129. Über die multiplikative Gruppe einer $\mathfrak{p}$-adischen Divisionsalgebra.

Tadasi NAKAYAMA und Yozô MATSUSHIMA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Nagoya.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

In dieser Note betrachten wir die Struktur der multiplikativen Gruppe einer Divisionalgebra D über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper. Unser Hauptziel ist eine Vermutung von Herrn T. Tannaka[1] zu beweisen, dass ein Element aus D zur Kommutatorgruppe der multiplikativen Gruppe von D gehört, wenn seine (reduzierte) Norm in bezug auf das Zentrum gleich 1 ist (Satz 1). Dieser Satz lässt sich dann verhältnismässig leicht auf den Fall einer einfachen Algebra übertragen (Satz 2). Ferner zeigen wir, dass die Einheitengruppe von D ein endliches System von Erzeugenden im Sinne der ganzen rationalen p-adischen Exponenten besitzt (Satz 3), was das Gegenstück zur Existenz eines solches im gewöhnlichen Sinne in der Einheitengruppe einer rationalen Divisionsalgebra[2] bildet.

1.[3] Es sei K ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, π ein Primelement von K. D sei eine normale Divisionalgebra über K vom Grade n, und Π ein Primelement von D derart $\Pi^n=\pi$. Es gibt in D einen über K unverzweigten und zyklischen Maximalteilkörper W, und D hat die zyklische Erzeugung:

$$D=(\pi, W, \sigma)=W+W\Pi+\cdots+W\Pi^{n-1},$$
$$\Pi\xi\Pi^{-1}=\xi^\sigma(\xi\in W), \qquad \Pi^n=\pi,$$

wo σ ein erzeugender Automorphismus von W über K ist. Die absolutirreduzible Darstellung von D wird durch die Zuordnung

$$\xi\to\begin{pmatrix}\xi &&&\\ &\xi^\sigma&&\\ &&\ddots&\\ &&&\xi^{\sigma^{n-1}}\end{pmatrix}(\xi\in W), \qquad \Pi\to\begin{pmatrix}0&1&&&\\ &0&1&&\\ &&\ddots&\ddots&\\ &&&0&1\\ \pi&&&&0\end{pmatrix}$$

gegeben. Also ist allgemein dem Elemente $a=a_0+a_1\Pi+\cdots+a_{n-1}\Pi^{n-1}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ \pi a_{n-1}^\sigma & a_0^\sigma & \cdots & a_{n-2}^\sigma\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \pi a_1^{\sigma^{n-1}} & \pi a_2^{\sigma^{n-1}} & \cdots & a_0^{\sigma^{n-1}}\end{pmatrix}$$

---

1) T. Tannaka, Sijo-Sugaku-Danwakai **236** (1942).

2) M. Eichler, Über die Einheiten der Divisionsalgebren, Math. Ann. **114** (1937). Vgl. auch O. F. G. Schilling, Einheitentheorie in hyperkomplexen Systemen, Crelle **175** (1936).

3) Für die Folgenden vgl. H. Hasse, Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931), oder M. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. **4** (1935).

zugeordnet. Die (reduzierte) Norm von a ist die Determinante dieser Matrix.

Bezeichne nun mit R ein volles Repräsentatensystem des Restklassenkörpers von D, welches wir, wie bekanntlich möglich ist, aus W herausnehmen. Jedes Element a von D lässt sich dann in der Form

$$a=(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i\Pi^i)\Pi^h \qquad \big(\xi_i \in R\,,\quad \xi_0 \not\equiv 0(\pi)\big)$$

entwickeln. Ersichtlich ist a dann und nur dann eine Einheit, wenn hier $h=0$ ist. Eine Einheit heisst ferner eine Einseinheit, wenn sie mod. Π kongruent 1 ist, d. h. wenn $\xi_0\equiv 1\,(\pi)$ ist. Wir bezeichnen mit D^* die multiplikative Gruppe von D, und mit E, E_1, bzw. E_h $(h\geqq 1)$ die Gruppe aller Einheiten, aller Einseinheiten, bzw. aller Einseinheiten, die mod. Π^h mit 1 kongruent sind. Wir schicken dann zwei Hilfsätze voraus, welche man leicht beweisen kann;

Hilfssatz 1. $(E_h, E_k)\subseteqq E_{h+k}$, wo die Klammer die Kommutatorbildung bedeutet.

Hilfssatz 2. E_h ist ein Normalteiler von D^*.

2. Nun kommen wir zum

Satz 1. D sei eine normale Divisionsalgebra über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper K. Ein Element in D gehört dann und nur dann zur Kommutatorgruppe der multiplikativen Gruppe von D, wenn seine (reduzierte) Norm bzl. K gleich 1 *ist.*

Beweis. Der zweite Teil („nun dann") der Behauptung ist ersichtlich. Um den ersten Teil zu beweisen, sei $a\in D$ und $N(a)=1$. a ist natürlich eine Einheit und hat die Entwicklung

$$a=\alpha_0+\alpha_1\Pi+\cdots, \qquad \alpha_0\not\equiv 0\,(\pi)\,,$$

also die Darstellung

$$a\to\begin{pmatrix}(\alpha_0+*\pi+\cdots) & (\alpha_1+*\pi+\cdots) & \cdots & (\alpha_{n-1}+*\pi+\cdots)\\ (\alpha_{n-1}+*\pi\cdots)^\sigma\pi & (\alpha_0+*\pi+\cdots)^\sigma & \cdots & (\alpha_{n-2}+*\pi+\cdots)^\sigma\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ (\alpha_1+*\pi+\cdots)^{\sigma^{n-1}}\pi & \cdots\cdots\cdots\cdots & & (\alpha_0+*\pi+\cdots)^{\sigma^{n-1}}\end{pmatrix}$$

Man sieht dann leicht ein, dass

$$1=N(a)\equiv\alpha_0\alpha_0^\sigma\ldots\alpha_0^{\sigma^{n-1}}=N\alpha_0\,(\pi)$$

ist. Es gibt daher ein Element ξ in R derart, dass $\alpha_0\equiv\xi^{\sigma-1}\,(\pi)$ gilt. Setzt man $a_1=(\xi^{\sigma-1})^{-1}a=(\Pi\xi\Pi^{-1}\xi^{-1})^{-1}a$, dann ist $N(a_1)=1$ und $a_1\in E_1$.

So haben wir nur zu zeigen, dass eine Einseinheit mit der Norm 1 gehört immer zur Kommutatorgruppe von D^*. Sei also $a\in E_1$, $N(a)=1$ und sei gesetzt

$$a=1+\alpha\Pi^h+\cdots \qquad (h\geqq 1)$$

$(a\in E_h)$.

Fall 1. $n\nmid h$.

In diesem Falle ist $\sigma^h\neq 1$, also gibt es ein Element ω in R, so dass $\omega^{\sigma^h}\not\equiv\omega\,(\pi)$, d. h. $\omega^{\sigma^h-1}\not\equiv 1\,(\pi)$ gilt. (Hier kann ω von h unabhängig ausgewählt werden.) Mit diesem Element ω nehmen wir weiter ein Element η aus R, das $a \equiv \eta(\omega^{1-\sigma^h}-1)\,(\pi)$ genügt. Dann ist

$$\omega(1+\eta\Pi^h)\omega^{-1}(1+\eta\Pi^h)^{-1} = (1+\eta\omega^{1-\sigma^h}\Pi^h)(1-\eta\Pi^h+\cdots)$$

$$=1+\eta(\omega^{1-\sigma^h}-1)\Pi^h+\cdots = 1+a\Pi^h+\cdots,$$

also

$$a' = \left(\omega(1+\eta\Pi^h)\omega^{-1}(1+\eta\Pi^h)^{-1}\right)^{-1}a = 1+a_{h+1}\Pi^{h+1}+\cdots \in E_{h+1}$$

und $N(a')=1$.

Fall 2. $n \mid h$.

Es sei etwa $h=ns$. Dann ist

$$a = 1+a\Pi^h+a_1\Pi^{h+1}+\cdots+a_{n-1}\Pi^{h+n+1}+\cdots$$

$$=1+a\pi^s+a_1\pi^s\Pi+\cdots+a_{n-1}\pi^s\Pi^{n-1}+\cdots.$$

Berücksichtigt man $N(a)=1$, so bestätigt man leicht aus der darstellenden Matrix von a

$$Sp a \equiv 0\ (\pi).$$

Dann gibt es ein ζ in R, so dass $\zeta^\sigma - \zeta \equiv a\,(\pi)$ gilt[4]. Für dieses ζ ist

$$\Pi(1+\zeta\pi^s)\Pi^{-1}(1+\zeta\pi^s)^{-1} = (1+\zeta^\sigma\pi^s)(1-\zeta\pi^s+\cdots)$$

$$=1+(\zeta^s-\zeta)\pi^s+\cdots = 1+a\pi^s+\cdots.$$

Setzt man $a' = \left(\Pi(1+\zeta\pi^s)\Pi^{-1}(1+\zeta\pi^s)^{-1}\right)^{-1}a$, dann gilt $N(a')=1$ und $a' = 1+a_{h+1}\Pi^{h+1}+\cdots \in E_{h+1}$.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens wollen wir nun zeigen, dass jede Einseinheit a mit der Norm 1 sich für einen beliebig hohen Exponenten h in der Form

$$a \equiv \Pi b_h \Pi^{-1} b_h^{-1} \omega c_h \omega^{-1} c_h^{-1} \qquad \text{mod. } E_h$$

darstellen lässt, wobei b_h und c_h geeignete Einseinheiten sind. Um es zu tun, sei vorausgesetzt, dass in der Tat diese Kongruenz für den Grad h schon der Fall ist. Nach der obigen Betrachtung sieht man dann ein, dass es, je nachdem $n \mid h$ oder nicht, eine Einheit b' bzw. c' in E_h gibt, so dass

$$a(\Pi b_h \Pi^{-1} b_h^{-1} \omega c_h \omega^{-1} c_h^{-1})^{-1} \equiv \Pi b' \Pi^{-1} b'^{-1} \qquad \text{bzw. } \omega c' \omega^{-1} c'^{-1} \text{ mod. } E_{h+1}$$

gilt. Weiter ist dann nach Hilfssätzen 1 und 2

$$a \equiv \Pi b' \Pi^{-1} b'^{-1} \Pi b_h \Pi^{-1} b_h^{-1} \omega c_h \omega^{-1} c_h^{-1}$$

$$\equiv \Pi b' \Pi^{-1} \Pi b_h \Pi^{-1} b_h^{-1} b'^{-1} \omega c_h \omega^{-1} c_h^{-1} \equiv \Pi(b'b_h)\Pi^{-1}(b'b_h)^{-1}\omega c_h \omega^{-1} c_h^{-1} \quad \text{mod. } E_{h+1}$$

bzw.

$$a \equiv \Pi b_h \Pi^{-1} b_h^{-1} \omega c_h \omega^{-1} c_h^{-1} \omega c' \omega^{-1} c'^{-1}$$

$$\equiv \Pi b_h \Pi^{-1} b_h^{-1} \omega c_h \omega^{-1} \omega c' \omega^{-1} c'^{-1} c_h^{-1} \equiv \Pi b_h \Pi^{-1} b_h^{-1} \omega(c_h c')\omega^{-1}(c_h c')^{-1} \quad \text{mod. } E_{h+1}.$$

4) Vgl. etwa E. Witt, Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper, Crelle **173** (1935).

Dies ist aber die gewünschte Kongruenz für den Exponenten $h+1$.

Hier haben wir weiter $b_{h+1} \equiv b_h$ und $c_{h+1} \equiv c_h \ (\pi^h)$. Daher besitzt die Folge b_h bzw. c_h eine wohlbestimmte Grenze b bzw. c in D. Für diese b und c gilt dann

$$a = \Pi b \Pi^{-1} b^{-1} \omega c \omega^{-1} c^{-1},$$

und damit ist unsere Behauptung, also auch unser Satz 1, bewiesen. In der Tat haben wir gezeigt, dass *jede Einheit bzw. Einseinheit in D immer dann als einem Produkt von höchstens drei bzw. zwei Kommutatoren aus D^* darstellbar ist, wenn seine Norm gleich* 1 *ist.*

3. Wir übertragen nun den Satz 1 auf den Fall einer normalen einfachen Algebra:

Satz 2. A sei eine normale einfache Algebra über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper K, und A^* die multiplikative Gruppe aller regulären Elemente aus A. So gehört ein Element von A zur Kommutatorgruppe von A^* dann und nur dann, wenn seine (reduzierte) Norm bzl. K gleich 1 *ist.*

Beweis. A ist ein voller Matrizenring, etwa vom Grade t, über einer normalen Divisionsalgebra D: $A = D_t$. Es sei a ein Element aus A, dessen Norm 1 ist. Durch die links- bzw. rechtseitige Multiplikation der geeigneten Kommutatorprodukten c_1 und c_2 aus A^* kann man a in der Form

$$c_1 a c_2 = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

bringen[5]. Wegen $N(a)=1$ ist $N_{D/K}(\alpha)=1$, also folgt nach Satz 1, dass α zur Kommutatorgruppe von D^* gehört. Folglich ist $c_1 a c_2$, also a selbst in der Kommutatorgruppe von A^* enthalten. Dies beweist den ersten Teil des Satzes, und der zweite Teil ist wieder ersichtlich.

Bemerkung. Bei dem obigen Beweis der Sätze 1 und 2 haben wir davon nicht im vollen Umfang Gebrauch gemacht, dass der Restklassenkörper von D ein Galoisfeld ist. Vielmehr sieht man ein, dass die Sätze 1 und 2 gültig bleiben nicht nur für die Divisionsalgebra über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper, sondern auch für die Divisionsalgebra über einem diskret bewerteten perfekten Körper K, die sich in der zyklischen Form (π, W, σ) geschreiben lässt, wobei W eine unverzweigte zyklische Erweiterung, π ein Primelement von K, und σ ein erzeugender Automorphismus von W/K ist. Daher gilt[6]: *K sei ein diskret bewerteter perfekter Körper und D eine normale Divisionsalgebra über K, deren Restklassendivisionsalgebra kommutativ und separabel über dem Restklassenkörper von K ausfällt. So ist die (reduzierte) Norm eines Elementes von D nur dann gleich* 1, *wenn es zur Kommutator-*

5) Siehe M. Abe, Sijo-Sugaku-Danwakai **240** (1942); vgl. auch K. Iwasawa, Über die Einfachheit der speziellen projektiven Gruppe, Proc. **17** (1941).

6) Vgl. E. Witt, Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern, Crelle **176** (1936); T. Nakayama, Divisionsalgebren über diskret bewerteten perfekten Körpern, ibid. **178** (1937).

gruppe der multiplikativen Gruppe von D gehört. Ähnliches gilt für einfache Algebren, die volle Matrizenring über solcher Divisionsalgebra sind.

4. D sei wieder eine Divisionsalgebra über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper K. Wir wollen nun zeigen, dass die multiplikative Gruppe von D ein endliches erzeugendes System im Sinne der ganzen rationalen p-adischen Exponenten besitzt[7]. Dafür sei der absolute Restklassengrad bzw. die absolute Verzweigungsordnung von D mit F bzw. V bezeichnet. Ist dann für $h=1, 2, \dots$ S_h ein System von p^F Einheiten $a_h=1+\alpha_h\Pi^h+\cdots$, in denen α_h ein Repräsentantensystem mod. Π durchläuft, so besteht für jede Einheit a aus E_h eine Gleichung $a=a_h a'=a''a_h$, wo a_h eine eindeutig bestimmte Einheit des Systems S_h ist und a', a'' Einheiten aus E_{h+1} sind. Also ist S_h ein vollständiges Repräsentantensystem von E_h mod. E_{h+1}.

Es sei $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_F$ irgendeine Basis des Restklassenkörpers von D über dem des rationalen p-adischen Zahlkörpers, so dass also für jedes ganze Element γ eine Kongruenz $\gamma\equiv c_1\omega_1+c_2\omega_2+\cdots+c_F\omega_F\ (\Pi)$ mit $0\leqq c_i<p$ besteht. Dann bilden p^F Einheiten

$$(1+\omega_1\Pi^h+\cdots)^{c_1}(1+\omega_2\Pi^h+\cdots)^{c_2}\cdots(1+\omega_F\Pi^h+\cdots)^{c_F}=1+\gamma\Pi^h+\cdots$$

offenbar ein System S_h, wenn die Exponenten c_i unabhängig von einander die Werte $0, 1, \dots, p-1$ annehmen. Hier soll das System B_h von den F Einheiten

$$1+\omega_1\Pi^h+\cdots,\quad 1+\omega_2\Pi^h+\cdots,\quad \cdots\cdots,\quad 1+\omega_F\Pi^h+\cdots$$

aus E_h ein Basissystem für den Grad h genannt werden.

Ist nun $a=1+\alpha\Pi^h+\cdots$, so ist

$$a^p=1+p\alpha\Pi^h+\cdots+(\alpha\Pi^h)^p+\cdots.$$

Wenn also $V+h<hp$, d. h. $h>\dfrac{V}{p-1}$ ist, so liegt a in E_{h+V}. Ist hier $p=\varepsilon\Pi^V$ gesetzt, dann ist

$$a^p=1+\alpha\varepsilon\Pi^{h+V}+\cdots.$$

Weil ε eine bestimmte Einheit ist, bildet $(\omega_1\varepsilon, \omega_2\varepsilon, \dots, \omega_F\varepsilon)$ gleichzeitig mit $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_F)$ eine Basis des Restklassenkörpers. Daher ist B_h^p ein Basissystem für den Grad $h+V$, wenn $h>\dfrac{V}{p-1}$ gilt. Es sei hier der Einfachheit halber $r=\left[\dfrac{V}{p-1}\right]$ gesetzt. Dann sind also

$$B_1, B_2, \dots, B_r, B_{r+1}, \dots, B_{r+V}, B_{r+1}^p, \dots, B_{r+V}^p, \dots, B_{r+j}^{p^i}, \dots$$

7) Das folgende steht eng mit O. F. S. Schilling, Units in $\mathfrak{p}$-adic algebras, Amer. J. Math. **61** (1939); vgl. ins Besondere Theorem 2 dort. Unsere Fassung der Erzeugenden ist aber schärfer als seine.

Die Beweisführung rührt von K. Hensel her; K. Hensel, Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers, Crelle **146** (1916).

$(1 \leqq j \leqq V;\ i=1, 2, \ldots)$ die vollständige Basissysteme für alle verschiedenen Grade.

Die $VF=N$ Einheiten aus $B_{r+1}, \ldots, B_{r+V}$ mögen in ihrer natürlichen Reihenfolge durch $b_1, b_2, \ldots, b_N$ bezeichnet, so dass die F ersten aus B_{r+1}, die F folgenden aus B_{r+2} herausgegriffen sind, usw. Die $rF=M$ Einheiten aus $B_1, \ldots, B_r$ mögen in ähnlicher Weise mit $a_1, a_2, \ldots, a_M$ bezeichnet werden. Ist dann a zuerst eine Einheit aus E_{r+1}, so gilt

$$a \equiv b_1^{c(1,0)} b_2^{c(2,0)} \ldots b_N^{c(N,0)} \quad \text{mod.}\ E_{r+V+1}$$

mit geeigneten $c(i, 0)$ $\big(0 \leqq c(i; 0) < p\big)$. Ferner ist

$$a \equiv b_1^{c(1,0)} b_2^{c(2,0)} \ldots b_N^{c(N,0)} b_1^{pc(1,1)} \ldots b_F^{pc(F,1)} \quad \text{mod.}\ E_{r+V+2}\,,$$

wo $0 \leqq c(i, 1) < p$ sind. Nach Hilfssätzen 1 und 2 sieht man, dass dies weiter mod. E_{r+V+2} mit

$$b_1^{c(1,0)+pc(1,1)} \ldots b_F^{c(F,0)+pc(F,1)} b_{F+1}^{c(F+1,0)} \ldots b_N^{c(N,0)}$$

kongruent ist.

Durch sukzessive Anwendung ähnlicher Verfahren und durch die Grenzübergang, wie beim Beweis des Satzes 1, erhalten wir dann schliesslich

$$a = b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_N^{\lambda_N}\,,$$

wo $\lambda_i \equiv \sum_{j=0}^{\infty} c(i, j) p^j$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ ganze rationale p-adische Zahlen sind und $b_i^{\lambda_i} = \Pi_{j=0}^{\infty} b_i^{c(i,j)p^j}$ sind.

Wenn aber a eine beliebige Einseinheit ist, so lässt sich a in der Form

$$a = a_1^{c_1} a_2^{c_2} \ldots a_M^{c_M} a'$$

schreiben, wobei wieder $0 \leqq c_i < p$ sind und a' eine Elnheit aus E_{r+1} ist. Also erhält man den

Satz 3. Jede Einseinheit a in D lässt sich multiplikativ in der From

$$a = a_1^{c_1} a_2^{c_2} \ldots a_M^{c_M} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_N^{\lambda_N}$$

darstellen, wobei $0 \leqq c_i < p$ ist $(i=1, 2, \ldots, M)$ und $\lambda_i = \sum_{j=0}^{\infty} c(i, j) p^j$ eine ganze rationale p-adische Zahl bedeutet $(i=1, 2, \ldots, N)$.

Weil jede Einheit bzw. jedes reguläre Element aus D mit der primitiven (p^F-1)-ten Einheitswurzel ω in der From $\omega^k a$ bzw. $\Pi^h \omega^k a$ geschrieben wird, haben wir die Folgerung; Die Einheitengruppe E bzw. die multiplikative Gruppe D^* von D besitzt ein endliches erzeugendes System im Sinne der ganzen rationalen p-adischen Exponenten.

Weiter gilt der

Satz 4. In D gibt es endlich viele kommutative Teilkorper $K_1, K_2, \ldots, K_m$ derart, dass jedes Element d von D mit d_i aus K_i sich in der Form $d = d_1 d_2 \ldots d_m$ darstellen lässt.

Nämlich, wir haben nur $K_1 = K(\pi)$, $K_2 = W$, $K_3 = K(a_1), \ldots, K_m =$

$K(b_N)$ zu setzen und zu bemerken, dass die ganzen rationalen p-adischen Potenzen der Elementen aus einem Körper K_i wieder in K_i liegen.

5. Auch der obige Satz 4 bleibt gültig für Divisionsalgebren der in der Bemerkung in § 3 betrachteten Art. Dies folgt unmittelbar aus dem folgenden allgemeinen

Satz 4′. K sei ein beliebiger diskret bewerteter perfekter Körper, und D eine Divisionsalgebra über K. Dann gibt es endlich viele kommutative Teilkörper $K_1, K_2, \cdots, K_m$ in D, so dass jede Einseinheit e in D mit Einseinheitene e_i aus K_i sich multiplikativ in der Form

$$e = e_1 e_2 \cdots e_m$$

darstellen lässt.

Zum Beweis habe π, Π, V, F und $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_F$ dieselben Bedeutungen wie früher, nur dass nun der Grundkörper nicht der rationale p-adische Zahlkörper sondern K ist. Ist etwa $h = uV + v$ $(0 \leqq v < V)$, so bilden die Elemente

$$(1 + a_1\omega_1\Pi^v\pi^u)(1 + a_2\omega_2\Pi^v\pi^u) \cdots (1 + a_F\omega_F\Pi^v\pi^u)$$

ein vollständiges Repräsentantensystem von E_h mod. E_{h+1}, wobei $a_1, a_2, \cdots, a_F$ unabhängig voneinander ein Repräsentantensystem in K mod. π durchlaufen sollen. Hier liegt der i-te Faktor $1 + a_i\omega_i\Pi^v\pi^u$ in dem kommutativen Teilkörper $K(\omega_i\Pi^v)$ von D. Beschäftigt man also mit diesen Repräsentantensystemen wie bei den früheren Systeme $B_i, B_i^p, \cdots$, so folgt unser Satz ohne Schwierigkeit.

Am Schluss bemerken wir noch, dass die Sätze 3, 4 und 4′ sich auch auf den Fall einer einfachen Algebra übertragen lassen. Man erreicht dies leicht mit Hilfe der Theorie der Elementarteilern und der bekannten Struktur der additiven Gruppe der ganzen Elemente aus D[8].

8) Vgl. O. F. G. Schilling, a. a. O. 7).