73. Über eine Verschärfung des Löwnerschen Hilfssatzes.

Von Yûsaku KOMATU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 13, 1942.)

1. Herr Unkelbach[1] hat die Verschärfung des sogenannten Löwnerschen Hilfssatzes bewiesen, welche besagt:

Bildet die Funktion $w=f(z)$ *mit* $f(o)=0$ *und* $f'(o)>0$ *den Einheitskreis* $|z|<1$ *konform auf ein innerhalb des Einheitskreises* $|w|<1$ *enthaltenes Gebiet ab, derart, daß ein Bogen der Länge* l *des Kreises* $|z|=1$ *in stetiger Weise auf einen Bogen der Länge* L *des Kreises* $|w|=1$ *übergeht, so gilt die Ungleichung*

$$L \geqq \frac{2}{1+f'(o)}\, l .$$

2. Wenn wir nur die schlichte Abbildung behandeln wollen, dann dürfen wir offenbar die Betrachtungen auf die beschränkte Schlitzabbildung

$$w_t=f(z,t)=e^{-t}(z+\cdots), \quad f'(o,t)=e^{-t},$$

beschränken. Die diese Abbildungsfunktion erzeugende Löwnersche Differentialgleichung sei

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial f(z,\tau)}{\partial \tau}=-f(z,\tau)\frac{1+\varkappa(\tau)f(z,\tau)}{1-\varkappa(\tau)f(z,\tau)}, \quad \varkappa(\tau)=e^{i\theta(\tau)}, \quad (o\leqq \tau \leqq t)$$

und die Bildpunkte von $z=e^{ia}$ auf dem betreffenden Bogen

$$a_1 \leqq \arg z \leqq a_2$$

durch die Abbildungen $w_\tau=f(z,\tau)$ seien $e^{i\varphi(a,\tau)}$. Wie wir in der früheren Note[2] gesehen haben, gilt dann die Beziehung

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial \varphi(a,\tau)}{\partial \tau}=-\cot\frac{\theta(\tau)+\varphi(a,\tau)}{2}, \quad a_1\leqq a \leqq a_2, \quad \big(\varphi(a,o)=a\big)$$

und dabei genügt die Funktion $\theta(\tau)$ der Ungleichungen

$$-\varphi(a_1,\tau)<\theta(\tau)<2\pi-\varphi(a_2,\tau).$$

Aus den auch in der oben zitierten Note bewiesenen Beziehungen

---

1) H. Unkelbach, Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung, Math. Zeitschr. **43**, 1938, 739–742. Er sagt darin vor, daß in seiner demnächst erscheinenden Arbeit eine weitere Verschärfung für schlichte Abbildungen angegeben wird.

2) Y. Komatu, Über das Randverhalten beschränkter Schlitzabbildungen und seine Anwendungen, Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan, **24**, 1942, 187–197.

$$(3) \qquad |f'(e^{ia}, t)| = \exp\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial\varphi(a, \tau)}{\partial\tau}\right)^2 \partial\tau\right) \geqq e^{\frac{t}{2}} = f'(o, t)^{-\frac{1}{2}}$$

folgt sofort eine Verschärfung des Unkelbachschen Satzes:

$$(4) \qquad \varphi(a_2, t) - \varphi(a_1, t) = \int_{a_1}^{a_2} |f'(e^{ia}, t)| \, da \geqq f'(o, t)^{-\frac{1}{2}}(a_2 - a_1).$$

3. Nun sollen wir aber die folgende scharfe Abschätzung beweisen, welche die obige Ungleichung (4) als eine unmittelbare Folgerung besitzt:

Unter den Voraussetzungen des Unkelbachschen Satzes nebst der Schlichtheit der Abbildung gilt die Ungleichung

$$\sin\frac{L}{4} \geqq f'(o)^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{l}{4},$$

und hier besteht die Gleichheit nur, wenn die Funktion $w = f(z)$ die durch die Gleichung

$$\frac{f(z)}{(1 + \varepsilon f(z))^2} = f'(o)\frac{z}{(1 + \varepsilon z)^2}, \quad \varepsilon = -e^{-i\frac{a_1 + a_2}{2}},$$

definierte Schlitzabbildung vermittelt und der betreffende auf $|z| = 1$ liegende Bogen

$$a_1 \leqq \arg z \leqq a_2$$

ist.

Vorbemerkung. Aus dem Bestehen der Ungleichung $\dfrac{L}{l} \geqq \dfrac{\sin\frac{L}{4}}{\sin\frac{l}{4}}$ ist die obige Abschätzung (4) eine offenbare Folgerung unseres Satzes. Natürlich bleibt der Satz auch dann gelten, wenn wir darin statt eines Bogens mehrere Bogen betrachten.

Beweis. Wir gehen von der Differentialgleichung (2) aus. Da die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varphi(a_2, \tau) - \varphi(a_1, \tau)\right) = -\cot\frac{\theta(\tau) + \varphi(a_2, \tau)}{2} + \cot\frac{\theta(\tau) + \varphi(a_1, \tau)}{2}$$

im Intervalle $-\varphi(a_1, \tau) < \theta(\tau) < 2\pi - \varphi(a_2, \tau)$ ihr Minimum für $\theta(\tau) = \pi - \dfrac{\varphi(a_1, \tau) + \varphi(a_2, \tau)}{2}$ erreicht, so gilt die Ungleichung

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varphi(a_2, \tau) - \varphi(a_1, \tau)\right) \geqq 2\tan\frac{\varphi(a_2, \tau) - \varphi(a_1, \tau)}{4}.$$

Integration über τ von o bis t liefert tatsächlich die Beziehung

$$(5) \qquad \sin\frac{\varphi(a_2, t) - \varphi(a_1, t)}{4} \geqq e^{\frac{t}{2}} \sin\frac{\varphi(a_2, o) - \varphi(a_1, o)}{4},$$

welche gerade die zu beweisende ist; denn es sind

$$e^{\frac{t}{2}}=f'(o,\, t)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \varphi(\alpha_\nu,\, o)=\alpha_\nu \quad (\nu=1,\, 2)\,.$$

Wenn in der Ungleichung (5) das Gleichheitszeichen stehen soll, dann muß in der Herleitung überall das Gleichheitszeichen stehen. Dann muß also erstens die Funktion $\theta(\tau)$ der Gleichung

$$\theta(\tau)=\pi-\frac{\varphi(\alpha_1,\,\tau)+\varphi(\alpha_2,\,\tau)}{2} \qquad (0\leqq\tau\leqq t)$$

genügen und sogar gelten nacheinander die Beziehungen

$$-\frac{\partial\varphi(\alpha_1,\,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial\varphi(\alpha_2,\,\tau)}{\partial\tau}=\tan\frac{\varphi(\alpha_2,\,\tau)-\varphi(\alpha_1,\,\tau)}{4}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\varphi(\alpha_1,\,\tau)+\varphi(\alpha_2,\,\tau)\Big)=0\,,$$

$$\varphi(\alpha_1,\,\tau)+\varphi(\alpha_2,\,\tau)\equiv\varphi(\alpha_1,\,o)+\varphi(\alpha_2,\,o)=\alpha_1+\alpha_2\,,$$

$$\theta(\tau)=\pi-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\,,\quad \varkappa(\tau)=e^{i\theta(\tau)}=-e^{-i\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}\,.$$

Durch direkte Integration der Löwnerschen Differentialgleichung (1) mit diesem konstanten $\varkappa(\tau)\equiv\varepsilon$ erhalten wir also

$$\frac{w_t}{(1+\varepsilon w_t)^2}=e^{-t}\frac{z}{(1+\varepsilon z)^2} \qquad \Big(w_t=f(z,\, t)\Big)\,.$$

Diese Funktion $w_t=f(z, t)$ führt den Bogen $|z|=1$, $\left|\arg z-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right| \leqq \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$ auf den Bogen $|w_t|=1$, $\left|\arg w_t-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right|\leqq\frac{\varphi(\alpha_2,\, t)-\varphi(\alpha_1,\, t)}{2}$ über und für diese Funktion tritt das Gleichheitszeichen tatsächlich auf.

4. Da es immer $1\geqq f'(o)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{l}{4}$ sein muß, so erhalten wir als eine einfache Folgerung des soeben bewiesenen Satzes das folgende Resultat:

Die Länge l des Bogens, welcher auf der Peripherie $|z|=1$ liegt und durch die Abbildung $w=f(z)$ auf den Bogen der Periperie $|w|=1$ übergeführt wird, kann nicht größer als $4\arcsin f'(o)^{\frac{1}{2}}$ $(\leqq 2\pi)$ *sein.*

5. Als eine Bemerkung sollen wir im folgenden noch eine Ungleichung herleiten, welche die Funktionen

$$\psi(\beta,\,\tau)=\varphi\Big(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\frac{\beta}{2},\,\tau\Big)-\varphi\Big(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{\beta}{2},\,\tau\Big)$$

erfüllen müssen. Aus der Beziehung (3) folgt zunächst

$$\psi(\beta, \tau)=\int_{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{\beta'}{2}}^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\frac{\beta}{2}} |f'(e^{i\alpha}, \tau)|\, d\alpha$$

$$=\int_{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\frac{\beta}{2}} \exp\left(\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\tau\left(\frac{\partial\varphi(\alpha, \tau)}{\partial\tau}\right)^2 d\tau\right) d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\beta\left[\exp\left(\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\frac{\beta}{2}, \tau\right)\right)^2 d\tau\right)\right.$$

$$\left.+\exp\left(\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{\beta}{2}, \tau\right)\right)^2 d\tau\right)\right] d\beta$$

$$\geqq \int_0^\beta \exp\left(\frac{\tau}{2}+\frac{1}{4}\int_0^\tau\left(\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\frac{\beta}{2}, \tau\right)\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{\beta}{2}, \tau\right)\right)^2 d\tau\right) d\beta\right.$$

und also

$$\psi(\beta, \tau) \geqq \int_0^\beta \exp\left(\frac{\tau}{2}+\frac{1}{8}\int_0^\tau\left(\frac{\partial\psi(\beta, \tau)}{\partial\tau}\right)^2 d\tau\right) d\beta. \tag{6}$$

Hier kann die Gleichheit nur stehen, wenn

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varphi\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\frac{\beta}{2}, \tau\right)+\varphi\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{\beta}{2}, \tau\right)\right)\equiv 0$$

und damit

$$\varphi\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\frac{\beta}{2}, \tau\right)+\varphi\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{\beta}{2}, \tau\right)$$

$$\equiv\varphi\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\frac{\beta}{2}, o\right)+\varphi\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{\beta}{2}, o\right)=\alpha_1+\alpha_2$$

ist. In diesem Falle muß die Funktion $\psi(\beta, \tau)$, wie wir schon im eben durchgeführten Beweise unseres Satzes gezeigt haben, durch

$$\psi(\beta, \tau)=4 \arcsin\left(e^{\frac{\tau}{2}} \sin\frac{\beta}{4}\right)$$

geliefert werden. Nach den eben genannten Gründen würden wir den Beweise unseres Satzes auch mit Hilfe dieser Ungleichung (6) durchführen können, beachtend dabei, daß die Gleichung (2) besteht.

6. Es sei nun B ein einfachzusammenhängendes schlichtes Gebiet in der w-Ebene, das den Nullpunkt $w=0$ enthält und die Entfernung zwischen $w=0$ und dem Rande von B betrage höchstens $\theta(0<\theta\leqq 1)$. Es sei ferner B_1 dasjenige innerhalb $|w|<1$ liegende möglichst große Teilgebiet von B, das den Nullpunkt enthält. Wir nehmen an, daß der auf dem Kreise $|w|=1$ liegende Randteil von B_1 aus den Bogen besteht, deren Gesamtlänge höchstens $L(0\leqq L\leqq 2\pi)$ beträgt. Die Menge Γ der im Kreise $|w|<1$ liegenden Randpunkte von B gehe bei konformer Abbildung $w=f(z)\ \big(f(o)=0,\ f'(o)>0\big)$ von B auf den Einheitskreis $|z|<1$ in die Menge γ der Peripherie $|z|=1$ über, deren Gesamtlänge Λ beträgt. Dann gilt der folgende wohlbekannte Satz[3]:

Es gilt

$$\Lambda \geqq 4 \arcsin \frac{1-\theta}{1+\theta}, \tag{7}$$

und die Gleichheit steht nur, wenn die Funktion $w=f(z)$ die in unserem Satze in Nr. 3 angegebene extremale Schlitzabbildung mit $f'(o)=\dfrac{4\theta}{(1+\theta)^2}$ vermittelt.

Wie wir aus den folgenden Überlegungen leicht einsehen werden, folgt dieser Satz aus dem schon in Nr. 4 beachteten Resultat. Wenn wir aber unseren Satz in Nr. 3 als die Abschätzung von oben für die Größe l mittels der gegebenen Größe $L(0 \leqq L \leqq 2\pi)$ betrachten, so verschärft er diese Ungleichung. Es gilt nämlich der Satz:

Unter den oben angegebenen Voraussetzungen gilt sogar die Ungleichung

$$\Lambda \geqq 4 \arcsin \sqrt{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^2 + \frac{4\theta}{(1+\theta)^2} \cos^2 \frac{L}{4}}.$$

Gleichheit steht hier nur in demselben Falle wie im obigen.

Beweis. Nach dem Carlemanschen Gebietserweiterungsprinzip des harmonischen Maßes genügt es offenbar den Satz statt für das Gebiet B nur für das Teilgebiet B_1 zu beweisen. Aus der Voraussetzung, daß das Gebiet B_1 einen Randpunkt w mit $|w| \leqq \theta$ besitzt, folgt zuerst die Beziehung

$$f'(o) \leqq \frac{4\theta}{(1+\theta)^2}; \tag{8}$$

denn für die schlichte Funktion $w=f(z)\ \big(|f(z)|<1\big)$ gilt die Verzerrung[4]

$$\frac{|f(z)|}{(1+|f(z)|)^2} \geqq f'(o) \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \quad (|z|<1)$$

und also ergibt sich sofort die Beziehung (8). Nach unserem Satze erhalten wir damit

---

3) Zwar gilt der Satz auch für nichtschlichtes Bildgebiet und, wenn wir die Abbildung auf die universelle Überlagerungsfläche betrachten, sogar für mehrfach zusammenhängendes Bildgebiet, aber hier formulieren wir ihn nur in der Form für den Fall der schlichten Abbildung. Vgl. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen. Berlin, 1936, S. 105, Satz 3.

4) G. M. Golusin, Über die Verzerrungssätze der schlichten konformen Abbildung (russisch), Recueil Math. **1**, 1936, 127–135. Insbes. S. 129, Ungleichung (6). Vgl. auch z. B. K. Joh, Theorems on schlicht functions. III, Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan, **21**, 1939, 191–208. Insbes. S. 193, Ungleichung (6). Zwar wird diese Ungleichung zuerst für Schlitzabbildungsfunktionen bewiesen, aber sie gilt natürlich auch für allgemeine (nicht notwendigerweise beschränkte Schlitzabbildung vermittelnde) Funktionen.

$$\sin\frac{L}{4} \geqq \frac{1+\theta}{2\sqrt{\theta}} \sin\frac{2\pi-\Lambda}{4}$$

und daher gilt tatsächlich die Abschätzung

$$\Lambda \geqq 2\pi - 4 \arcsin\left(\frac{2\sqrt{\theta}}{1+\theta}\sin\frac{L}{4}\right)$$

$$= 4 \arcsin\sqrt{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^2 + \frac{4\theta}{(1+\theta)^2}\cos^2\frac{L}{4}}\,.$$

In bezug auf die Gleichheit ist es fast klar.