

92. Einige Anwendungen der Verzerrungssätze auf Hydrodynamik.

Von Yūsaku KOMATU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1943.)

1. Wir betrachten zunächst einen als unendlich lang vorausgesetzten Zylinder, welcher senkrecht zu seiner Achse geradlinig mit der konstanten Geschwindigkeit U durch eine ideale inkompressible Flüssigkeit bewegt wird. Da es sich nun um ein ebenes (zweidimensionales) Problem handelt und die Strömung in Bezug auf das als starr mit dem Zylinder verbunden angesehene Koordinatensystem stationär und wirbelfrei vorausgesetzt werden soll, können die Methoden der konformen Abbildung durch analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen herangezogen werden. Wir betrachten nun das Strömungsbild in einer zur Zylinderachse senkrechten Ebene, die wir zur $z = x + iy$ -Ebene wählen, und nehmen an, daß die ebene Strömung relativ zur diesen stattfindet, die im Unendlichen in eine Parallelströmung mit der konstanten Geschwindigkeit übergeht. Das Zylinderprofil in der z -Ebene sei ein von einer einfach geschlossenen Randkurve C begrenzter Bereich G , dessen Durchmesser und Flächeninhalt wir mit δ bzw. A bezeichnen sollen. Für die Geschwindigkeitskomponenten $u(x, y)$ und $v(x, y)$ solcher Strömung gelten bekanntlich wegen der Annahme von Inkompressibilität und Wirbelfreiheit die beiden Gleichungen, d. h. Kontinuitäts- und Wirbelfreiheitsbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Daher existieren hierbei eine Stromfunktion $\psi(x, y)$ und ein Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ derart, daß zugleich die Gleichungen

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{und} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

erfüllt werden. Diese stellen gerade die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Analytizität derjenigen Funktion

$$w = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

dar, die das komplexe Geschwindigkeitspotential (die komplexe Stromfunktion) bedeutet. Die Größe und Neigung der Strömung im Punkte $z = x + iy$ seien $q(x, y)$ bzw. $-\chi(x, y)$, d. h. es sei

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = qe^{i\chi};$$

$$q(x, y) = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \chi(x, y) = \arg \frac{dw}{dz} = -\arctg \frac{v}{u}$$

Die Anblaserichtung schlieÙe mit der positiv reellen Achse den Winkel $-a$ ein, d. h. die Anblasegeschwindigkeit sei $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\infty} = Ue^{ia}$.

Das komplexe Geschwindigkeitspotential für einen Kreis in der ζ -Ebene um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt mit dem Halbmesser a läÙt sich bekanntlich durch die Funktion

$$\omega(\zeta) = U\left(e^{ia}\zeta + \frac{a^2e^{-ia}}{\zeta}\right)$$

angeben. Sie gibt aber noch nicht die allgemeinste Strömung um den Kreis. Diese wird vielmehr erhalten, wenn man zu ihr noch eine Zirkulationsströmung hinzufügt:

$$\omega(\zeta) = U\left(e^{ia}\zeta + \frac{a^2e^{-ia}}{\zeta}\right) + \frac{J}{2\pi i} \lg \frac{\zeta}{a};$$

hierbei darf die konstante Zirkulation J beliebige reelle Werte annehmen. Die komplexe Geschwindigkeit lautet hier also

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = U\left(e^{ia} - \frac{a^2e^{-ia}}{\zeta^2}\right) + \frac{J}{2\pi i\zeta}.$$

Dementsprechend können und werden wir im folgenden eine allgemeinere Strömung um das Zylinderprofil betrachten, die eine Zirkulationsströmung hinzugefügt wird.

2. Bezeichnet man nun mit a den transfiniten Durchmesser des beschränkten abgeschlossenen Bereichs $G+C$, so läÙt sich das Äußere von C auf das Kreisäußere $|\zeta| > a$ so abbilden, daß die Abbildungsfunktion in der Umgebung von $z = \infty$ die Gestalt

$$\zeta = \zeta(z) = z + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

besitzt. Wählt man noch insbesondere den konformen Schwerpunkt $-c_0$ des Zylinderprofils als Koordinatenursprung der z -Ebene, dann hat die Abbildungsfunktion ferner die Form

$$(1) \quad \zeta(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

Das komplexe Geschwindigkeitspotential für das Äußere von C wird dann in diesem Falle durch die Funktion

$$(2) \quad w = f(z) = \omega(\zeta(z)) = U\left(e^{ia}\zeta(z) + \frac{a^2e^{-ia}}{\zeta(z)}\right) + \frac{J}{2\pi i} \lg \frac{\zeta(z)}{a}$$

geliefert, wobei J auch für das Zylinderprofil wieder die Zirkulation bedeutet. Daher folgt so daraus

$$q \equiv \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| U\left(e^{ia} - \frac{a^2e^{-ia}}{\zeta^2}\right) + \frac{J}{2\pi i\zeta} \right| \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|$$

und

$$\chi \equiv \arg \frac{dw}{dz} = \arg \left(U \left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta^2} \right) + \frac{J}{2\pi i \zeta} \right) - \arg \frac{dz}{d\zeta},$$

worin selbstverständlich die Funktion

$$z(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\zeta^n}$$

die Umkehrfunktion von (1) bedeutet. Insbesondere ist also

$$\gamma_1 + c_1 = 0.$$

Nun wollen wir Abschätzungen für die Größe q und $\chi - \alpha$ ($|\chi - \alpha| \leq \pi$) herleiten. Zunächst erhält man für $|\zeta| > a$ ohne weiteres die Ungleichungen

$$\frac{U \left(1 - \frac{a^2}{|\zeta|^2} \right) - \frac{|J|}{2\pi |\zeta|}}{\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|} \leq q \leq \frac{U \left(1 + \frac{a^2}{|\zeta|^2} \right) + \frac{|J|}{2\pi |\zeta|}}{\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|}$$

und

$$|\chi - \alpha| \leq \left| \arg \frac{dz}{d\zeta} \right| + \arcsin^* \left(\frac{a^2}{|\zeta|^2} + \frac{|J|}{2\pi U |\zeta|} \right),$$

wobei einfacherweise gesetzt wird¹⁾

$$\arcsin^* \varrho = \begin{cases} \arcsin \varrho & \text{für } |\varrho| \leq 1, \\ \pi & \text{für } |\varrho| > 1. \end{cases}$$

Für die Familie der schlichten Funktionen $\{z(\zeta)\}$ in $|\zeta| > a$ mit der Normierung $z(\infty) = \infty$ und $z'(\infty) = 1$ gilt nun im allgemeinen ein Grötzsch-Grunskyscher Verzerrungssatz²⁾, welcher lautet

$$\left| \lg \frac{dz}{d\zeta} \right| \leq \lg \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - a^2} \quad (|\zeta| > a),$$

und woraus sich insbesondere die beiden folgenden Ungleichungen ergeben:

$$\frac{|\zeta|^2 - a^2}{|\zeta|^2} \leq \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \leq \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - a^2} \quad \text{und} \quad \left| \arg \frac{dz}{d\zeta} \right| \leq \lg \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - a^2},$$

Mit Hilfe dieser Ungleichungen erhält man also die Abschätzungen³⁾

1) Im Falle $J=0$ kann lauter $\arcsin \frac{a^2}{|\zeta|^2}$ setzen; denn dabei ist stet $a < |\zeta|$.

2) Vgl. H. Grötzsch, Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. III, Leipziger Berichte **83** (1931), 283-297; H. Grunsky, Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche, Schriften math. Sem. u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin **1** (1932-3), 95-140.

3) Die erste Abschätzungen von ihnen für den Fall $J=0$ wurde schon Ph. Mises und K. Löwner für denselben Zweck benutzt; Vgl. ihre Arbeit: Eine Anwendung des Koebschen Verzerrungssatzes auf ein Problem der Hydrodynamik, Math. Zeitschr. **3** (1919), 78-86.

$$\begin{aligned} \left(U \left(1 - \frac{a^2}{|\zeta|^2} \right) - \frac{|J|}{2\pi|\zeta|} \left(1 - \frac{a^2}{|\zeta|^2} \right) \right) &\leq q \\ &\leq \left(U \left(1 + \frac{a^2}{|\zeta|^2} \right) + \frac{|J|}{2\pi|\zeta|} \right) \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - a^2}, \\ |\chi - \alpha| &\leq \lg \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - a^2} + \arcsin^* \left(\frac{a^2}{|\zeta|^2} + \frac{|J|}{2\pi U|\zeta|} \right). \end{aligned}$$

Setzt man hierbei weiter

$$(3) \quad J = 4\pi a U k,$$

so lassen sie sich auch folgendermaßen schreiben :

$$\begin{aligned} U \left(1 - 2|k| \frac{a}{|\zeta|} - \frac{a^2}{|\zeta|^2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{|\zeta|^2} \right) &\leq q \\ &\leq U \left(1 + 2|k| \frac{a}{|\zeta|} + \frac{a^2}{|\zeta|^2} \right) \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - a^2}, \\ |\chi| &\leq \lg \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - a^2} + \arcsin^* \left(\frac{a^2}{|\zeta|^2} + 2|k| \frac{a}{|\zeta|} \right). \end{aligned}$$

3. Da diese Grenzen sämtlich, abgesehen von $|k|$, nur vom Verhältnis $\frac{a}{|\zeta|}$ und sogar monoton abhängen, so liegt es nahe, zuerst eine

Abschätzung für $\frac{a}{|\zeta|}$ zu suchen. Zwischen dem Radius a des Bildkreises und dem Durchmesser δ von G besteht aber zunächst eine Ungleichung nach Landau und Toeplitz⁴⁾, die lautet

$$(4) \quad 2a \leq \delta,$$

und ferner nach Löwner⁵⁾ ist der Abstand des Bildpunktes $z(\zeta)$ des Punktes ζ von der Kurve C bei jeder Abbildung betrachteter Art stets höchstens gleich $|\zeta|$, d. h. wenn man mit l den Abstand zwischen dem Punkte $z = z(\zeta)$ und der Kurve C bezeichnet, so gilt

$$|\zeta| \geq l.$$

Man erhält deshalb eine Abschätzung für $\frac{a}{|\zeta|}$, nämlich

$$\frac{a}{|\zeta|} \leq \frac{\delta}{2l}$$

und schließlich ergeben sich deswegen die Abschätzungen

4) E. Landau u. O. Toeplitz, Über die größte Schwankung einer analytischen Funktion in einem Kreise, Arch. f. Math. u. Phys. (3) 11 (1906), 302-307.

5) K. Löwner, Über Extremumsatz bei der konformen Abbildung des Äußeren des Einheitskreises, Math. Zeitschr. 3 (1919), 65-77.

$$(5) \quad \begin{cases} \left(1 - |k| \lambda - \frac{\lambda^2}{4}\right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) \leq \frac{q}{U} \leq \left(1 + |k| \lambda + \frac{\lambda^2}{4}\right) \frac{4}{4 - \lambda^2}, \\ |z - a| \leq \lg \frac{4}{4 - \lambda^2} + \arcsin^* \left(|k| \lambda + \frac{\lambda^2}{4}\right), \end{cases}$$

worin der Kürze halber $\lambda = \frac{\delta}{l} = \frac{\text{Durchmesser von } C}{\text{Abstand zw. } z \text{ und } C}$ (< 2) gesetzt wird.

Wenn man statt des Ansatzes (3) aufs neue

$$J = 2\pi\delta U h$$

setzt, so bleiben noch die gefundenen Abschätzungen überhaupt gelten, wie man sofort bestätigen werden kann, falls darin k durch h ersetzt wird. Da mit $2a \leq \delta$ auch die Ungleichung $\delta \leq 4a$ besteht⁶⁾, so folgt

$$2|h| \geq \left| \frac{J}{4\pi a U} \right| \geq |h|.$$

Daraus schließt man, daß, falls $|h| > 1$ ist, es einen Staupunkt innerhalb der Strömung gibt, der zugleich Doppelpunkt einer Stromlinie ist, und daß, falls $|h| < \frac{1}{2}$ ist, es zwei Staupunkte auf dem Profil gibt⁷⁾.

Beim speziellen Falle $J=0$ sollen hier die Grenzen in (5) für einige Werte von λ tabellarisch dargestellt werden:

λ	$\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right)^2$	$\frac{4 + \lambda^2}{4 - \lambda^2}$	$\lg \frac{4}{4 - \lambda^2} + \arcsin \frac{\lambda^2}{4}$
1/2	0,3789	1,1334	7° 16' 51''
1/5	0,9801	1,0203	1° 08' 56''
1/10	0,99500	1,00502	17' 12''
1/20	0,99878	1,00126	4' 19''
1/50	0,99980	1,00021	42''

4. Die Dichte der betreffenden Flüssigkeit sei ρ und die übrigen Bezeichnungen bleiben ebenfalls dieselben wie früher. Um nun die resultierende komplexe Kraft $P - iQ$, die auf den Körper ausgeübt wird, und ihr Moment M in bezug auf den Koordinatenursprung zu berechnen, kann man die Blasius'schen Formeln benutzen, die bekanntlich lauten⁸⁾:

$$P - iQ = \frac{1}{2} i\rho \int_r \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \quad M = -\frac{1}{2} \rho \Re \int_r z \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz.$$

6) Vgl. L. Bieberbach, Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung, *Math. Annalen* **77** (1916), 153-172.

7) Vgl. z. B. Ph. Frank und R. v. Mises, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, 2. Bd., 2. Aufl., Braunschweig, (1935), S. 405-407.

8) Vgl. etwa loc. cit. 7), S. 410-411; H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6. ed., Cambridge, (1932), p. 91-92.

Im hier betrachteten Falle ist die Funktion $\frac{dw}{dz}$ natürlich überall außerhalb C eindeutig und regulär analytisch, und also lassen wir den Integrationsweg Γ als eine beliebige, den Bereich G umgebende, einfach geschlossene Kurve nehmen. Setzt man (1) in (2) ein und dann differenziert man, so ergibt sich

$$\frac{dw}{dz} = Ue^{ia} + \frac{J}{2\pi i} \frac{1}{z} - U(c_1 e^{ia} + a^2 e^{-ia}) \frac{1}{z^2} + \dots$$

Also erhält man durch Berechnung der Residuen, unter Berücksichtigung von $c_1 = -r_1$,

$$P - iQ = \frac{1}{2} i \rho 2\pi i \frac{U J e^{ia}}{\pi i} = i \rho U J e^{ia},$$

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2} \rho \Re 2\pi i \left(-\frac{J^2}{4\pi^2} - 2U^2(c_1 e^{2ia} + a^2) \right) = 2\pi \rho U^2 \Re(i c_1 e^{2ia}) \\ &= -2\pi \rho U^2 \Im(c_1 e^{2ia}) = 2\pi \rho U^2 \Im(r_1 e^{2ia}). \end{aligned}$$

Um nun die Größe $\Im(r_1 e^{2ia})$ abzuschätzen, bemerke man zuerst, daß das Flächeninhalt $A(r)$ desjenigen Bereichs, welcher durch die Bildkurve von $|\zeta| = r$ ($r > a$) bei der oben genannten Abbildung $z = z(\zeta)$ begrenzt wird, stets größer als A beträgt:

$$A(r) > A \quad (r > a).$$

Das Flächeninhalt $A(r)$ läßt sich aber wie üblich durch die Entwicklungskoeffizienten der Abbildungsfunktion

$$z(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\zeta^n}$$

explizit darstellen⁹⁾, nämlich

$$A(r) = \pi r^2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |\gamma_n|^2}{r^{2n}}.$$

Demgemäß folgt insbesondere die Ungleichung

$$\pi r^2 - \pi \frac{|\gamma_1|^2}{r^2} \geq A(r) > A.$$

Da sie für jedes r ($r > a$) gilt, erhält man daraus weiter

$$\pi a^2 - \pi \frac{|\gamma_1|^2}{a^2} \geq A, \quad \text{also} \quad a \sqrt{a^2 - \frac{A}{\pi}} \geq |\gamma_1| \geq |\Im(r_1 e^{2ia})|,$$

und daher ergibt sich

$$|M| = 2\pi \rho U^2 |\Im(r_1 e^{2ia})| \leq 2\pi \rho U^2 a \sqrt{a^2 - \frac{A}{\pi}}$$

9) Vgl. dazu z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Bd., 2. Aufl., Leipzig u. Berlin, (1931), S. 73.

Wenn man hier wieder die Ungleichung (4) benutzt, so *gelangt man schließlich zur Abschätzung*

$$|M| \leq \pi \rho U^2 \delta \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \frac{A}{\pi}},$$

woraus man insbesondere erkennt, daß unabhängig von A stets die Ungleichung

$$|M| \leq \frac{1}{2} \pi \rho U^2 \delta^2$$

gilt.

5. Für die Familie derjenigen schlichten Funktionen $\{w(z)\}$ mit der Normierung im unendlich fernen Punkte $w(\infty) = \infty$, $w'(\infty) = 1$:

$$w(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n},$$

welcher einen gegebenen, den Punkt $z = \infty$ enthaltenden, beliebig vielfach zusammenhängenden Bereich B mit der Begrenzung C auf einen sogenannten Parallelschlitzbereich, d. h. auf einen längs der zur reellen Achse parallelen Strecken (evt. Punkte) aufgeschlitzten Bereich, abbildet, ist die Abschätzung der Größe $\Re b_1$ von wichtiger Bedeutung. De Possel¹⁰⁾ bemerkte schon die Ungleichung

$$\Re b_1 \geq 0$$

und benutzte sie als fundamentale Tatsache für seine Theorie der Schlitzabbildungen. Neuerdings hat Prof. Tsuji¹¹⁾ sie in die Ungleichung

$$(6) \quad \Re b_1 \geq \frac{A}{2\pi}$$

verschärft, worin A das Flächeninhalt (das zweidimensionale Maß) der zu B komplementären Menge $G+C$ bedeutet.

Beschränken wir uns jetzt auf den Fall, wo es sich um den *einfach zusammenhängenden* Bereich B handelt, so kann eine noch schärfere Abschätzung einfach mittels der oben benutzten Methode hergeleitet werden. Wenn man frühere Bezeichnungen weiter benutzen bleibt, beträgt die Länge des Schlitzes in der w -Ebene gerade $4a$, da der transfinite Durchmesser von $G+C$ gleich a ist. Der Bildparallelschlitzbereich in der w -Ebene läßt sich also weiter durch eine Funktion von der Form

$$w = \zeta + a + \frac{a^2}{\zeta}$$

auf das Kreisäußere $|\zeta| > a$ abbilden. Setzt man diese beiden Abbildungen zusammen, so entsteht und bildet die Funktion

10) R. de Possel, Zum Parallelschlitztheorem unendlich vielfach zusammenhängender Gebiete, Göttinger Nachrichten (1931), 192-202.

11) M. Tsuji, Theory of conformal mapping of multiply connected domain, Japanese Journ. of Math. 18 (1943), 759-775.

$$z = w - b_0 - \frac{b_1}{w} + \dots = \zeta + a - b_0 + \frac{a^2 - b_1}{\zeta} + \dots$$

das Kreisäußere $|\zeta| > a$ schlicht auf B ab, und also erkennt man nach dem oben benutzten Verfahren des Flächensatzes, daß die Ungleichung

$$\pi a^2 - \pi \frac{|a^2 - b_1|^2}{a^2} \geq A$$

gilt. Dies kann auch in die Form

$$\Re b_1 - \frac{|b_1|^2}{2a^2} \geq \frac{A}{2\pi}$$

umgeschrieben werden. Die Ungleichung (6) ist also in unsrem Falle zwar eine unmittelbare Folgerung aus dieser, aber sogar zieht diese nach sich

$$\Re b_1 - \frac{(\Re b_1)^2}{2a^2} \geq \frac{A}{2\pi}$$

Hierbei kann man die Größe a beispielsweise mittels (4) durch $\frac{\delta}{2}$ ersetzen und sodann *erhält man schließlich die Abschätzung*

$$\frac{A}{\pi} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4A}{\pi\delta^2}}} \leq \Re b_1 \leq \frac{A}{\pi} \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4A}{\pi\delta^2}}}$$

Nach der Herleitungsweise sieht man sofort, daß die Gleichheit in ihr beiderseits dann und nur dann gilt, wenn G eine Kreisfläche mit dem Halbmesser a ist und also die Beziehungen

$$\delta = 2a, \quad A = \pi a^2 = \frac{\pi\delta^2}{4}$$

gelten. Die Abbildungsfunktion besitzt dabei die Form

$$w = z + b_0 + \frac{b_1}{z} \quad \text{mit} \quad b_1 = a^2.$$

Zum Schluß bemerke man noch, wie fast sofort bestätigt werden kann, daß die eben gefundene Abschätzung für $\Re b_1$ auch für $|b_1|$ ebenfalls gelten bleibt.