57. *Sur la théorie de la distribution des valeurs.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., June 12, 1942.)

Dans une Note[1] parue récemment, nous avons déjà montré comment les notions des ensembles d'agglomération (dues à M. W. Gross) nous permettent de généraliser la théorie de la distribution des valeurs fondée par MM. E. Borel et R. Nevanlinna. Le but de cette Note est de préciser le premier théorème fondamental que nous avons donné dans la Note citée[1].

Soient $w=f(z)$ une fonction méromorphe et uniforme, définie dans un domaine arbitraire D, et z_0 un point non isolé de la frontière Γ de D. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $z_0=\infty$. Soient, maintenant, $S_{z_0}^{(D)}$, $S_{z_0}^{(\Gamma)}$ deux ensembles d'agglomération[2]. $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}$ est un ensemble ouvert et se décompose en un nombre fini ou une infinité dénombrable des composants connexes: $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n$. Soient, encore, w_0 un point d'un Ω_n et Δ un domaine quelconque contenant dans son intérieur le point w_0, contenu complètement dans l'intérieur de Ω_n et dont la frontière est formée d'un nombre fini des courbes analytiques situées dans Ω_n. Nous supposons d'ailleurs que, dans le cas où $w_0\neq\infty$, Δ ne contient pas le point $w=\infty$, et dans le cas où $w_0=\infty$, Δ ne contient pas le point $w=0$.

Il existe alors un nombre ρ_0 $(0\leq\rho_0)$ tel que l'extérieur K_{ρ_0} du cercle $|w|\leq\rho_0$ satisfait à la condition: pour tout point frontière z' $(z'\neq\infty)$ de D situé dans K_{ρ_0} ou sur la circonférence-frontière de K_{ρ_0}, l'ensemble $S_{z'}^{(D)}$ est disjoint de la fermeture $\bar{\Delta}$ de Δ. Désignons par $D(r)$ $(\rho_0<r<+\infty)$ la partie commune au domaine D et à l'intérieur du cercle $|z|<r$, et par $D_{\rho_0}(r)$ la partie commune au domaine $D(r)$ et à l'extérieur du circle $|z|\leq\rho_0$.

Désignons encore par $n(f, r, w_0, \rho_0)$ le nombre des zéros de l'équation

$$f(z)-w_0=0 \tag{1}$$

(ou des pôles de $f(z)$ dans le cas où $w_0=\infty$) situés dans $D_{\rho_0}(r)$, chaque zéro (ou pôle) étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité, et posons

---

1) K. Kunugui: Une généralisation des théorèmes de MM. Picard-Nevanlinna sur les fonctions méromorphes, Proc. **17** (1941), 283-288.

2) Quant aux définitions et notations ainsi que ses propriétés fondamentales des ensembles d'agglomération, voir p. ex. K. Noshiro: On the theory of the cluster sets of analytic functions, Journ. Fac. Sc. Hokkaido Imp. University, Ser. I, vol. **6** (1938), pp. 217-231 et K. Kunugui: Sur un théorème de MM. Seidel-Beurling, Proc. **15** (1839), 27-32.

$$N(f, r, w_0, \rho_0) = \int_{\rho_0}^{r} \frac{n(f, t, w_0, \rho_0)}{t} dt \quad \text{si } \rho_0 > 0$$

$$= \int_{0}^{r} \frac{n(f, t, w_0, 0)}{t} dt + n(f, 0, w_0) \log r \quad \text{si } \rho_0 = 0\,,$$

où l'on pose $n(f, 0, w_0) = \lim_{r \to 0} n^*(f, r, w_0)$, $n^*(f, r, w_0)$ désignant le nombre des zéros de l'équation (1) (ou des pôles de $f(z)$ dans le cas où $w_0 = \infty$) situés dans $D(r)$, chaque zéro (ou pôle) étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité. D'autre part, soit $\theta(r)$ l'ensemble de tous les arguments de z tels que $z \in D$, $|z| = r$, $f(z) \in \varDelta$ $(\rho_0 < r < +\infty)$. Posons de plus

$$m(f, r, w_0, \varDelta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta(r)} \log \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - w_0} \right| d\varphi \text{ pour le cas où } w_0 \neq \infty\,,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta(r)} \log |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \text{ pour le cas où } w_0 = \infty\,.$$

Nous allons examiner maintenant la fonction :

$$T(f, r, w_0, \varDelta, \rho_0) = m(f, r, w_0, \varDelta) + N(f, r, w_0, \rho_0)\,,$$

Remarquons d'abord que, dans le cas où le domaine D coïncide avec tout le plan z $(z \neq \infty)$ et où $\varDelta$ coïncide avec l'extérieur du cercle d'unité : $|w| > 1$, $T(f, r, \infty, \varDelta, 0)$ coïncide avec la fonction caractéristique de M. R. Nevanlinna. Notre *premier théorème fondamental* s'énonce comme il suit :

Nous avons, pour toutes les valeurs w_0, w_0' finies ou infinie, appartenant au domaine $\varDelta$ (par suite, au même domaine Ω_n),

$$(2) \qquad |T(f, r, w_0, \varDelta, \rho_0) - T(f, r, w_0', \varDelta, \rho_0)| < A(\rho_0) \log r + h(\rho_0, w_0, w_0')\,,$$

où $A(\rho_0)$, $h(\rho_0, w_0, w_0')$ (≥ 0) sont des fonctions de ρ_0 ou des ρ_0, w_0, w_0' resp., qui sont indépendantes de r. Dans le cas où l'on peut poser $\rho_0 = 0$, ou dans le cas où $z = 0$ appartient à D et l'on peut prendre ρ_0 aussi petit que l'on veut, on a $A(\rho_0) \equiv 0$ à partir d'une certaine valeur positive ρ_1: $0 \leq \rho_0 \leq \rho_1$.

Démonstration. Démontrons seulement la première partie du théorème. D'abord, il est facile de voir qu'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $\varDelta$ est un cercle dont le centre est w_0 et que w_0' est un point situé assez près de w_0. Transformens d'abord le domaine $\varDelta$ par la fonction linéaire : $w^* = \psi(w) = 1/(w - w_0)$. Nous obtenons alors un domaine $\varDelta_1^*$ extérieur d'un cercle dont le centre est l'origine : $w^* = 0$, et une fonction $g(z) = \psi\{f(z)\}$ méromorphe et uniforme dans D.

I). *Prenons d'abord un domaine D^* contenu dans D et qui satisfait aux conditions suivantes :* 1°) *D^* contient tous les points z où l'on a $g(z) \in \varDelta_1^*$;* 2°) *pour tout r supérieur à ρ_0, la partie de la frontière de D^* qui appartient à la zone : $\rho_0 < |z| < r$ appartient à D et se compose d'un nombre fini des arcs analytiques.* Tous les points z du domaine $D_{\rho_0}(r)$ appartenant à D^* forment un ensemble ouvert dont la frontière totale sera désignée par C. Alors, on a

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial \log|g-a|}{\partial n}ds = -n(g, r, a, \rho_0)+n(g, r, \infty, \rho_0).$$

Supprimons d'abord les parties des contours de C qui sont situées sur la circonférence $|z|=r$. Le reste se partage en un nombre fini des arcs et ces arcs peuvent être classés en trois espèces: 1°) des contours Γ_1 qui n'ont aucun point ni sur la circonférence $|z|=r$, ni sur la circonférence $|z|=\rho_0$; 2°) des arcs Γ_2 qui n'ont aucun arc sur la circonférence $|z|=\rho_0$ et qui ont leurs points de départ et terminus sur la circonférence $|z|=r$; 3°) des arcs Γ_3 qui ont des parties sur la circonférence $|z|=\rho_0$. Désignons encore par Γ_0 la somme des arcs des contours de C, qui sont situés sur la circonférence $|z|=r$.

Soient, maintenant, R le rayon du cercle dont l'extérieur contient le domaine Δ_1^* mais ne contient aucune valeur de $g(z)$ pour les z de la frontière de $D_{\rho_0}(r)\cdot D^*$ situés dans la zone: $\rho_0<|z|<r$, et cela pour tout r, $r>\rho_0$, et R_1 un nombre quelconque supérieur à R. D'après la condition I 1°), un tel rayon R existe toujours et sa longueur est inférieure ou égale au rayon R^* du cercle-complémentaire de Δ_1^*.

Posons $g^*(z)=g(z)/R_1$. Et, d'autre part, soit a une valeur au module supérieur à R_2/R_1, et inférieur à R_2'/R_1, où R_2, R_2' sont deux nombres tels que $R<R_2<R_1<R_2'<2R$. *Supposons, de plus, que nous avons $g(z)\neq aR_1$ pour tous les z, situés sur la partie de la frontière de $D_{\rho_0}(r)\cdot D^*$ contenues dans la somme des deux circonférences: $|z|=r$ et $|z|=\rho_0$.* Cette condition pour le point a sera appellée "condition (α)" dans la suite. Comme le point a est situé à l'extérieur du cercle $|w|\leq R_2/R_1$ et que la valeur $g^*(z)$ est située toujours dans l'intérieur de ce cercle, nous avons

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0+\Gamma_2+\Gamma_3} \frac{\partial \log|g^*-a|}{\partial n}ds = -n(g^*, r, a, \rho_0)+n(g, r, \infty, \rho_0).$$

Posons d'ailleurs $w_1^*=1/(w_0'-w_0)R_1$ et considérons, sur la sphère de Riemann au rayon 1/2 et tangente à l'origine $w^*=0$, la circonférence U qui est la polaire du point w_1^*. Désignons encore par W_1^* l'antipode de w_1^*. La circonférence U est située près du cercle d'unité, et nous pouvons donc supposer que tous les points de la circonférence U satisfont à l'inégalité: $R_2/R_1<|w^*|<R_2'/R_1$. U partage toute la sphère de Riemann en deux parties demi-sphériques, dont l'une qui contient le point W_1^* sera désignée par S_1, et l'autre qui contient le point w_1^* par S_2. Les points de U peuvent être exprimés par $p(\varphi)$, φ étant l'angle fait le grand cercle (qui passe par w_1^*, W_1^*) avec une direction déterminée. Ce grand cercle est partagé en deux arcs par les deux points w_1^*, W_1^*, et chacun de ces arcs rencontre la circonférence U en un point. φ sera l'angle de cet arc fait avec celui qui passe par $w^*=0$. Donc, l'angle φ se varie entre $-\pi$ et π. Posons $a=p(\varphi)$ dans la formule (4), et intégrons ensuite l'égalité (4) par rapport à la variable φ entre les limites $-\pi$ et π.

Nous avons alors

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\log|g^*(z)-p(\varphi)|\,d\varphi = k\{g^*(z)\},$$

où l'on pose $k\{g^*(z)\}=\log|g^*(z)-W_1^*|$ si $g^*(z)$ appartient à S_2, et $k\{g^*(z)\}=\log|1+g^*(z)\overline{W}_1^*|$ si $g^*(z)$ appartient à S_1 ou à U. Supposons, d'abord, qu'il n'existe qu'un nombre fini des points: $z_1, z_2, \dots, z_l$ de Γ_0 et $z'_1, z'_2, \dots, z'_{l'}$ de la circonférence $|z|=\rho_0$ et des valeurs $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$, $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_{l'}$ (qui ne sont pas toujours distinctes) tels que $g^*(z_i)=p(\varphi_i)$, $g^*(z'_j)=p(\varphi'_j)$, $i=1, 2, \dots, l, j=1, 2, \dots, l'$. Dans les voisinages de ces points z_i, z'_j, nous avons les développements: $g^*(z)=p(\varphi_i)+a_1^i(z-z_i)+\cdots$; $g^*(z)=p(\varphi'_j)+a_1^j(z-z'_j)+\cdots$. *Nous supposons pour le moment que la condition*: $|a_1^i|$, $|a_1^j|\geq\eta>0$ *est réalisée.* Cette condition sera appellée "condition (β)." η est un nombre positif arbitraire. Pour chaque φ_i, φ'_j, prenons un petit intervalle de φ (si φ_i ou φ'_j est égal à π ou $-\pi$, nous considérons la somme de deux intervalles contenant $-\pi$ et π), et supprimons-les de l'intervalle $-\pi\leq\varphi\leq+\pi$. Désignons le reste par Φ. En faisant les longueurs des intervalles supprimés tendre vers zéro, nous avons

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_{\Phi}\int_{\Gamma_0}\frac{\partial \log|g^*(z)-p(\varphi)|}{\partial n}dsd\varphi$$

$$=\int_{\Gamma_0}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\log|g^*(z)-p(\varphi)|\,d\varphi ds=\int_{\Gamma_0}\frac{\partial k\{g^*(z)\}}{\partial n}ds.$$

II). *Considérons d'abord le cas particulier où $g^*(z)$ jouit de la propriété: sur la partie de la frontière de $D_{\rho_0}(r)D^*$ ($\rho<r<\infty$) qui est située dans la zone: $\rho_0<|z|<r$, les valeurs $g^*(z)$ appartienne à la circonférence*: $|w\overline{W}_1^*+1|=1$. Maintenant, considérons l'arc A_i de Γ_2. Pendant z parcourt cet arc A_i, les valeurs $g^*(z)$ sont toujours situées dans le cercle $|w|<R_2/R_1$, et par suite appartiennent à S_1. Nous avons donc

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{A_i}\frac{\partial \log|g^*(z)-p(\varphi)|}{\partial n}dsd\varphi=\int_{A_i}\frac{\partial \log|1+g^*(z)\overline{W}_1^*|}{\partial n}ds=0$$

puisque $g^*(z)$ appartient toujours à la circonférence: $|w\overline{W}_1^*+1|=1$, d'après notre supposition II).

Enfin, considérons l'arc de Γ_3. Supposons que le nombre ρ_0 satisfait à la condition (β). Lorsque z parcourt un arc B_i de Γ_3, $g^*(z)$ décrit une courbe continue qui peut être fermée par un segment rectilige situé complètement dans le cercle: $|w|\leq R_2/R_1$. Donc, intégrale $-\frac{1}{2\pi}\int_{B_i}\frac{\partial \log|g^*(z)-p(\varphi)|}{\partial n}ds$ est égale à "l'ordre de la courbe[1]" décrite par $g^*(z)$ avec ce segment par rapport au point $p(\varphi)$, à 1/2 près. Donc, il existe un nombre M tel que

$$\lim\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Phi}\int_{\Gamma_3}\frac{\partial \log|g^*(z)-p(\varphi)|}{\partial n}dsd\varphi\right|\leq kM,$$

1) Voir p. ex. P. Alexandroff-H. Hopf: Topologie, Erster Band, Berlin, 1935, p. 458-467.

où k est le nombre des arcs de Γ_3. k est donc déterminé par ρ_0 et indépendant de r, si r est assez grand.

Or, si φ appartient à Φ, la condition (α) est réalisée, et par suite nous pouvons intégrer l'égalité (4) par rapport à φ dans Φ. En faisant ensuite les longueurs des intervalles supprimés de φ tendre vers 0, nous avons

$$(6)\qquad \int_{\Gamma_0(r)} \frac{\partial k\{g^*(z)\}}{\partial n} ds + A = -2l_U\{g^*, r, \rho_0\} + 2\pi n\{g, r, \infty, \rho_0\},$$

où l'on désigne par $l_U\{g^*, r, \rho_0\}$ la longueur totale des courbes qui sont formées par les valeurs prises par $w=g^*(z)$ sur la circonférence U, la longueur étant toujours mesurée sur la sphère de Riemann du rayon $1/2$ et tangente à l'origine $w=0$, et ici on a, de plus, $|A| \leq kM$.

Maintenant, divisions l'égalité (6) par r, et l'intégrons par rapport à r de ρ_0 jusqu'à ρ, $\rho_0 < \rho$. Pour cela, d'abord, considérons un intervalle de r: $\rho_1 \leq r \leq \rho_2$, où la condition (β) est réalisée. Pour ce but, il nous suffit de prendre les zéros z_i'' de l'équation: $dg(z)/dz=0$, et supprimer un petit intervalle de r contenant chacun des $|z_i''|$. Pour ces valeurs de r, on a l'égalité (6). Condidérons ensuite l'arc de $\Gamma_0=\Gamma_0(r)$. Les courbes-frontières de D^* qui se trouvent dans la zone: $\rho_1 < r < \rho_2$ peuvent être exprimées par un nombre fini des équations[1]: $\alpha=u_j(r)$, $j=1, 2, 3, \dots, 2J(r)$, où α désigne l'argument du point de la courbe. Alors, Γ_0 se décompose en un nombre fini des arcs dont les extrémités seront désignées par b_i', b_i''. Nous supposons d'ailleurs qu'en supprimant les intervalles nécessaires, $\partial u_j(r)/\partial r$ $(j=1, 2, \dots, 2J(r))$ existe toujours, et sa valeur est finie.

Or, nous avons supposé que nous avons $k\{g^*(b_i')\}=k\{g^*(b_i'')\}=0$. En nous servant de cette égalité, intégrons l'égalité (6) par rapport à r pour tous les intervalles $[\rho_1, \rho_2]$, et faisons les longueurs de intervalles supprimés tendre vers 0. Nous avons ainsi

$$(7)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{l_U\{g^*, r, \rho_0\}}{r} dr - N\{g, \rho, \infty, \rho_0\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0(\rho)} k\{g^*(z)\}\, d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0(\rho_0)} k\{g^*(z)\}\, d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{A}{r} dr.$$

Or, si $g^*(z)$ appartient à S_2, on a $|k\{g^*(z)\} - \log|g^*(z)|| \leq 2|W_1^*|/|g^*(z)| < 1$, puisque nous pouvons supposer que $|W_1^*| < R_2/(2R_1)$. Si $g^*(z)$ appartient à S_1 (ou à U), nous avons $|k\{g^*(z)\}| \leq |\log(1-|g^*||W_1^*|)| \leq 1$. Donc, nous avons

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0(\rho)} k\{^*(z)\}\, d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_{\theta(\rho)} \log|g^*(z)|\, d\alpha\right| < |\log(R^*/R)| + 1,$$

et finalement,

---

1) S'il n'existe aucune courbe-frontière située dans la zone: $\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2$, nous pouvons simplifier les raisonnements.

$$(8)\qquad \left| T\{g^*(z), \rho, \infty, \varDelta_1^*, \rho_0\} - \frac{1}{\pi}\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{l_U\{g^*, r, \rho_0\}}{r} dr \right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma_0(\rho_0)} k\{g^*(z)\}\, d\alpha\right| + \frac{kM}{2\pi}\log\frac{\rho}{\rho_0} + \left|\log\frac{R^*}{R}\right| + 1 .$$

Il est d'ailleurs facile de voir que la formule (8) subsiste encore pour le cas particulier où $W_1^* = 0$.

Considérons, maintenant, la transformation: $t\{g^*\} = (1+\bar{w}_1^* g^*)/(g^* - w_1^*)$. Lorsque $g^*(z)$ parcourt la circonférence U, $t\{g^*\}$ parcourt la circonférence du cercle d'unité, soit désignée par U_0. Si nous considérons sur la sphère de Riemann, la vitesse du tour est un invariant de la transformation $t = t\{g^*\}$. Donc, nous avon $l_U\{g^*, r, \rho_0\} = l_{U_0}\{t(g^*), r, \rho_0\}$. D'autre part, si l'on désigne par $\varDelta_1$ un domaine contenu dans le cercle: $|w - w_1^*| \leq |w_1^*|/2$ et qui contient le cercle: $|w - w_1^*| \leq |w_1^*|/m$, où m est un nombre entier positif, et par $\varDelta_2$ le domaine transformé de $\varDelta_1$ par la transformation $t = t(w)$, nous avons

$$|T\{g^*, \rho, w_1^*, \varDelta_1, \rho_0\} - T\{t(g^*), \rho, \infty, \varDelta_2, \rho_0\}| \leq \log(1 + 3|w_1^*|^2/2),$$

et par suite

$$(9)\qquad |T\{g^*, \rho, w_1^*, \varDelta_1, \rho_0\} - T\{g^*, \rho, \infty, \varDelta_2, \rho_0\}|$$
$$\leq \frac{kM}{\pi}\log\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma_0(\rho_0)} k\{g^*(z)\}\, d\alpha\right| + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0(\rho_0)} \log^+|t(g^*)|\, d\alpha$$
$$+ 3\log\{1 + 3|w_1^*|^2/2\} + 2\log(m/|w_1^*|) + 2 .$$

III). *Passons, maintenant, au cas général.* Posons $w_1^* = 1/(w_0' - w_0)R_1$ comme auparavant, et déterminons β par l'équation:

$$(10)\qquad \bar{\beta} = (\beta R_1 w_1^* - R)/(R_1 w_1^* - R\bar{\beta}) .$$

La valeur β existe toujours, et tend vers ∞ avec w_1^*. Le nombre α défini par $\bar{\alpha} = (\beta - 1/\beta)/2$ tend également vers ∞ avec w_1^*. α n'est pas réel et nous pouvons poser $\alpha = ae^{i\theta_0}$, $\theta_0 \neq 0, \pi$.

Considérons, maintenant, la transformation

$$W(w) = \frac{1}{\overline{W}_0^*}\frac{(1 - e^{-2i\theta_0})(\tau^2 + 1)}{2\bar{\alpha}\tau - (\tau^2 + 1)}, \qquad \tau = \frac{\beta R_1 w - R}{R_1 w - \bar{\beta} R}$$

où W_0^* désigne un nombre complexe tel que $a|W_0^*| > 5$ (nons supposons de plus que $a > 5$). La fonction $W = W(w)$ fait correspondre le point $w = \infty$ à $W = \infty$. Cette fonction effectue la représentation conforme du domaine $|w| > R/R_1$ sur un domaine formé de tous les points du plan complexe muni d'une coupure le long d'un arc de la circonférence $|W\overline{W}_0^* + 1| = 1$. Cet arc passe par le point $W = 0$ et est contenu dans le cercle $|W| < 1/2$ et par suite dans le domaine S_1. Au voisinage du point $w = \infty$, on a le développement: $W = A_{-1}w + A_0 + A_1/w + \cdots$. Donc, si nous prenons un domaine $\varDelta'$ (convenablement choisi) contenant $w = \infty$ et contenu dans $\varDelta_1^*$, et si nous désignons par $\varDelta_1'$ le transformé de $\varDelta'$ par la transformation $W = W(w)$, nous avons

$$(11)\qquad |T\{G(z), \rho, \infty, \Delta_1', \rho_0\} - T\{g^*(z), \rho, \infty, \Delta' \rho_0\}|$$
$$\leq |\log|A_{-1}(w_1^*, R, R_1)||+1,$$

où l'on pose $G(z) = W\{g^*(z)\}$, Posons, de plus $w_0^* = -1/\overline{W}_0^*$. Nous avons alors, d'après l'équation (10), $W(w_1^*) = w_0^*$.

Or, au voisinage de point w_1^*, nous avons le développement: $W(w) = w_0^* + B_1(w - w_1^*) + \cdots$, où $B_1(w_1^*, R, R_1) \neq 0$ et qui est convergente dans un cercle au centre w_1^*. Donc, si nous prenons un de tels cercles Δ'' de rayon convenablement choisi, et si nous désignons par Δ_1'' le transformé de Δ'' par $W = W(w)$, nous avons

$$(12)\qquad |T\{G(z), \rho, w_0^*, \Delta_1'', \rho_0\} - T\{g^*(z), \rho, w_1^*, \Delta'', \rho_0\}|$$
$$\leq |\log|B_1(w_1^*, R, R_1)||+1.$$

Enfin, d'après la formule (9), nous avons

$$(13)\qquad |T\{G(z), \rho, w_0^*, \Delta_1'', \rho_0\} - T\{G(z), \rho, \infty, \Delta_1', \rho_0\}|$$
$$\leq A(\rho_0)\log\rho + Q(\rho_0, w_0^*, R, R_1).$$

Ainsi, les formules (11), (12) et (13) nous donnent

$$|T\{g, \rho, \infty, R_1\Delta', \rho_0\} - T\{g, \rho, R_1 w_1^*, R_1\Delta'', \rho_0\}|$$
$$\leq A(\rho_0)\log\rho + Q_1(\rho_0, w_0^*, w_1^*, R, R_1),$$

où l'on désigne par $R_1\Delta'$, $R_1\Delta''$ les domaines obtenus des Δ', Δ'' en multipliant les modules des tous les points de Δ', Δ'' resp. par le nombre R_1.

En revanant à la fonction $f(z)$, nous avons

$$(14)\qquad |T\{f, \rho, w_0, \Delta, \rho_0\} - T\{f, \rho, w_0', \Delta, \rho_0\}|$$
$$< A(\rho_0)\log\rho + h(\rho_0, w_0, w_0'),$$

puisque w_0^*, w_1^*, R et R_1 peuvent être considérés comme fonctions des w_0, w_0'. (14) est justement la formule que nous avions en vue, c. q. f. d.