59. Über die Charakterisierung des allgemeinen *C*-Raumes, II.

Von Hidegorô NAKANO.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1942.)

Wir haben in einer früheren Abhandlung[1] beschrieben:

Satz. Wenn ein Modul $\mathfrak{M}$ *in bezug auf den Körper der reellen Zahlen derart teilweisegeordnet ist:*

1) $a > c$ *folgt aus* $a > b$ *und* $b > c$,
2) $a \not> a$,
3) *für je zwei Elemente* a, b *gibt es* $a \cup b$ *und* $a \cap b$,
4) $a + c > b + c$ *folgt aus* $a > b$,
5) *aus* $a > 0$ *folgt* $\alpha a > 0$ *für jede positive Zahl* α;

derart normiert ist:

I) $\|a\| \geqq 0$, *und* $\|a\| = 0$ *besteht nur im Falle* $a = 0$,
II) $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$ *für jede reelle Zahl* α,
M) $\|(|a| \cup |b|)\| = \operatorname{Max}(\|a\|, \|b\|)$,
S) *für jede beschränkte Menge positiver Elemente* $\{a_\alpha\}$

$$\underset{\alpha}{\text{Obere Grenze}}\ \|a_\alpha\| = \underset{a_\alpha \leqq b}{\text{Untere Grenze}}\ \|b\|;$$

und über die Norm vollständig ist, so kann man $\mathfrak{M}$ *durch alle stetigen Funktionen* $f_a(x)$ (*entsprechend* $a \in \mathfrak{M}$), *oder durch alle, an einem bestimmten Punkt* x_0 *verschwindenden, stetigen Funktionen auf einem bikompakten Hausdorffschen Raum* R *vollständig darstellen, und sogar* $\|a\| = \operatorname{Max} |f_a(x)|$.

Wir haben diesen Satz zuerst im Falle bewiesen, dass $\mathfrak{M}$ ein vollständiges Element besitzt, und daraus den allgemeinen Fall hergeleitet[2]. Ich habe nachher einen Irrtum im ersten Beweis gefunden. Indem wir den ersten Beweis verbessern, wollen wir hier den allgemeinen Fall unmittelbar beweisen.

Beweis. Aus M) folgt sofort: $\|(|a|)\| = \|a\|$, und $\|a\| \leqq \|b\|$ für $|a| \leqq |b|$. Nach II) besteht das Archimedessche Axiom: für $a > 0$ gilt immer $\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\nu} a = 0$. Man kann dann $\mathfrak{M}$ durch Schnitte[3] (A, B) auf einen Modul $\mathfrak{M}'$ erweitern, der ausserdem der Limesbedingung genügt: für jede absteigende Folge positiver Elemente $a'_1 \geqq a'_2 \geqq \cdots$ in $\mathfrak{M}'$ gibt es stets das Element $a'_0 = \lim_{\nu \to \infty} a'_\nu$ in $\mathfrak{M}'$, für das $a'_\nu \geqq a'_0$, und

1) H. Nakano: Über normierte teilweisegeordnete Moduln, Proc. **17** (1941), 311–317.

2) H. Nakano: Über die Charakterisierung des allgemeinen *C*-Raumes. Proc. **17** (1941), 301–307.

3) H. Nakano: Eine Spektraltheorie, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23** (1941), 485–511. Diese Abhandlung wird im folgenden mit e. S. bezeichnet.

$a_0' \geqq x'$ für jedes $x' \leqq a_\nu'$ $(\nu=1,2,\ldots)$ gilt. Indem man für $(A, B)>0$

$$\|(A, B)\| = \underset{a \in A}{\text{Untere Grenze}} \|a\|$$

setzt, kann man die Norm von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ erweitern. Dann kann man leicht einsehen, dass I), II), M), S) auch in $\mathfrak{M}'$ bestehen.

Nun kann man die Theorie in einer früheren Abhandlung[4] auf $\mathfrak{M}'$ anwenden. Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen in dieser Abhandlung.

$\mathfrak{p}$ sei ein Maximalideal von Projektoren in $\mathfrak{M}'$. Setzt man für beliebiges $a' \in \mathfrak{M}'$

$$\varphi_{a'}(\mathfrak{p}) = \lim_{[p] \to \mathfrak{p}} \|[p]a'\| = \underset{[p] \in \mathfrak{p}}{\text{Untere Grenze}} \|[p]a'\|,$$

so kann man leicht aus M) schliessen:

(1) $\quad \|a'\| = \text{Max}\, \varphi_{a'}(\mathfrak{p})$,

(2) $\quad \varphi_{a'}(\mathfrak{p}) = \varphi_{|a'|}(\mathfrak{p})$,

(3) $\quad \varphi_{a'}(\mathfrak{p}) = 0 \quad$ für $[a'] \bar{\in} \mathfrak{p}$,

(4) $\quad \varphi_{a'}(\mathfrak{p}) \leqq \varphi_{b'}(\mathfrak{p}) \quad$ für $|a'| \leqq |b'|$.

Wenn $\varphi_{b'}(\mathfrak{p}) \neq 0$ ist, so muss $[b'] \in \mathfrak{p}$ nach (3) sein, und folglich gilt nach Satz 1 in einer früheren Abhandlung[5]

(5) $$\varphi_{a'}(\mathfrak{p}) = \left(\frac{|a'|}{|b'|}, \mathfrak{p}\right) \varphi_{b'}(\mathfrak{p}).$$

Nun wollen wir beweisen, dass $\varphi_{a'}(\mathfrak{p})$ im Hausdorffschen Raum I aller Maximalideale[6] stetig ist. Man sieht sofort ein, dass $\varphi_{a'}(\mathfrak{p})$ nach oben halbstetig ist. Wir nehmen an, dass an einem Punkt $\mathfrak{p}_0$ in I für eine positive Zahl α

$$\varphi_{a'}(\mathfrak{p}_0) > \alpha$$

ist. Da $\varphi_{a'}(\mathfrak{p})$ nach oben halbstetig ist, ist die Punktmenge

$$E = E\left[\mathfrak{p};\ \ \mathfrak{p} \ni [a'],\ \ \varphi_{a'}(\mathfrak{p}) < \alpha\right]$$

offen. $\{[p_\lambda]\}$ sei die Menge aller derartigen Projektoren, dass $[p_\lambda] \subset E$ ist. Dann gilt nach (1), (2), (3), (4), wegen $[p_\lambda] \subset E$,

$$\|([p_\lambda]\,|a'|)\| = \text{Max}\, \varphi_{[p_\lambda]a'}(\mathfrak{p}) \leqq \underset{[p_\lambda] \in \mathfrak{p}}{\text{Max}}\, \varphi_{a'}(\mathfrak{p}) < \alpha.$$

Wenn $c' \geqq [p_\lambda]\,|a'|$ für alle λ ist, so gibt es für jedes $\mathfrak{p}$ in E einen Projektor $[p_\lambda] \in \mathfrak{p}$, für den

$$\left(\frac{c'}{|a'|}, \mathfrak{p}\right) \geqq \left(\frac{[p_\lambda]\,|a'|}{|a'|}, \mathfrak{p}\right) = 1$$

4) e. S.
5) Vgl. 1).
6) e. S. § 1.

besteht. Daher gilt $\left(\frac{c'}{|a'|}, \mathfrak{p}\right) \geqq 1$ für alle $\mathfrak{p}$ in E. Wäre der Punkt $\mathfrak{p}_0$ ein Häufungspunkt von E, d. h. $\bar{E} \ni \mathfrak{p}_0$, so müsste nach Stetigkeit des relativen Spektrums[7] $\left(\frac{c'}{|a'|}, \mathfrak{p}_0\right) \geqq 1$, und folglich nach (1), (5)

$$\| c' \| \geqq \varphi_{c'}(\mathfrak{p}_0) = \left(\frac{c'}{|a'|}, \mathfrak{p}_0\right) \varphi_{a'}(\mathfrak{p}_0) \geqq \varphi_{a'}(\mathfrak{p}_0) > \alpha$$

sein, was nach S) unmöglich ist. Daher gibt es eine Umgebung $[p]$ von $\mathfrak{p}_0$, in welcher $\varphi_{a'}(\mathfrak{p}) > \alpha$ ist. Demzufolge ist $\varphi_{a'}(\mathfrak{p})$ stetig in I.

Nun betrachten wir nur Elemente von $\mathfrak{M}$. Im folgenden bezeichnet man mit I' die Menge aller derartigen Punkte $\mathfrak{p}$ in I, dass $\varphi_a(\mathfrak{p}) > 0$ für irgendein $a \in \mathfrak{M}$ gilt. Da $\varphi_a(\mathfrak{p})$ für jedes a nach Obigem stetig in I ist, kann man leicht einsehen, dass I' offen in I, und folglich auch im Kleinen bikompakt[8] ist. Für je zwei Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ in I' gibt es mithin zwei Elemente $a, b \in \mathfrak{M}$, für welche $\varphi_a(\mathfrak{p}_1) > 0$, $\varphi_b(\mathfrak{p}_2) > 0$ gleichzeitig bestehen. Setzt man $c = |a| \cup |b|$, so gehört c auch zu $\mathfrak{M}$, und nach (4) gilt auch $\varphi_c(\mathfrak{p}_1) > 0$, $\varphi_c(\mathfrak{p}_2) > 0$. Daher gibt es für endlich viele Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa$ in I' stets ein Element $c \in \mathfrak{M}$, für das $\varphi_c(\mathfrak{p}_\nu) > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ ist.

$\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ seien zwei Punkte in I', und c sei ein Element in $\mathfrak{M}$, für das $\varphi_c(\mathfrak{p}_1) > 0$, $\varphi_c(\mathfrak{p}_2) > 0$ ist. Wenn für alle $a \in \mathfrak{M}$

$$\left(\frac{a}{|c|}, \mathfrak{p}_1\right) = \left(\frac{a}{|c|}, \mathfrak{p}_2\right)$$

besteht, so heissen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ miteinander kongruent, und man schreibt dann $\mathfrak{p}_1 \sim \mathfrak{p}_2$. Diese Kongruenz ist unabhängig von der Wahl des Elementes $c \in \mathfrak{M}$, denn für jedes andere $d \in \mathfrak{M}$, $\varphi_d(\mathfrak{p}_1) > 0$, $\varphi_d(\mathfrak{p}_2) > 0$, gilt

$$\left(\frac{a}{|c|}, \mathfrak{p}_\nu\right)\left(\frac{|c|}{|d|}, \mathfrak{p}_\nu\right) = \left(\frac{a}{|d|}, \mathfrak{p}_\nu\right)^{9)} \qquad (\nu = 1, 2),$$

und nach (5)

$$0 < \left(\frac{|c|}{|d|}, \mathfrak{p}_\nu\right) = \frac{\varphi_c(\mathfrak{p}_\nu)}{\varphi_d(\mathfrak{p}_\nu)} < +\infty .$$

Wenn $\mathfrak{p}_1 \sim \mathfrak{p}_2$ und $\varphi_a(\mathfrak{p}_1) = 0$ für ein $a \in \mathfrak{M}$ ist, so gilt auch $\varphi_a(\mathfrak{p}_2) = 0$, denn für ein $c \in \mathfrak{M}$, $\varphi_c(\mathfrak{p}_1) > 0$, $\varphi_c(\mathfrak{p}_2) > 0$, gilt nach (5)

$$\varphi_a(\mathfrak{p}_\nu) = \left(\frac{|a|}{|c|}, \mathfrak{p}_\nu\right) \varphi_c(\mathfrak{p}_\nu) \qquad (\nu = 1, 2),$$

$$\left(\frac{|a|}{|c|}, \mathfrak{p}_1\right) = \left(\frac{|a|}{|c|}, \mathfrak{p}_2\right).$$

Daher enthält die offene Punktmenge

---

7) e. S. § 4.
8) e. S. § 1.
9) e. S. Satz 3.10.

$$E[\mathfrak{p};\quad \varphi_c(\mathfrak{p})>0] \qquad (c\in\mathfrak{M})$$

mit einem $\mathfrak{p}$ auch alle, mit $\mathfrak{p}$ kongruenten Punkte. Da das relative Spektrum $\left(\frac{a}{|c|},\mathfrak{p}\right)$ in der offenen Punktmenge $E[\mathfrak{p};\varphi_c(\mathfrak{p})>0]$ stetig ist, ist die Punktmenge

$$E\left[\mathfrak{p};\quad \varphi_c(\mathfrak{p})>0,\quad \alpha_1<\left(\frac{a}{|c|},\mathfrak{p}\right)<\alpha_2\right] \qquad (-\infty\leqq\alpha_1<\alpha_2\leqq+\infty)$$

auch offen, und sie enthält mit einem $\mathfrak{p}$ auch alle, mit $\mathfrak{p}$ kongruenten, Punkte. Wenn zwei Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ in Γ' miteinander nicht kongruent sind, d. h. $\mathfrak{p}_1 \dashv\vdash \mathfrak{p}_2$, so gibt es zwei Elemente a, $c\in\mathfrak{M}$, für welche $\varphi_c(\mathfrak{p}_1)>0$, $\varphi_c(\mathfrak{p}_2)>0$, und $\left(\frac{a}{|c|},\mathfrak{p}_1\right)<\left(\frac{a}{|c|},\mathfrak{p}_2\right)$ besteht. Wenn man eine reelle Zahl α derart wählt, dass $\left(\frac{a}{|c|},\mathfrak{p}_1\right)<\alpha<\left(\frac{a}{|c|},\mathfrak{p}_2\right)$ gilt, so sind zwei Punktmenge

$$E\left[\mathfrak{p};\quad \varphi_c(\mathfrak{p})>0,\quad \left(\frac{a}{|c|},\mathfrak{p}\right)<\alpha\right]$$

$$E\left[\mathfrak{p};\quad \varphi_c(\mathfrak{p})>0,\quad \left(\frac{a}{|c|},\mathfrak{p}\right)>\alpha\right]$$

beide offen und voneinander fremd. Daher erhält man durch die obige Kongruenz einen Hausdorffschen Zerlegungsraum X von $\Gamma'=\Sigma x$. Der Zerlegungsraum X ist mithin auch bikompakt im Kleinen.

Setzt man für $x\in X$, $a\in\mathfrak{M}$

$$\varphi_a(x)=\operatorname*{Max}_{\mathfrak{p}\in x}\varphi_a(\mathfrak{p}), \tag{6}$$

so kann man nach (1), (2), (3), (4) leicht einsehen:

$$\|a\|=\operatorname{Max}\varphi_a(x), \tag{7}$$

$$\varphi_{|a|}(x)=\varphi_a(x)\geqq 0, \tag{8}$$

$$\varphi_a(x)\leqq\varphi_b(x) \qquad \text{für } |a|\leqq|b|, \tag{9}$$

und $\varphi_a(x)$ ist nach oben halbstetig. Wenn $\varphi_c(x)>0$ für ein $c\in\mathfrak{M}$ ist, so gilt $\varphi_c(\mathfrak{p})>0$ für jedes $\mathfrak{p}\in x$, und folglich $\left(\frac{a}{|c|},\mathfrak{p}_1\right)=\left(\frac{a}{|c|},\mathfrak{p}_2\right)$ für jedes $a\in\mathfrak{M}$ und für je zwei $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2\in x$. Daher bezeichnet man diesen Wert mit $\left(\frac{a}{|c|},x\right)$. Dann ist $\left(\frac{a}{|c|},x\right)$ auch stetig an jedem derartigen Punkt x in X, dass $\varphi_c(x)>0$ ist. Wenn $\varphi_c(x)>0$ ist, so erhält man nach (5), (6) für a, $c\in\mathfrak{M}$

$$\varphi_a(x)=\left(\frac{|a|}{|c|},x\right)\varphi_c(x). \tag{10}$$

Für jede positive Zahl a ist die Punktmenge $E[x; \varphi_a(x) \geqq \alpha]$ bikompakt. Denn diese Punktmenge ist das stetige Bild der Punktmenge $E[\mathfrak{p}; \varphi_a(\mathfrak{p}) \geqq \alpha]$, und diese letzte Punktmenge ist eine abgeschlossene Punktmenge in der Umgebung $[a]$, die bikompakt ist[10].

Nun wollen wir beweisen, dass $\varphi_a(x)$ für jedes $a \in \mathfrak{M}$ stetig in X ist. Wir nehmen an, dass $\varphi_a(x_0) > \alpha > 0$ an einem Punkt $x_0 \in X$ ist. Setzt man

$$E_1 = E[x; \quad \varphi_a(x) \geqq \alpha],$$

so ist die Punktmenge E_1 nach Obigem bikompakt. Andererseits ist die Punktmenge $E[x; \varphi_a(x) = 0]$ abgeschlossen, denn ihr Urbild in Γ', nämlich $E[\mathfrak{p}; \varphi_a(\mathfrak{p}) = 0]$, ist abgeschlossen. Setzt man

$$E_2 = E[x; \quad \varphi_a(x) > 0],$$

so ist E_2 folglich offen. y sei ein Punkt in $E_2 - E_1$, und x sei ein beliebiger Punkt in E_1. Nach Konstruktion der Zerlegung Σx gibt es dann ein Element $b \in \mathfrak{M}$, für das $\left(\frac{b}{|a|}, y\right) \neq \left(\frac{b}{|a|}, x\right)$ ist. Setzt man $c = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\{2b - (\alpha_1 + \alpha_2)\,|\,a\,|\}$ für $\alpha_1 = \left(\frac{b}{|a|}, y\right)$, $\alpha_2 = \left(\frac{b}{|a|}, x\right)$, so ist $c \in \mathfrak{M}$, und man kann leicht beweisen, dass $\left(\frac{c}{|a|}, y\right) = 1$, $\left(\frac{c}{|a|}, x\right) = -1$ ist[11]. Da $\left(\frac{c}{|a|}, x\right)$ stetig in E_2 ist, gibt es eine Umgebung U_x von x, worin überall $\left(\frac{c}{|a|}, x\right) < 0$ besteht. Jedem Punkt $x \in E_1$ entsprechend, gibt es ein solches c, das man im folgenden mit c_x bezeichnet. Da E_1 bikompakt ist, kann man E_1 durch endlich viele derartige Umgebungen U_{x_1}, $U_{x_2}, \dots, U_{x_\varkappa}$ überdecken, wobei U_{x_ν} dem Element c_{x_ν} $(\nu = 1, 2, \dots, \varkappa)$ entspricht. Setzt man $c_y = \{(c_{x_1} \frown c_{x_2} \frown \cdots \frown c_{x_\varkappa}) \smile 0\} \frown |\,a\,|$, so kann man leicht einsehen, dass $c_y \in \mathfrak{M}$, $0 \leqq c_y \leqq |\,a\,|$,

$$\left(\frac{c_y}{|a|}, y\right) = 1,$$

$$\left(\frac{c_y}{|a|}, x\right) = 0 \qquad \text{in } E_1,$$

$$0 \leqq \left(\frac{c_y}{|a|}, x\right) \leqq 1 \qquad \text{in } E_2$$

besteht. Jedem Punkt y in $E_2 - E_1$ entsprechend gibt es solches Element c_y. Für alle solchen c_y gilt dann nach (7), (9), (10)

---

10) e. S. § 1.
11) e. S. § 3.

$$\| c_y \| = \operatorname{Max} \varphi_{c_y}(x) = \operatorname*{Max}_{x \in E_2} \left(\frac{c_y}{|a|}, x \right) \varphi_a(x) \leqq \alpha .$$

Wenn $c \geqq c_y$ für alle $y \in E_2 - E_1$ besteht, so gilt

$$1 = \left(\frac{c_y}{|a|}, y \right) \leqq \left(\frac{c}{|a|}, y \right)^{12)},$$

und folglich $\left(\frac{c}{|a|}, y \right) \geqq 1$ überall in $E_2 - E_1$. Wäre der Punkt x_0 ein Häufungspunkt von $E_2 - E_1$, so müsste nach Stetigkeit von $\left(\frac{c}{|a|}, x \right)$ in E_2 auch $\left(\frac{c}{|a|}, x_0 \right) \geqq 1$, und folglich nach (7), (10)

$$\| c \| = \operatorname{Max} \varphi_c(x) \geqq \varphi_c(x_0) = \left(\frac{c}{|a|}, x_0 \right) \varphi_a(x_0) \geqq \varphi_a(x_0) > \alpha$$

sein, was nach S) unmöglich ist. Daher gibt es eine Umgebung von x_0, worin $\varphi_a(x) > \alpha$ ist. Demzufolge ist $\varphi_a(x)$ stetig in X.

Setzt man für jedes $a \in \mathfrak{M}$

$$f_a(x) = \varphi_{a_+}(x) - \varphi_{a_-}(x) ,$$

so ist $f_a(x)$ auch stetig in X. Zu jedem Punkt x in X gibt es ein $c \in \mathfrak{M}$, für das $\varphi_c(x) > 0$ ist, und nach (10)

$$f_a(x) = \varphi_{a_+}(x) - \varphi_{a_-}(x) = \left(\frac{a}{|c|}, x \right) \varphi_c(x)^{13)}$$

gilt. Hieraus kann man leicht beweisen[14]:

$$f_{|a|}(x) = \left(\frac{|a|}{|c|}, x \right) \varphi_c(x) = \varphi_a(x) = | f_a(x) | ,$$

$$f_{a \cap b}(x) = \operatorname{Min} \{ f_a(x), f_b(x) \} , \quad f_{a \cup b}(x) = \operatorname{Max} \{ f_a(x), f_b(x) \} ,$$

$$f_{\alpha a + \beta b}(x) = \alpha f_a(x) + \beta f_b(x) , \quad \| a \| = \operatorname{Max} | f_a(x) | .$$

Für je zwei verschiedene Punkte x_1, x_2 in X gibt es nach Obigem zwei Elemente $a, b \in \mathfrak{M}$, für welche $\varphi_a(x_1) > 0$, $\varphi_a(x_2) > 0$, $\left(\frac{b}{|a|}, x_1 \right) = \frac{1}{\varphi_a(x_1)}$, $\left(\frac{b}{|a|}, x_2 \right) = 0$ ist, und folglich $f_b(x_1) = 1$, $f_b(x_2) = 0$.

Wenn der Raum X bikompakt ist, so kann man beweisen, dass $f_a(x)$ für alle $a \in \mathfrak{M}$ aus allen stetigen Funktionen auf X bestehen[15]. Wenn X nicht bikompakt ist, so erhält man auf eindeutige Weise den

---

12) e. S. Satz 3.5.
13) e. S. § 3.
14) e. S. § 3.
15) Vgl. 2) Satz 8.

bikompakten Hausdorffschen Raum $X+x_0$, indem man einen Punkt x_0 zu X hinzufügt. Da für jede positive Zahl α die Punktmenge

$$E[x;\quad |f_a(x)| \geqq \alpha] = E[x;\quad \varphi_a(x) \geqq \alpha]$$

bikompakt ist, kann man leicht einsehen, dass $f_a(x)$ auch auf $X+x_0$ stetig ist, wenn man $f_a(x_0)=0$ setzt. Man kann auch beweisen, dass $f_a(x)$ für alle $a \in \mathfrak{M}$ aus allen, am x_0 verschwindenden, stetigen Funktionen auf $X+x_0$ bestehen[16].

16) Vgl. 15).