59. *Sur une constante de la transformation conforme.*

Par Kinjiro KUNUGUI.

Institut de Mathématique, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., June 12, 1943.)

M. Teichmüller a démontré le théorème suivant[1]:

Soit $\zeta=\zeta(w)$ une fonction régulière dans le cercle d'unité : $|w|<1$, et supposons qu'elle soit univalente dans le même cercle. Soit, encore, γ un segment recitligne qui est transversale[2] du domaine transformé du cercle $|w|<1$ par la transformation $\zeta=\zeta(w)$. Nous avons alors

$$\int_\gamma \log\frac{1}{|w|}\,|d\zeta|\leq cl$$

où l désigne la longueur de γ et c une constante indépendante de la fonction $\zeta(w)$.

M. Teichmüller a démontré qu'on peut poser

$$c=2+\max\left\{\log\frac{1}{\delta},\ \log\frac{2(1+\delta)^3}{(1-\delta)^4}\right\},\qquad 0<\delta<1\,,$$

et a conjecturé d'ailleurs que la meilleur valeur de c sera atteinte par la fonction :

$$\zeta=\frac{w}{1+w^2}$$

qui est univalente dans $|w|<1$, et qui transforme la partie de l'axe réelle située dans le cercle d'unité: $-1\leq Rw\leq +1$, $Jw=0$, dans le segment: $-\frac{1}{2}\leq R\zeta\leq +\frac{1}{2}$, $J\zeta=0$, et par suite, on aura

$$c=2\int_0^{\frac{1}{2}}\log\frac{1+\sqrt{1-4\zeta^2}}{2\zeta}d\zeta=\frac{\pi}{2}\,.$$

Le but de cette Note est de montrer qu'*on peut poser* $c=\frac{\pi}{2}$, *de sorte que la conjecture de M. Teichmüller se réalise.*

Démonstration. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que γ est le segment: $-\frac{1}{2}\leq R\zeta\leq +\frac{1}{2}$, $J\zeta=0$. En effet, sinon, nous n'avons qu'à poser

$$\zeta^*=\frac{1}{(\zeta_1-\zeta_2)}\left(\zeta-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\right),$$

---

1) O. Teichmüller: Eine Umkehrung des zweiten Hauptsatzes der Wertverteilungslehre, Deutsche Mathematik, Jg 2, 1937, pp. 96–107.

2) c. à d. un segment rectiligne contenu dans le domaine sauf deux extrémités qui sont situées sur la frontière.

où ζ_1, ζ_2 désignent deux extrémités du segment γ. Soit w_0 un point quelconque du cercle d'unité, et considérons la fonction suivante :

$$f(w)=\frac{\{1-2\zeta(w_0)\}^2}{(1-|w_0|^2)\zeta'(w_0)}\cdot\frac{\zeta\left(\frac{w+w_0}{\overline{w}_0w+1}\right)}{1-2\zeta\left(\frac{w+w_0}{\overline{w}_0w+1}\right)}-\frac{\{1-2\zeta(w_0)\}\zeta(w_0)}{(1-|w_0|^2)\zeta'(w_0)}.$$

Comme $\zeta(w)$ est univaleute et $\zeta(w)\neq 1/2$, $f(w)$ est également *univalente* dans le cercle d'unité : $|w|<1$. On a d'ailleurs

$$f(0)=0\,,\qquad f'(0)=1\,.$$

D'autre part, puisque $\zeta(w)$, $|w|<1$ n'est jamais égale à $-1/2$, nous avons, d'après un théorème fameux de M. Koebe,

$$\frac{1}{4}\leq\frac{|1-2\zeta(w_0)|}{(1-|w_0|^2)|\zeta'(w_0)|}\left|\frac{1-2\zeta(w_0)}{4}+\zeta(w_0)\right|.$$

En posant $\zeta=\zeta(w_0)$, $w=w_0$, nous pouvons l'écrire

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}\geq\frac{|d\zeta|}{|1-4\zeta^2|}\,. \tag{1}$$

Or, la courbe C du plan w dont l'image par la transformation $\zeta(w)$ coïncide avec γ est située dans le cercle d'unité : $|w|<1$. Soit W un point quelconque de la courbe C et considérons le rayon du cercle d'unité : $|w|<1$ qui passe par W. La partie de ce rayon située entre $w=0$ et $w=W$ sera désignée par $R(W)$. Posons $\zeta_0=\zeta(0)$. L'image Γ du segment $R(W)$ par la transformation $\zeta=\zeta(w)$ part du point ζ_0 et se termine en un point ζ situé sur le segment : $-\frac{1}{2}\leq R\zeta\leq+\frac{1}{2}$, $J\zeta=0$. Intégrons l'inégalité (1) suivant la courbe Γ. Nous avons alors $|dw|=d|w|$, et par suite

$$\int_0^{|W|}\frac{dr}{1-r^2}\geq\int_\Gamma\frac{|d\zeta|}{|1-4\zeta^2|}\geq\left|\int_\Gamma\frac{d\zeta}{1-4\zeta^2}\right|,$$

c. à d.

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+|W|}{1-|W|}\geq\frac{1}{4}\left|\log\frac{1+2\zeta}{1-2\zeta}\cdot\frac{1-2\zeta_0}{1+2\zeta_0}\right|\geq\frac{1}{4}\left|\log\left|\frac{1+2\zeta}{1-2\zeta}\cdot\frac{1-2\zeta_0}{1+2\zeta_0}\right|\right|,$$

ou en posant $z=2\zeta$, $z_0=2\zeta_0$

$$2\log\frac{1+|W|}{1-|W|}\geq\left|\log\left|\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{1-z_0}{1+z_0}\right|\right|.$$

Désignons par z_0^* le nombre situé dans le segment : $+1\leq Rz\leq+1$, $Jz=0$, satisfaisant à l'équation :

$$\frac{1-z_0^*}{1+z_0^*}=\left|\frac{1-z_0}{1+z_0}\right|.$$

Désignons encore par S_1 et S_2 les deux segments resp.

$$S_1:\ z_0^* \leq Rz \leq +1, \quad Jz=0; \qquad S_2:\ -1 \leq Rz \leq z_0^*, \quad Jz=0.$$

Pour tous les points z de S_1, nous avons $|(1+z)(1-z_0)/(1-z)(1+z_0)|>1$, et par suite

$$\text{(2)} \qquad \left(\frac{1+|W|}{1-|W|}\right)^2 \geq \left|\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{1-z_0}{1+z_0}\right| = \frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{1-z_0^*}{1+z_0^*}.$$

Pour tous les points z de S_2, nous avons $|(1+z)(1-z_0)/(1-z)(1+z_0)|<1$, et par suite

$$\text{(3)} \qquad \left(\frac{1+|W|}{1-|W|}\right)^2 \geq \left|\frac{1-z}{1+z}\cdot\frac{1+z_0}{1-z_0}\right| = \frac{1-z}{1+z}\cdot\frac{1+z_0^*}{1-z_0^*}.$$

Pour les valeurs z de S_1, transformons la variable z par

$$\text{(4)} \qquad \varphi = \frac{z-z_0^*}{1-zz_0^*} \text{ ou } \quad z = \frac{\varphi+z_0^*}{1+\varphi z_0^*}.$$

D'autre part, comme nous pouvons écrire

$$\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{1-z_0^*}{1+z_0^*} = (-1,\ +1,\ z,\ z_0^*)$$

et, que la transformation linéaire laisse invariant le rapport anharmonique, nous avons

$$\left(\frac{1+|W|}{1-|W|}\right)^2 \geq (-1,\ +1,\ \varphi,\ 0) = \frac{1+\varphi}{1-\varphi}, \qquad 0<\varphi<1.$$

Alors, la fonction $\left(\frac{1+|W|}{1-|W|}\right)^2$ étant monotone croissante, nous avons

$$\text{(5)} \qquad |W| \geq \frac{\varphi}{1+\sqrt{1-\varphi^2}}.$$

Pour les valeurs z de S_2, transformons la variable z zur

$$\text{(6)} \qquad \varphi = \frac{z_0^*-z}{1-zz_0^*} \quad \text{ou} \quad z = \frac{z_0^*-\varphi}{1-\varphi z_0^*}.$$

Nous avons alors

$$\left(\frac{1+|W|}{1-|W|}\right)^2 \geq (-1,+1,-z,-z_0^*) = (+1,-1,-\varphi,0) = \frac{1+\varphi}{1-\varphi}, \quad 0<\varphi<1.$$

Par suite, ici encore, nous avons l'inégalite (5).

Si l'on pose $\zeta_0^* = z_0^*/2$, les formules (4), (5) et (6) nous donnent alors les inégalités suivantes:

$$\int_{\zeta_0^*}^{\frac{1}{2}} \log\frac{1}{|W|}d\zeta \leq \int_{\zeta_0^*}^{\frac{1}{2}} \log\frac{1+\sqrt{1-\varphi^2}}{\varphi}d\zeta$$

$$= \int_{\zeta_0^*}^{\frac{1}{2}} \log\frac{1-4\zeta\zeta_0^*+\sqrt{(1-4\zeta^2)(1-4\zeta_0^{*2})}}{2(\zeta-\zeta_0^*)}d\xi,$$

et

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\zeta_0^*} \log \frac{1}{|W|} d\zeta \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\zeta_0^*} \log \frac{1+\sqrt{1-\varphi^2}}{\varphi} d\zeta$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\zeta_0^*} \log \frac{1-4\zeta\zeta_0^* + \sqrt{(1-4\zeta^2)(1-4\zeta_0^{*2})}}{2(\zeta_0^*-\zeta)} d\zeta .$$

Par conséquent, nous avons

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \log \frac{1}{|W|} d\zeta \leq \int_{\zeta_0^*}^{\frac{1}{2}} \log \frac{1}{\zeta-\zeta_0^*} d\zeta + \int_{-\frac{1}{2}}^{\zeta_0^*} \log \frac{1}{\zeta_0^*-\zeta} d\zeta$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \log \frac{1-4\zeta\zeta_0^* + \sqrt{(1-4\zeta^2)(1-4\zeta_0^{*2})}}{2} d\zeta$$

$$\leq -\int_{\zeta_0^*}^{\frac{1}{2}} \log (\zeta-\zeta_0^*) d\zeta - \int_{-\frac{1}{2}}^{\zeta_0^*} \log (\zeta_0^*-\zeta) d\zeta$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \log \frac{1-4\zeta\zeta_0^* + \sqrt{1-4\zeta^2}}{2} d\zeta .$$

Or, d'une part, l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique nous donne

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \log \frac{1-4\zeta\zeta_0^* + \sqrt{1-4\zeta^2}}{2} d\zeta = \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{1-4\zeta\zeta_0^* + \sqrt{1-4\zeta^2}}{2} d\zeta$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{1+4\zeta\zeta_0^* + \sqrt{1-4\zeta^2}}{2} d\zeta \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{1+\sqrt{1-4\zeta^2}}{2} d\zeta ,$$

et d'autre part, en posant

$$A = \int_{\zeta_0^*}^{\frac{1}{2}} \log (\zeta-\zeta_0^*) d\zeta + \int_{-\frac{1}{2}}^{\zeta_0^*} \log (\zeta_0^*-\zeta) d\zeta$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\zeta_0^*\right) \log \left(\frac{1}{2}-\zeta_0^*\right) + \left(\frac{1}{2}+\zeta_0^*\right) \log \left(\frac{1}{2}+\zeta_0^*\right) - 1 ,$$

nous avons

$$\zeta_0^* \frac{dA}{d\zeta_0^*} = \zeta_0^* \log \frac{1+2\zeta_0^*}{1-2\zeta_0^*} \geq 0 .$$

Celui-ci entraîne

$$A \geq \int_0^{\frac{1}{2}} \log \zeta d\zeta + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \log (-\zeta) d\zeta = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \log \zeta d\zeta ,$$

et enfin nous avons

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \log \frac{1}{|W|} d\zeta \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{1+\sqrt{1-4\zeta^2}}{2\zeta} d\zeta = \frac{\pi}{2} ,$$

c. q. f. d.