105. Über die Schreiersche Erweiterungstheorie.

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1943.)

Es seien $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}$ zwei Gruppen. Eine Gruppe $\mathfrak{A}$ heisst bekanntlich eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A}$ die Gruppe $\mathfrak{N}$ als Normalteiler enthält und, wenn die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ zu $\mathfrak{B}$ isomorph ist. Wir werden eine allgemeine Methode angeben solche Erweiterungen zu konstruieren unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ als eine durch $E=\{b_1, b_2, \dots\}$ erzeugte freie Gruppe mit dem Relationensystem R vorgegeben ist[1].

Man bilde zunächst das freie Produkt $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{N}$ und E, oder was dasselbe ist, das freie Produkt von $\mathfrak{N}$ mit der durch E erzeugten freien Gruppe $\mathfrak{B}^*$[2]. Jedem erzeugenden Element b_i ordnen wir je einen Automorphismus von $\mathfrak{N}$ zu, der a aus $\mathfrak{N}$ auf a^{β_i} abbildet. Setzt man in $\mathfrak{M}$ die Relationen $b_i^{-1}ab_i=a^{\beta_i}$ voraus, so erhält man eine Faktorgruppe $\mathfrak{M}^*$ von $\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M}^*$ ist zu $\mathfrak{N}^*\mathfrak{B}^*$ isomorph, wobei $\mathfrak{N}^*$ ein zu $\mathfrak{N}$ isomorpher Normalteiler von $\mathfrak{M}^*$ und der Durchschnitt $\mathfrak{N}^* \frown \mathfrak{B}^*$ die Einheitsgruppe $\mathfrak{E}$ ist. Denn das Holomorph von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe der durch den Automorphismen β_i erzeugten Gruppe ist ersichtlich zu $\mathfrak{M}^*$ homomorph. Also besitzt $\mathfrak{M}^*$ einen zu $\mathfrak{N}$ isomorphen Normalteiler $\mathfrak{N}^*$. Identifiziert man $\mathfrak{N}^*$ zu 1, so reduziert sich $\mathfrak{M}^*$ auf $\mathfrak{B}^*$. Daher ist $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{N}^*$ zu $\mathfrak{B}^*$ isomorph und das Bild von $\mathfrak{B}^*$ bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}^*$ ist eine Vertretergruppe von $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{N}^*$.

E_s sei nun $\mathfrak{A}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{B}$. Sind $\bar{E}=\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots\}$ die Vertreter der erzeugenden Elemente von $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$, so ist $F(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots)$ ein Element a_F von $\mathfrak{N}$, wenn $F(b_1, b_2, \dots)$ eine Relation von $\mathfrak{B}$ ist. Dann sind ersichtlich

1) $$F(\bar{b})G(\bar{b})=a_F a_G$$

2) $$\bar{b}_i^{-1}F(\bar{b})\bar{b}_i=a_F^{\beta_i}$$

3) $$F(\bar{b})^{-1}aF(\bar{b})=a_F^{-1}aa_F\,.$$

Dabei bedeuten F, G Relationen von $\mathfrak{B}$; β_i den durch $\bar{b}_i$ bewirkten Automorphismus von $\mathfrak{N}$; a ein Element aus $\mathfrak{N}$.

In $\mathfrak{M}^*$ identifzieren wir $\mathfrak{N}^*$ mit $\mathfrak{N}$ und die erzeugenden Elemente von $\mathfrak{B}^*$ bezeichnen wir mit $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots\}$. Der durch $\bar{b}_i$ bewirkte Automorphismus von $\mathfrak{N}$ sei β_i. Dann besagen die Bedingungen 1), 2), daß die Elemente a^F eine Untergruppe $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$ bilden, die zum aus den sämtlichen Relationen $F(b)$ bestehenden Normalteiler $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ operatorhomomorph ist. Dabei betrachten wir als den Operatorbereich die

1) Vgl. etwa H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, (1937), 89–93.

2) Vgl. K. Shoda, Über die allgemeinen algebraischen Systeme I, Proc. **17** (1941), 323–327.

Menge der durch den Elementen von $\mathfrak{B}$ bewirkten Automorphismen. Die Bedingung 3) besagt, daß die zugeordneten Elemente von $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{R}$ denselben Automorphismus von $\mathfrak{N}$ bewirken.

Es sei umgekehrt solche operatorhomomorphe Abbildung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{N}$ gegeben. Dann kann man beweisen, daß man stets eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{B}$ erhält, wenn man $F(\bar{b})=a_F$ in $\mathfrak{M}$ setzt. $\mathfrak{M}^*=\mathfrak{N}^*\mathfrak{B}^*$ besitzt nämlich die Untergruppe $\mathfrak{N}^*\mathfrak{R}$. Wir beweisen zunächst, daß $\mathfrak{N}^*\mathfrak{R}$ das direkte Produkt $\mathfrak{N}^*\times\mathfrak{R}^*$ ist, wo $\mathfrak{R}^*$ ein zu $\mathfrak{R}$ isomorpher Normalteiler von $\mathfrak{M}^*$ ist und aus den Elementen $a_F^{-1}F(b)$ besteht. Es ist in der Tat nach der Bedingung 3)

$$a_F^{-1}F(a_G^{-1}G)^{-1}=a_F^{-1}FG^{-1}a_GGF^{-1}(GF^{-1})^{-1}=a_Ga_F^{-1}(GF^{-1})^{-1}=(a_Fa_G^{-1})^{-1}(FG^{-1}).$$

$a_Fa_G^{-1}$ ist nach dem vorausgesetzten Operatorhomomorphismus das Bild von FG^{-1}. Daher bilden die Elemente $a_F^{-1}F$ eine Gruppe $\mathfrak{R}^*$, die zu $\mathfrak{R}$ isomorph ist. Es ist ferner für jedes Element b aus $\mathfrak{B}^*$

$$b^{-1}a_F^{-1}Fb=(b^{-1}a_Fb)\cdot(b^{-1}Fb)$$

und $b^{-1}a_Fb$ ist das Bild von $b^{-1}Fb$. Aus der Bedingung 3) folgt aber

$$a_FF\cdot a=a\cdot a_FF$$

Also ist $\mathfrak{R}^*$ mit $\mathfrak{N}^*$ elementweise vertauschbar und ersichtlich ist $\mathfrak{R}^*\frown\mathfrak{N}^*=\mathfrak{E}$. Daher ist $\mathfrak{N}^*\mathfrak{R}=\mathfrak{N}^*\times\mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{R}^*$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{M}^*$. Wenn man in $\mathfrak{M}^*$ $F(b)=a_F$ setzt, so reduziert sich nur die Elemente aus $\mathfrak{R}^*$ auf 1. Daher sind jede verschiedene Elemente aus $\mathfrak{N}^*$ bei der Restklassenzerlegung nach $\mathfrak{R}^*$ nicht kongruent, d. h. $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{R}^*$ besitzt einen zu $\mathfrak{N}$ isomorphen Normalteiler $\mathfrak{N}^*\times\mathfrak{R}^*/\mathfrak{R}^*$, der durch die Elemente aus $\mathfrak{N}^*$ representiert wird. Die Faktorgruppe $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{N}^*\times\mathfrak{R}^*$ ist ersichtlich zu $\mathfrak{B}$ isomorph.

Zusammenfassend erhält man also

Erweiterungssatz. Zwei Gruppen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}$ seien vorgegeben. $\mathfrak{B}$ sei durch ein Erzeugendensystem E und ein definierendes Relationensystem R definiert. Die aus den sämtlichen Folgerelationen von R bestehende Gruppe sei $\mathfrak{R}$. Eine homomorphe Abbildung $b\rightarrow\beta$ der durch E erzeugten freien Gruppe $\mathfrak{F}$ in die Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ und eine bezüglich dem Operatorbereich $\mathfrak{F}$ operatorhomomorphe Abbildung $F(b)\rightarrow a_F$ von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{N}$ seien bestimmt, so daß die entsprechende Elemente in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$ denselben Automorphismus von $\mathfrak{N}$ bewirken. Dann reduziert sich das freie Produkt von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}$ auf eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{B}$, wenn man $b^{-1}a^{-1}ba^{\beta}$, $a_F^{-1}F$ als Relationen hinzufügt. Umgekehrt kann man auf dieser Weise jede Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{B}$ konstruieren.