108. Über ein lineares Funktional auf dem teilweise geordneten Modul.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1942)

Kürzlich hat T. Nakayama einen teilweisegeordneten Modul gegeben, der zu keiner Klasse von Funktionen algebraisch isomorph ist[1]. Dabei habe ich bemerkt, dass der sogenannte L_p-Raum ein solcher ist. Hier wollen wir diese Aufgabe näher erörtern. Im folgenden verwenden wir Bezeichnungen in einer früheren Abhandlung[2].

$\mathfrak{M}$ sei ein teilweisegeordneter Modul, und $\mathfrak{E}$ sei sein Eigenraum.

Definition 1. Ein Punkt $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{E}$ heisst ein *beschränkter Punkt* von $\mathfrak{M}$, wenn es ein derartiges Element $a \in \mathfrak{M}$ gibt, dass das relative Spektrum $\left(\frac{x}{a}, \mathfrak{b}\right)$ für alle $x \in \mathfrak{M}$ endlich ist.

Satz 1. *Wenn ein positives lineares Funktional* $P(\neq 0)$ *auf* $\mathfrak{M}$ *der Bedingung:*

$$(*) \qquad \operatorname{Min}\{P(a), P(b)\} = 0 \quad \textit{für} \quad a \frown b = 0^{3)}$$

genügt, so gibt es einen einzigen derartigen beschränkten Punkt $\mathfrak{b}$ *von* $\mathfrak{M}$, *dass für* $P(a) \neq 0$, $[p] \in \mathfrak{b}$ *stets* $P([p]a) = P(a)$ *ist, und dann gilt für* $P(b) \neq 0$ *stets*

$$(**) \qquad \frac{P(a)}{P(b)} = \left(\frac{a}{b}, \mathfrak{b}\right).$$

Beweis. Wenn $P(a) \neq 0$ ist, so gilt nach (*) für jeden Projektor $[p]$

$$P([p]a) = 0 \quad \text{oder} \quad = P(a).$$

Für $P(a) \neq 0$ bildet die Menge $\mathfrak{p}_a$ aller Projektoren $[p]$ mit $P([p]a) \neq 0$ ein Maximalideal, denn 1) $\mathfrak{p}_a \bar{\ni} 0$, 2) aus $[q] \geqq [p]$, $P([p]a) \neq 0$ folgt $P\big(([q]-[p])a\big) = 0$ nach (*) und folglich $P([q]a) = P([p]a)$, 3) aus $P([p]a) \neq 0$, $P([q]a) \neq 0$ folgt $P([p][q]a) \neq 0$ nach (*), und für $P([q]a) = 0$ gilt $P\big(([a]-[q][a])a\big) = P(a) \neq 0$. Dieses Maximalideal $\mathfrak{p}_a$ ist dasselbe für jedes a mit $P(a) \neq 0$, denn für $\mathfrak{p}_a \neq \mathfrak{p}_b$ gäbe es zwei Umgebungen $[p], [q]$ mit $[p][q] = 0$, $\mathfrak{p}_a \ni [p]$, $\mathfrak{p}_b \ni [q]$ und dann wäre nach (*) $P([p]a)P([q]b) = 0$. Dieses einzige $\mathfrak{p}_a$ bezeichnet man mit $\mathfrak{b}$.

---

1) T. Nakayama: On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. I. Proc. **18** (1942), 185–187.

2) H. Nakano: Stetige lineare Funktionale auf dem teilweisegeordneten Modul. Jour. Fac. Sci., Tokyo Imp. Univ. Sec. I. **4** (1942), 201–382.

3) Diese Bedingung (*) ist offenbar äquivalent mit

$$P(a \smile b) = \operatorname{Max}\{P(a), P(b)\} \quad \text{oder} \quad P(a \frown b) = \operatorname{Min}\{P(a), P(b)\}.$$

Nun sei $b>0$, $P(b)>0$. Wenn $\left(\frac{a}{b}, \mathfrak{b}\right)>\alpha$ ist, so gibt es nach der Stetigkeit des relativen Spektrums einen Projektor $[p]\in\mathfrak{b}$, damit $\left(\frac{a}{b}, \mathfrak{p}\right)>\alpha$ für jedes $\mathfrak{p}\ni[p]$ ist. Dann gilt $[p]a\geqq\alpha[p]b$ und folglich

$$P(a)=P([p]a)\geqq P(\alpha[p]b)=\alpha P(b)\,, \quad \text{d. h.} \quad \frac{P(a)}{P(b)}\geqq\alpha\,.$$

Nach Obigem kann man die Behauptung (**) leicht schliessen.

Definition 2. $\mathfrak{M}$ heisst *regulär vollständig*[1], wenn für jede Doppelfolge

$$a_{\mu,1}\geqq a_{\mu,2}\geqq\cdots,\quad \lim_{\nu\to\infty} a_{\mu,\nu}=0 \quad (\mu=1,2,\ldots)$$

stets ein Element l gibt, damit

$$l\geqq a_{\mu,\nu_\mu} \qquad (\mu=1,2,\ldots)$$

für eine passende Folge $\nu_1, \nu_2, \ldots$ besteht.

Satz 2. *Wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ stetig und vollständig über Norm ist, so ist $\mathfrak{M}$ regulär vollständig.*

Beweis. Nach der Stetigkeit von $\mathfrak{M}$ folgt aus $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_{\mu,\nu}=0$ stets

$$\lim_{\nu\to\infty}\|a_{\mu,\nu}\|=0\,.$$

Daher gibt es eine Folge $\nu_1, \nu_2, \ldots$, für welche die Reihe

$$\|a_{1,\nu_1}\|+\|a_{2,\nu_2}\|+\cdots$$

konvergent ist. Dann erhält man durch

$$l=a_{1,\nu_1}+a_{2,\nu_2}+\cdots$$

ein Element l, für das $l\geqq a_{\mu,\nu_\mu}$ $(\mu=1,2,\ldots)$ ist.

Definition 3. Ein Punkt $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{E}$ heisst *transzendent*, wenn für abzählbar unendlich viele beliebige Umgebungen $U_1, U_2, \ldots$ von $\mathfrak{p}$ der Durchschnitt $U_1U_2\ldots$ eine Umgebung von $\mathfrak{p}$ enthält.

Satz 3. *Wenn $\mathfrak{M}$ regulär vollständig ist, so ist jeder beschränkte Punkt von $\mathfrak{M}$ transzendent in $\mathfrak{E}$.*

Beweis. $\mathfrak{p}$ sei nicht transzendent. Dann gibt es eine Folge von Projektoren $[p_1]\geqq[p_2]\geqq\cdots$, $[p_\nu]\in\mathfrak{p}$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty}[p_\nu]=0$. Für jedes $[a]\in\mathfrak{p}$, $a>0$ gilt dann

1) Diese Bedingung ist schwächer als die Regularität von L. V. Kantorovitch: Lineare halbgeordnete Räume, Rec. Math. Moscou, **2** (44), 1937, 121–168. Man kann aber auch leicht beweisen: *wenn $\mathfrak{M}$ regulär vollständig ist, so ist jede konvergente Folge stets relativ gleichmässig konvergent,* d. h. für $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu=a$ gibt es ein Element l und eine Zahlenfolge $\varepsilon_1\geqq\varepsilon_2\geqq\ldots$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu=0$, für welche $|a_\nu-a|\leqq\varepsilon_\nu l$ $(\nu=1,2,\ldots)$ ist. $\mathfrak{M}$ ist aber regulär im Sinne von Kantorovitch dann und nur dann, wenn $\mathfrak{M}$ regulär vollständig und superuniversal ist.

$$\mu[p_1]a \geqq \mu[p_2]a \geqq \cdots, \lim_{\nu\to\infty} \mu[p_\nu]a = 0 \qquad (\mu=1, 2, \ldots).$$

Da $\mathfrak{M}$ regulär vollständig ist, gibt es ein Element l und eine Folge $\nu_1, \nu_2, \ldots$, damit

$$l \geqq \mu[p_{\nu_\mu}]a \qquad (\mu=1, 2, \ldots)$$

ist. Hieraus folgt

$$\left(\frac{l}{a}, \mathfrak{p}\right) \geqq \left(\frac{\mu[p_{\nu_\mu}]a}{a}, \mathfrak{p}\right) = \mu .$$

Daher muss $\left(\frac{l}{a}, \mathfrak{p}\right) = +\infty$ sein. Da a beliebig sein mag, ist $\mathfrak{p}$ kein beschränkter Punkt von $\mathfrak{M}$.

Satz 4. *Wenn $\mathfrak{M}$ superuniversal ist, so besitzt $\mathfrak{M}$ keinen transzendenten Punkt ausser isolierten Punkten in $\mathfrak{E}$.*

Beweis. Wenn $\mathfrak{p}$ kein isolierter Punkt in $\mathfrak{E}$ ist, so gilt $\prod_{[p]\in\mathfrak{p}} [p]=0$. Da $\mathfrak{M}$ superuniversal ist, gibt es eine Folge $[p_1] \geqq [p_2] \geqq \cdots$, $[p_\nu] \in \mathfrak{p}$ mit $\lim_{\nu\to\infty} [p_\nu]=0$. Daher ist $\mathfrak{p}$ kein transzendenter Punkt von $\mathfrak{M}$.

Nach Obigem folgt sofort der

Satz 5. *Wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ stetig, streng monoton und vollständig über Norm ist, so besitzt $\mathfrak{E}$ keinen beschränkten Punkt ausser isolierten Punkten.*

Satz 6. *Wenn $\mathfrak{M}$ sich durch eine Klasse von Funktionen algebraisch vollständig darstellen lässt, so findet man beschränkte Punkte von $\mathfrak{M}$ überall dicht in $\mathfrak{E}$.*

Beweis. $\mathfrak{M}$ sei isomorph zu einer Klasse von Funktionen $\{f_a(\alpha)\}$, $a \in \mathfrak{M}$. Für jedes $a(>0) \in \mathfrak{M}$ gibt es dann ein α, für das $f_a(\alpha) > 0$ ist. Setzt man $P(a)=f_a(\alpha)$, so erhält man ein positives lineares Funktional $P(a)$ auf $\mathfrak{M}$, das der Bedingung (*) genügt. Daher gibt es nach Satz 1 einen beschränkten Punkte $\mathfrak{b} \ni [a]$ von $\mathfrak{M}$. Da a beliebig sein mag, finden die beschränkten Punkte von $\mathfrak{M}$ sich überall dicht in $\mathfrak{E}$.

Nach Satz 5, 6 kann man leicht einsehen: *wenn ein L_ρ-Modul L_ρ zu einer Klasse von Funktionen isomorph ist, so ist L_ρ isometrisch zu der Klasse aller Zahlensysteme (α_ν) mit der konvergenten Reihe*

$$\|(\alpha_\nu)\|^\rho = \sum_\nu |\alpha_\nu|^\rho$$

für ein System ν.

Satz 7. *Wenn $\mathfrak{M}$ vollkommen ist, so ist jeder beschränkte Punkt von $\mathfrak{M}$ transzendent in $\mathfrak{E}$.*

Beweis. Wenn ein Punkt $\mathfrak{p}$ nicht transzendent ist, so gibt es eine Folge $[p_1] \geqq [p_2] \geqq \cdots$, $[p_\nu] \in \mathfrak{p}$ mit $\lim_{\nu\to\infty} [p_\nu]=0$. Da $\mathfrak{M}$ vollkommen ist, erhält man durch

$$l = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu([p_\nu]-[p_{\nu+1}])a \qquad ([a] \in \mathfrak{p})$$

ein Element l, für das

$$\left(\frac{l}{a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{[p_\nu]l}{a}, \mathfrak{p}\right) \geqq \nu$$

und folglich $\left(\frac{l}{a}, \mathfrak{p}\right)=+\infty$ ist. Daher ist $\mathfrak{p}$ kein beschränkter Punkt von $\mathfrak{M}$.

Jeder separable Raum besitzt offenbar keinen transzendenten Punkt ausser isolierten Punkten. Daher kann man nach Satz 1, 7 leicht einsehen: *wenn ein Hausdorffscher Raum R universal, separabel und in sich dicht ist*[1], *so besitzt der teilweisegeordnete Modul aller im erweiterten Sinne stetigen Funktionen auf R keinen algebraischen Homomorphismus zu den reellen Zahlen.*

Ich habe kürzlich von S. Kakutani gehört, dass er bewiesen hat: wenn ein Limes beschränkter Zahlenfolgen $\mathrm{Lim}\, \alpha_\nu$ wie folgt definiert ist: 1) $\mathrm{Lim}\,(\alpha\alpha_\nu+\beta\beta_\nu)=\alpha\, \mathrm{Lim}\, \alpha_\nu+\beta\, \mathrm{Lim}\, \beta_\nu$, 2) $\mathrm{Lim}\, \alpha_\nu=\mathrm{Lim}\, \alpha_{\nu+1}$, 3) $\mathrm{Lim}\, \alpha_\nu \geqq 0$ für $\alpha_\nu \geqq 0$, 4) $\mathrm{Lim}\, 1=1$, 5) $\mathrm{Lim}\, \alpha_\nu\beta_\nu=\mathrm{Lim}\, \alpha_\nu\, \mathrm{Lim}\, \beta_\nu$, so ist für einen nicht isolierten Punkt $\mathfrak{p}$ im universal erweiterten bikompakten Raum von isolierten Punkten $1, 2, \dots$ und die stetige Erweiterung $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)(\mathfrak{p})$ jeder beschränkten Funktion $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ auf $1, 2, \dots$ stets

$$\mathrm{Lim}\, \alpha_\nu=(\alpha_1, \alpha_2, \dots)(\mathfrak{p})\,.$$

Dieser Satz folgt sofort aus Satz 1. Hier wollen wir aber unmittelbar beweisen den allgemeinen

Satz 8. $\mathfrak{F}$ sei der Modul aller stetigen Funktionen $f(\mathfrak{p})$ auf einem bikompakten Hausdorffschen Raum R. Wenn ein positives lineares Funktional $P(f)$ auf $\mathfrak{F}$ den Bedingungen $P(1)=1$ und

$$(**) \qquad \mathrm{Min}\,\{P(f),\ P(g)\}=0 \quad \textit{für} \quad f\frown g=0^{2)}$$

genügt, so gibt es einen einzigen Punkt $\mathfrak{p}_0$ in R, für den

$$P(f)=f(\mathfrak{p}_0)$$

ist.

Beweis. Da R bikompakt ist, kann man leicht beweisen: es gibt einen derartigen Punkt $\mathfrak{p}_0$ in R, dass für jede stetige Funktion $f(\mathfrak{p})$ mit $f(\mathfrak{p}_0)=1$, $f(\mathfrak{p})\geqq 0$ in R stets $P(f)>0$ ist, und sogar ist $\mathfrak{p}_0$ nach (**) eindeutig bestimmt. Da R normal ist, gilt dann nach (**) $P(f)=0$, wenn $f(\mathfrak{p})=0$ in einer Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ besteht.

Nun sei $f(\mathfrak{p})$ eine beliebige stetige Funktion auf R. Für jede positive Zahl ε gibt es eine Umgebung U von $\mathfrak{p}_0$, worin $|f(\mathfrak{p})-f(\mathfrak{p}_0)|<\varepsilon$ besteht. V sei auch eine Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ mit $\bar{V}\subset U$. Da R normal sein soll, gibt es eine stetige Funktion $g(\mathfrak{p})$ mit $|g(\mathfrak{p})|<\varepsilon$ in U und

$$g(\mathfrak{p})=\begin{cases} f(\mathfrak{p})-f(\mathfrak{p}_0) & \text{in} \quad R-U \\ 0 & \text{in} \quad \bar{V} \end{cases}$$

Dann gilt $f(\mathfrak{p}_0)+2\varepsilon \geqq f(\mathfrak{p})-g(\mathfrak{p}) \geqq f(\mathfrak{p}_0)-2\varepsilon$ in R und folglich

---

1) Der von Nakayama gegebene Raum ist ein solcher Raum, Vgl. 1), nämlich der Eigenraum des monoton separablen teilweisegeordneten Moduls, den man durch Schnitte aus allen stetigen Funktionen im abgeschlossenen Intervall [0, 1] erhält.

2) Diese Bedingung (**) ist offenbar schwächer als $P(fg)=P(f)P(g)$. Vgl. weiter 3).

$$f(\mathfrak{p}_0)+2\varepsilon \geqq P(f-g) \geqq f(\mathfrak{p}_0)-2\varepsilon .$$

Da andererseits nach Obigem $P(g)=0$ ist, gilt $|P(f)-f(\mathfrak{p}_0)| \leqq 2\varepsilon$. Daher erhält man $P(f)=f(\mathfrak{p}_0)$, denn ε mag beliebig klein sein.

Bemerkung 1. Nun betrachten wir ein derartiges Funktional $P(\neq 0)$ auf $\mathfrak{M}$, dass $\infty \geqq P(a) \geqq 0$ für $a(\geqq 0) \in \mathfrak{M}$ und $P(\alpha a+\beta b)=\alpha P(a)+\beta P(b)$ ist, wenn die rechte Seite einen Sinn hat. Wenn man Satz 1 für solches Funktional P betrachtet, so kann man nach dem Beweis ohne weiters schliessen, dass es einen einzigen Punkt $\mathfrak{p}_0$ in $\mathfrak{E}$ gibt, damit (**) für $0 < P(b) < +\infty$ besteht. Hierbei ist $\mathfrak{p}_0$ aber nicht immer ein beschränkter Punkt von $\mathfrak{M}$.

Bemerkung 2. Wenn $\mathfrak{p}$ ein transzendenter Punkt in $\mathfrak{E}$ ist, so ist das relative Spektrum $\left(\frac{a}{b}, \mathfrak{p}\right)$ $([b] \in \mathfrak{p})$ endlich für jedes a und zwar stetig als ein lineares Funktional von a. Umgekehrt, wenn das relative Spektrum $\left(\frac{a}{b}, \mathfrak{p}\right)$ als ein lineares Funktional von a stetig ist, so ist $\mathfrak{p}$ ein transzendenter Punkt in $\mathfrak{E}$.