34. Sur le premier théorème dans la theorie des fonctions méromorphes.

Par Yosiro TUMURA.
Sizuoka Kotogakko.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., April 13, 1942.)

1. Dans la théorie de la répartition des valeurs des fonctions méromorphes, deux théorèmes fondamentaux de M. Nevanlinna jouent un rôle important, et sont étudiés par plusieurs auteurs. Quant au premier théorème, on le prouve en employant la fonction de Green ou la formule de Gauss-Green, ou introduisant des quantités géométriques suivant M. Simizu. Dans cette Note je montre qu'il est un particulier cas du théorème de M. Cauchy.

Soient $w=f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle: $|z|<R$ $(\leqq \infty)$, b_μ son pôle et a_ν son nul, et $\lambda(b)$ et $\lambda(a)$ leurs multiplicités. Définissons un rectangle:

$$\log \rho < \Re\zeta < \log r\,, \qquad 0 < \Im\zeta < 2\pi$$

dans le plan des $\zeta=\log z$ pour $r<R$ et $\rho>0$ arbitrairement petit. Soit D un domaine qui est enlevé du rectangle les petits cercles K autour de $\log b$ et $\log a$, et les coupures:

$$L(b):\quad \Im\zeta = arg\, b\,,\quad log\,|b| < \Re\zeta < log\, r$$

$$L(a):\quad \Im\zeta = arg\, a\,,\quad log\,|a| < \Re\zeta < log\, r\,.$$

Dans le domaine D, $\omega=\log f(z)$ est uniforme et réguliere. On l'applique dans D le théorème de M. Cauchy: *Si une fonction $\varphi(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée, et continue sur la courbe elle-même, l'intégrale $\int \varphi(z)\,dz$, prise le long de cette courbe, est égale à zéro.*

Supposons que $f(z)$ est régulière sur l'axe réel positif. Alors on a,

i. Si les rayons des petits cercles tendent à zéro, l'intégrale sur K tend à zéro.

ii. Si ζ parcourt le long de K une fois, $\omega(\zeta)=log f(z)$ augmente $\lambda(b)2\pi i$ ou $-\lambda(a)2\pi i$. Donc, l'intégrale sur L est égale à

$$2\pi i\cdot\lambda(b)\log\frac{r}{|b|}\,,\quad \text{ou}\quad -2\pi i\cdot\lambda(a)\log\frac{r}{|a|}$$

iii. Pour $\rho<t<r$, on a

$$log\, f(\rho)=\begin{cases} log\, f(\rho e^{2\pi i})\,, & \text{si } f(0)\neq 0,\ \neq\infty \\ log\, f(\rho e^{2\pi i})-n(0,0)\,, & \text{si } f(0)=0 \\ log\, f(\rho e^{2\pi i})\quad n(0,\infty)\,, & \text{si } f(0)=\infty \end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$\int_{\log\rho}^{\log r}[\omega(\log t)-\omega(\log t+2\pi i)]\,d\zeta$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{si } f(0)\neq 0,\ \neq\infty \\ -n(0,0)\,2\pi i\log\dfrac{r}{\rho}, & \text{si } f(0)=0 \\ n(0,\infty)\,2\pi i\log\dfrac{r}{\rho}, & \text{si } f(0)=\infty\,. \end{cases}$$

iv. Car $\omega(\zeta)=log\,|f|+arg f$, on a

$$\int_0^{2\pi}\omega(\log r+i\varphi)\,d\zeta=i\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi-\int_0^{2\pi}\arg f(re^{i\varphi})\,d\varphi$$

$$-\int_0^{2\pi}\omega(\log\rho+i\varphi)\,d\zeta=-i\int_6^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\arg f(\rho e^{i\varphi})\,d\varphi\,,$$

où

$$i\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi$$

$$=\begin{cases} 2\pi i\log|f(0)|+\varepsilon(\rho), & \text{si } f(0)\neq 0,\ \neq\infty \\ 2\pi i\log|c_\lambda|+2\pi i n(0,0)\log\rho+\varepsilon(\rho), & \text{si } f(0)=0 \\ 2\pi i\log|c_\lambda|-2\pi i n(0,\infty)\log\rho+\varepsilon(\rho), & \text{si } f(0)=\infty\,. \end{cases}$$

L'intégrale le long de la frontière de D est la somme de ces cinq intégrales. La somme est égale à zéro suivant le théorème de M. Cauchy. Divisonsla par $2\pi i$, alors sa partie réelle est, pour $\rho\to 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi+\sum_{0<|b|<r}\lambda(b)\log\frac{r}{|b|}+n(0,\infty)\log r$$

$$-\sum_{0<|a|<r}\lambda(a)\log r-n(0,0)\log r-\log|c_\lambda|=0\,.$$

Donc, on a la formule de MM. Jensen-Nevanlinna:

Si, autour de l'origine, la fonction $f(z)$ admet le développement:

$$f(z)=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\cdots\qquad(c_\lambda\neq 0)\,,$$

on a

$$T(r,\infty)-T(r,0)=\log|c_\lambda|\,.$$

2. Si l'on prend la partie imaginaire, alors on a une relation entre l'argument de b_μ et a_ν, et celui de $f(re^{i\varphi})$.

Théorème.

$$\sum_{0<|b|<r}(2\pi-\arg b)-\sum_{0<|a|<r}(2\pi-\arg a)=\int_0^{2\pi}\arg f(re^{i\varphi})\,d\varphi-\arg f(0)\,,$$

où $arg f(r)-arg f(0)$ est le changement de l'argument de $f(z)$ sur l'axe réel $0\leqq z\leqq r$.

3. Nous traiterons le problème de M. Kunugui. Soit $w=f(z)$ une fonction uniforme et méromorphe dans un domaine Δ (ou, somme des domaines) et sa frontirère γ à distance finie, de telle què $f(z)$ prend dans Δ la valeur de D de w-plan, dont la frontière Γ sont des courbes analytiques, et prend sur γ celle de Γ. Pour le point a appartenant à

D, définissons les quantités[1] $m_f(r, a; \Delta)$, $N_f(r, a; \Delta)$ et $T_f(r, a; \Delta)$ suivant M. Nevanlinna. Nous prouverons, d'abord, le

Lemme. *Soit $\omega=\omega(w)$ est une fonction univalente qui réprésente D conformément au domaine $\mathfrak{D}$ de ω-plan, telle que le point $w=a$ correspond à $\omega=\alpha$. Alors on a*

$$T_w(r, a; \Delta)=T_\omega(r, \alpha; \Delta)+0(1).$$

M. Nevanlinna a prouvé que la fonction méromorphe dans le cercle ne diffère que 0(1), par la transformation linéaire. Ce lemme est l'extension de cette proposition, car la transformation conforme et univalente de la Riemann-sphère à elle-même, il n'y en a qu'une transformation linéaire.

$N_w(r, a; \Delta)\equiv N_\omega(r, \alpha; \Delta)$ est trivial. Considérons

a) la fonction $g=\dfrac{\omega-\alpha}{w-a}$, si D ou $\mathfrak{D}$ ne contient pas des points $w=\infty$ ou $\omega=\infty$ respectivement.

b) la fonction $g=\dfrac{\omega-\alpha}{\omega-\beta}\cdot\dfrac{w-b}{w-a}$, où $\omega=\beta$ correspond à $w=b$.

Cette fonction est régulière, et n'est jamais nul dans D, et sur Γ sa module est bornée. Donc, on a

$$\frac{1}{K}<|g(w)|<K \quad \text{et} \quad \overset{+}{\log}\frac{1}{|\omega-\alpha|}-\overset{+}{\log}\frac{1}{|w-a|}=0(1)$$

Q. D. E.

Dans ma précédente Note[2], nous avons prouvé la formule de M. Cartan:

$$T_f(r, a; \Delta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N_f(r, a+\rho e^{i\theta}; \Delta)\,d\theta+\overset{+}{\log}\frac{\rho}{|f(0)-a|}$$

et si l'on prend comme D le cercle-unité $|w-a|<1$

$$T_f(r, a; \Delta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^r\left[\int_{\gamma_r}d\arg f(z)\right]\frac{dr}{r}+\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)-a|}$$

où l'on pose $\overset{+}{\log}\dfrac{1}{|f-a|}=0$, si $z=0$ n'appartient pas à Δ.

Soient D_1 un domaine simplement connex qui est contenu à l'intérieur de D, $g(w, a)$ sa fonction de Green. Alors, représéntant D_1 conformément au cercle, on a

$$T_f(r, a; \Delta)=\frac{1}{2\pi}\int_\zeta N(r, \zeta; \Delta)\frac{\partial}{\partial n}g(w, a)\,ds+0(1),$$

1) Voir ma Note précédente: Sur le problème de M. Kunugui, ce Proc. **17** (1941).

2) loc. cit. Mais quelques démonstrations n'y étaient pas suffisantes. Par ex., on doit lire, au lieu de (4) (p. 290),

$$\int_{\gamma_r}d\arg f(z)+r\frac{d}{dr}\int_{O_r}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi+\sum r\left[\theta_2'(r)\log|f(z_2)|-\theta_1'(r)\log|f(z_1)|\right]$$
$$+\sum\int_{c_i}\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z)|\,ds=0,$$

où $\theta=\theta(r)$ est une équation de γ.

où Γ_1 est une frontière de D_1, et ζ parcourt le long de Γ_1. No. 3 de la précédente Note doit remplacé par cette formule.

4. Soient D_1 un domaine arbitraire contenu à l'interieur de D, et Δ_1 celui de z-plan correspondant. Pour deux points donnés $w=a$ et $w=b$ appartenants à D_1, représentions D par $\omega=\omega(w)$ au "Schlitzsbereich" $\mathfrak{D}$ de ω-plan, tel que $w=a$ et $w=b$ sont transformés aux points $\omega=\infty$ et $\omega=0$, qui possède comme des frontières les coupures:

i. des arcs circulaires: $|\omega|=\text{const.}$, ou

ii. $\arg\omega=\text{const.}$

Si l'on applique la formule de Gauss à $\log|\omega(z)|$ dans le domaine excepté les petits cercles autour de 0- et ∞-points de $\omega(z)$, on a, tendant des rayons des petits cercles vers zéro.

$$(1)\quad \int_{\gamma_r} d\arg\omega(z)+r\frac{d}{dr}\int_{\Theta_r}\log|\omega(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$
$$+\sum r[\theta_2'(r)\log|\omega(z_2)|-\theta_1'(r)\log|\omega(z_1)|]$$
$$+2\pi n(r,\infty:\Delta)-2\pi n(r,0;\Delta)=0\,.$$

Par l'intégration logarithmique de (1), ou par l'application de la méthode du No. 1, on a

$$(2)\quad T_\omega(r,\infty;\Delta)-T_\omega(r,0;\Delta)+\int_0^r\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_r}d\arg\omega\frac{dr}{r}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^r\sum[\theta_2'\log|\omega(z_2)|-\theta_1'\log|\omega(z_1)|]\,dr=0\,.$$

Dans le cas de i. $\log|\omega(z)|$ est invariant sur le même arc de la frontière γ. Donc, on a

$$\int^r\sum[\theta_2'\log|\omega(z_2)|-\theta_1'\log|\omega(z_1)|]\,dr=0(1)\,.$$

Écrivons par $\nu(r)$ un nombre des courbes γ qui possèdent des points communs à $|z|=r$, on a, $\left|\int_{\gamma_r}d\arg\omega(z)\right|<2\pi\nu(r)$, est

$$(2')\qquad T_f(r,a;\Delta)-T_f(r,b;\Delta)=0\Big(\int_0^r\frac{\nu(r)}{r}dr\Big).$$

En général, par la considération simple et géométrique, on a $\left|\int_{\gamma_r}d\arg\omega(z)\right|<L(r)$, où $L(r)$ est une longueur sphérique de w-image de Θ_r. Donc,

$$(2'')\qquad T_f(r,a;\Delta)-T_f(r,b;\Delta)=0\Big(\int_0^r\frac{L(r)}{r}dr\Big).$$

Nous avons prouvé que, sauf l'ensemble exceptionnel E_r où la variation de $\log\log r$ est bornée,

$$\int_0^r\frac{L(r)}{r}dr<\text{const.}\sqrt{T}\log T\,.$$

Dans le cas de ii. $\int_{\gamma_r} d\arg\omega(z)=0$. $|\log|\omega(z)||$ est borné sur γ. Par conséquent, on a, écrivant par $\theta=\theta(r)$ l'équation de la frontière γ,

$$(2''') \qquad T_f(r,a;\Delta)-T_f(r,b;\Delta)=0\Big(\int^r\sum|\theta'(r)|\,dr\Big).$$

Multipliant l'élément de l'aire sphérique $d\mu(b)$[1], par l'intégration de (2) dans D_1, on a

$$T_f(r,a;\Delta)-\frac{1}{A_1}\int_{D_1}N_f(r,b;\Delta)\,d\mu(b)=0(1)+0\Big(\int\Big).$$

Théorème. *Soit $S_f(r;\Delta)$ l'aire sphérique de w-image de Δ_r qui est partie commune à Δ_1 et à $|z|<r$, divisée par l'aire de D_1. Définissons la fonction caractéristique de $f(z)$ comme le suivant*

$$T_f(r;\Delta)=\int_0^r\frac{S_f(r;\Delta)}{r}dr.$$

Alors, on a

$$T_f(r,a;\Delta)=T_f(r;\Delta)+\Omega(r)+0(1)$$

où la terme $\Omega(r)$ satisfait aux conditions suivantes:

i. $$\Omega(r)<\int_0^r\frac{\nu(r)}{r}dr,$$

ii. $$\Omega(r)=0\Big(\int_0^r\sum|\theta'(r)|\,dr\Big),$$

iii. $$\Omega(r)=0\Big(\int_0^r\frac{L(r)}{r}dr\Big)$$

ou

$$\Omega(r)<\text{const.}\sqrt{T_f(r;\Delta)}\log T_f(r;\Delta)^{2)}$$

sauf l'ensemble exceptionnel E_r où la variation de log log r est bornée.

La fonction caractéristique $T_f(r;\Delta)$ est invariante sauf la quantité $\Omega(r)$ par la transformation conforme et univalente de D.

En outre, l'ensemble exceptionnel E_r ne dépend que la fonction, et ni a, ni la transformation de D.

5. Supposons que D est un cercle-unité $|w|<1$. Dans ce particulier cas, nous aurons des résultats plus précis. Si l'on applique la formule de Gauss à la fonction $\log(1+|f|^2)$ dans Δ_r, on a

$$\int_{\gamma_r}\frac{\partial}{\partial n}\log(1+|f|^2)\,ds+r\frac{d}{dr}\int_{\Theta_r}\log(1+|f|^2)\,d\varphi$$
$$+r\sum\Big[\theta_2'\log\big(1+|f(z_2)|^2\big)-\theta_1'\log\big(1+|f(z_1)|^2\big)\Big]$$
$$=4\int_{\Delta_r}\frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\,r\,dr\,d\varphi$$

---

1) Voir par ex., R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, p. 169.

2) J'ai prouvé ce résultat dans la précédente Note, mais y employé la théorie de "Überlagerungsfläche" de M. Ahlfors. Voir aussi, Prof. Tuji, ce Proc. **18** (1942).

ou,

$$\int_{\Gamma_r} \frac{\partial}{\partial n} \log(1+|f|^2)\,ds = \int_{\Gamma_r} \frac{\partial}{\partial n} |f|\,ds = \int_{\Gamma_r} \frac{\partial}{\partial n} \log|f|\,ds\,.$$

Par conséquent, de la formule de M. Cartan, on a

$$T_f(r, 0; \varDelta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \frac{dr}{r} \int_{\Gamma_r} d \arg f(z) + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{dr}{r} \int_{\varDelta_r} \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\, t dt d\varphi + 0(1)\,.$$

Si l'on désigne par $S(r; \varDelta)$ l'aire euclidienne de w-image de $\varDelta_r$ divisée par celle de D, considérons la fonction

$$u(z) = \log\left|\frac{1}{f}\right| + \frac{1}{2}|f|^2 - \frac{1}{2}$$

suivant M. Selberg[1]. Alors on aura le résultat analogue.

---

1) H. Selberg, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale, Avh. ut. av Det Norske Vid. Akad. i Oslo, 1934, p. 8.