon_k<\varepsilon_{k-1}$, $\varepsilon_k<1/(2\times 4^{k-1}\times 9)$.

Donc, nous pouvons continuer cette construction indéfiniment.

D'après cette construction, nous remarquons d'abord la somme des carrés $e_{n_k}^{(k)*}$ peut être obtenue par le produit combinatoire (cartésien) $A_k\times B_k$ où l'on désigne par A_k et B_k les projections de cette somme sur l'axe Ox et Oy resp. A_k ou B_k se compose des 2^{k-1} intervalles situés à la distance mutuelle positive et on a $A_k\geq A_{k+1}$, $B_k\geq B_{k+1}$, $k=1, 2, 3, \ldots$. Donc $A=\prod_{k=1}^{\infty}A_k$ et $B=\prod_{k=1}^{\infty}B_k$ *sont des ensembles parfaits et non denses* (de la catégorie de celui de Cantor[1]) situés sur l'axe Ox et Oy resp.. A et B donc possèdent la puissance du continu $\mathfrak{c}$.

D'autre part, *l'ensemble* $A\times B$ *appartient à* F, *par suite à* E. En effet, soient a et b deux points quelconques de A et B resp.. Il

1) Voir p. ex. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II, C, 9. p. 876.

existe alors une suite $\{\alpha_k\}$ et $\{\beta_k\}$, où α_k et β_k sont les projections d'un carré $e_{n_k}^{(k)*}$ sur l'axe Ox et Oy, tels que $a=\prod_{k=1}^{\infty}\alpha_k$, $b=\prod_{k=1}^{\infty}\beta_k$. Comme la partie commune à $e_{n_k}^{(k)*}$ et à F possède la mesure positive, on a $e_{n_k}^{(k)*}\cdot F\neq 0$. $e_{n_k}^{(k)*}$ tend donc vers le point (a, b) et (a, b) est un point limite d'une suite des points de F. F étant un ensemble fermé, (a, b) appartient à F. Donc, nous avons $A\times B\leq F$.

Définition. Tout ensemble M du plan qu'on peut exprimer sous la forme: $M=A\times B$, où A, B sont des ensembles situés sur l'axe Ox et Oy resp. et $\times$ désigne le produit cartésien, s'appellera *ensemble du type rectangulaire*. Alors, nous avons démontré le.

Théorème. *Tout ensemble E plan de mesure (au sens de Lebesgue) positive contient un sous-ensemble parfait P du type rectangulaire.*

Considérons, dans un plan, un ensemble D d'aire intérieure positive au sens de Peano-Jordan. D'après la définition, D contient toujours un petit rectangle fermé. Notre théorème est donc, une généralisation de ce fait évident pour les ensembles de mesure intérieure positive au sens de Lebesgue.

D'ailleurs, il faut remarquer que notre raisonnement pour construire l'ensemble parfait P peut être modifié de façon que nous pouvons nous passer de l'axiome de choix de M. Zermelo, dans le cas où E est effectivement de mesure positive[1].

2. Application. M. Erdös a posé récemment le problème suivant[2]: *Existe-t-il un ensemble E, situé dans le carré fermé $T: 0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$, de mesure 1 et qui satisfait à la condition: pour toute paire d'ensembles X et Y de la puissance $\mathfrak{c}$ du continu, contenus dans T, $X+Y$ n'est jamais contenue dans E?* Or, il est évident que nos ensembles A et B donnés plus haut sont contenus dans ce carré T et satisfont à la condition: $A\times B=A+B$. Donc, le problème de M. Erdös est résolue négativement.

---

1) Nous disons qu'un ensemble E du carré d'unité, $T: 0\leq x$, $y\leq 1$ *est effectivement de mesure positive* lorsque l'ensemble complémentaire de E est contenu dans la somme d'une suite effective des rectangles dont l'aire totale est inférieure à 1.

2) Cf. S. Kakutani: Extrait d'une lettre adressée à M. K. Yosida, Zenkoku Shijodanwakai, 205 (1940), p. 430. Cf. aussi un article (japonais), de M. M. Kondô: sur un problème de M. Erdös, ibid. 225 (1941) p. 542, où il démontre qu'en faisant appel à l'hypothèse du continu de Cantor, tout ensemble de mesure 1 situé dans T contient deux ensemble A, B de la puissance du continu, tels que $A+B\leq E$.