128. Über den Operatorenring Banachscher Räume.

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut, Tokyo Bunrika Daigaku.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

Es sei $\mathfrak{X}$ ein Banachscher Raum (kurz B. R.), und $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ der Ring aller beschränkten linearen Operatoren von $\mathfrak{X}$. M. Eidelheit[1] hat bewiesen, dass aus dem Ringisomorphismus von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}_1)$ und $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}_2)$ der Isomorphismus[2] von $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ folgt; dass also die Struktur des Raumes $\mathfrak{X}$ durch die des Ringes $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ charakterisiert wird. In dieser Hinsicht haben auch S. Kakutani und G. Mackey[3] eine Charakterisierung der Operatorenringe Hilbertscher Räume gegeben. In dieser Note sollen nun einige Eigenschaften von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ aufgestellt werden, und daraus die Sätze von Eidelheit und von Kakutani-Mackey aufs neue hergeleitet werden.

1. Es sei $\mathfrak{X}$ ein reeller oder komplexer B. R. mit Elementen $x, y, \dots$. $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ sei die Gesamtheit aller beschränkten linearen Operatoren A von $\mathfrak{R}$, dann ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ein Ring mit der Multiplikationseinheit I $(Ix=x)$. Ferner ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ein B. R. in bezug auf die Norm $\|A\|=\sup_{|x|=1}\|Ax\|$, und es gilt $\|AB\|\leqq\|A\|\cdot\|B\|$. $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ist also ein nichtkommutativer normierter Ring.

Lemma 1. Für jedes minimale Linksideal $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ gibt es ein beschränktes lineares Funktional f_0 von $\mathfrak{X}$ mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem Operator $A\in\mathfrak{A}$ ordnet sich eineindeutig ein Element $y\in\mathfrak{X}$ zu, so dass

$$(1) \qquad Ax=f_0(x)\cdot y$$

gilt. Dabei ist ersichtlich $\|A\|=\|f_0\|\cdot\|y\|$. Falls $\|f_0\|=1$ ist, dann wird durch die Zuordnung: $A\leftrightarrow y$ in (1) eine Äquivalenz $\mathfrak{X}\cong\mathfrak{A}$[4] vermittelt. Dieser Isomorphismus lässt sogar $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ als Linksoperatorenbereich zu. Umgekehrt ist die Gesamtheit aller Operatoren A, die durch die Formel (1) für ein bestimmtes f_0 definiert wird, ein abgeschlossenes minimales Linksideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$.

Beweis. Es sei $A_1\in\mathfrak{A}$ und $A_1z_1\neq 0$. Dann gibt es ein lineares Funktional f_1 mit $f_1(z_1)\neq 0$. Für einen durch $A_0x=f_1(x)\cdot y_1$ definierten Operator A_0 gilt $A_0A_1x=f_1(A_1x)\cdot y_1$, und $A_0A_1z_1=f_1(z_1)\cdot y_1\neq 0$. Da $\mathfrak{A}$ minimal ist, muss $\mathfrak{A}=\mathfrak{R}(\mathfrak{X})A_0A_1$ sein, d. h.

$$\mathfrak{A}=\left(A_y;\ A_yx=f_0(x)y,\ y\in\mathfrak{X}\right), \quad f_0(x)=f_1(A_1x).$$

Die Gleichung $BA_yx=f_0(x)\cdot By=A_{By}x$ zeigt den Operatorisomorphismus von $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{X}$. Die Umkehrung ist klar.

1) M. Eidelheit, On isomorphisms of rings of linear operators, Studia Math., **9** (1939), 97–104.

2) Vgl. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, (1932), S. 180.

3) Vgl. S. Kakutani, Über den Verband und Ring Banachscher Räume, (Japanisch), Isô-Sûgaku, **5** (1943), 1–11.

4) $\cong$ zeigt die Äquivalenz und $\simeq$ zeigt den Isomorphismus von Banachschen Räumen. Vgl. loc. cit. 2), S. 180.

Satz 1. $\mathfrak{X}$ *und* $\mathfrak{X}'$ *seien B. R. Lassen sich die Ringe* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ *und* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}')$ *so zuordnen, dass bei* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}) \ni A \leftrightarrow \varphi(A) = A' \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X}')$ *folgendes gilt:*

$$\varphi(\alpha A + \beta B) = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B), \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\cdot\varphi(B), \tag{2}$$

$$\|A\| = \|\varphi(A)\|, \tag{3}$$

dann ist $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{X}'$. *Bezeichnen wir mit* $\mathfrak{X} \ni x \leftrightarrow Vx = x' \in \mathfrak{X}'$ *die Zuordnung bei dieser Äquivalenz, dann gilt*

$$\varphi(A) = V\cdot A\cdot V^{-1}. \tag{4}$$

Beweis. $\mathfrak{A}$ sei ein minimales Linksideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$, dann ist $\varphi(\mathfrak{A}) = \big(\varphi(A)\,;\ A \in \mathfrak{A}\big)$ ein minimales Linksideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}')$, und es gilt nach (2), (3) offenbar die Äquivalenzrelationen $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{A} \cong \varphi(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{X}'$. Die Zuordnungen bei diesen Äquivalenzrelationen seien $\mathfrak{X} \ni x \leftrightarrow A_x \leftrightarrow A'_{x'} = \varphi(A_x) \leftrightarrow x' = Vx \in \mathfrak{X}'$, dann gilt $\|x\| = \|Vx\|$ und $\mathfrak{X} \ni Bx \leftrightarrow A_{Bx} = BA_x \leftrightarrow \varphi(AB_x) = \varphi(B)\varphi(A_x) \leftrightarrow \varphi(B)\cdot x' \in \mathfrak{X}'$, d. h. $V(Bx) = \varphi(B)\cdot Vx$ oder $\varphi(B) = VBV^{-1}$.

Nach einem Satz von Eidelheit[1] folgt also

Satz 2. (*Eidelheit*) *Wenn wir auch die Bedingung* (3) *für* φ *im Satz 1 ausfallen lassen, sind die B. R.,* $\mathfrak{X}$ *und* $\mathfrak{X}'$ *noch immer isomorph, und es gilt* $\varphi(A) = VAV^{-1}$. *Insbesondere ist jedes Ringautomorphismus von* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ *stets ein innerer.*

Für eine spätere Anwendung geben wir zwei Lemma.

Lemma 2. Für jedes minimale Rechtsideal $\mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ *gibt es ein Element* $x_0 \in \mathfrak{X}$ *mit folgender Eigenschaft: zu jedem Operator* $B \in \mathfrak{B}$ *ordnet sich eineindeutig ein lineares Funktional* $f \in \overline{\mathfrak{X}}$ ($\overline{\mathfrak{X}}$ *zeit der konjugierte B. R. von* $\mathfrak{X}$) *zu, so dass*

$$Bx = f(x)x_0 \tag{5}$$

gilt. Falls $\|x_0\| = 1$ *ist, dann gilt die Äquivalenz* $\overline{\mathfrak{X}} \cong \mathfrak{B}$ *durch die Zuordnung* $B \leftrightarrow f$ *in* (5). *Umgekehrt ist die Gesamtheit aller Operatoren B, die durch* (5) *für ein bestimmtes* x_0 *definiert wird, ein abgeschlossenes minimales Rechtsideal von* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$.

Beweis ist ganz analog wie bei Lemma 1.

Lemma 3. Es sei $\mathfrak{A}$ *ein minimales Linksideal von* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$. *Dann gilt für jedes* $A \in \mathfrak{A}$

$$A^2 = \lambda A. \tag{6}$$

Beweis. Aus $Ax = f_0(x)y_0$ folgt $A^2x = f_0(x)f_0(y_0)y_0 = f_0(y_0)\cdot Ax$.

2. *Definition. Der adjungierte normierte Ring* $\mathfrak{R}^*$ von einem normierten Ring $\mathfrak{R}$ ist der folgenderweise definierte Ring: $\mathfrak{R}^* = (A^* : A \in \mathfrak{R})$ mit

$$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*, \tag{7}$$

$$\|A\| = \|A^*\|. \tag{8}$$

Satz 3. Wenn $\mathfrak{X}$ *ein regulärer B. R. ist, dann gilt der Ring-*

---

1) Vgl. loc. cit. 1), Satz 1.

isomorphismus $\left(\mathfrak{R}(\mathfrak{X})\right)^{*}\cong\mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{X}})$.

Beweis. A^* sei der konjugierte Operator von A: $(A^*f)(x)=f(Ax)$, dann genügt die Zuordnung $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})\ni A\rightarrow A^*\in\mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{X}})$ den Relationen (7), (8). Da $\mathfrak{X}$ regulär ist, kann jeder Operator von $\overline{\mathfrak{X}}$ als A^* dargestellt werden, also gilt $\left(\mathfrak{R}(\mathfrak{X})\right)^{*}\cong\mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{X}})$.

Satz 4. Wenn der adjungierte Ring von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ *mit* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}^*)$ *für einen B. R.* $\mathfrak{X}^*$ *ringisomorph ist, dann ist* $\mathfrak{X}$ *regulär und es gilt* $\overline{\mathfrak{X}}\simeq\mathfrak{X}^*$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{B}$ ein minimales Rechtsideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$, dann ist $\mathfrak{B}^*\subset\mathfrak{R}(\mathfrak{X})^*$ ein minimales Linktsideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})^*$. $\mathfrak{B}_0^*$ sei das minimale Linksideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$, das zu $\mathfrak{B}^*$ bei dem Isomorphismus $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})^*\cong\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ordnet. Nach Lemma 1 und 2 folgt also $\overline{\mathfrak{X}}\cong\mathfrak{B}\simeq\mathfrak{B}^*\simeq\mathfrak{B}_0^*\cong\mathfrak{X}^*$. Ganz analog folgt aus dem Ringisomorphismus von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})^*$ und $\mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{X}})$, also von $\mathfrak{R}(\overline{\mathfrak{X}})^*$ und $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ der Isomorphismus $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}\simeq\mathfrak{X}$.

Analogerweise gilt

Satz 5. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Involution $A\rightarrow A^*$ *von* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ *auf sich:*

$$A^{**}=A\,, \tag{9}$$

$$(\alpha A+\beta B)=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*\,,\qquad (AB)^*=B^*A^*\,, \tag{10}$$

ist $\mathfrak{X}\simeq\overline{\mathfrak{X}}$. *Für zwei Involutionen* $A\rightarrow A^*$, *und* $A\rightarrow A'$ *gibt es ein* $T\in\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ *mit* $A'=TA^*T^{-1}$.

3. *Satz 6.* (*Kakutani-Mackey*) *Wenn auf* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ *eine Involution* $A\rightarrow A^*$ *mit den Eigenschaften* (9), (10) *und*

$$A\cdot A^*\neq 0 \qquad \text{für} \qquad A\neq 0 \tag{11}$$

existiert, dann lässt sich ein inneres Produkt (x,y) $(x,y\in\mathfrak{X})$ *so definieren, dass die Norm* $\|x\|_1^2=(x,x)$ *mit der alten Norm* $\|x\|$ *äquivalent ist, und dass*

$$(Ax,y)=(x,A^*y) \tag{12}$$

gilt.

Beweis. Nach einem Satz von Eidelheit[1] können wir o. B. d. A. voraussetzen, dass $\|A\|=\|A^*\|$ ist. Es sei $\mathfrak{A}$ ein minimales Linksideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$, dann gibt es nach Lemma 1 eine Zuordnung $\mathfrak{A}\ni E_x\leftrightarrow x\in\mathfrak{X}$, $\|E_x\|=\|x\|$, so dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{X}$ operatorisomorph mit $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ als Linksoperatorenbereich sind. Es sei $\mathfrak{A}^*=(E_x^*\,;\,E_x\in\mathfrak{A})$, dann ist $\mathfrak{A}^*$ ein minimales Rechtsideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$. Für einen Operator $\mathfrak{A}\ni E_{x_0}\neq 0$ ist $E_0=E_{x_0}^*E_{x_0}\neq 0$ (nach (11)) und $E_0=E_0^*\in\mathfrak{A}\frown\mathfrak{A}^*$. Bei geeigneter Konstantenmultiplikation können wir annehmen, dass $\|E_0\|=1$ ist. Nach Lemma 1 können wir jeden Operator $E_y\in\mathfrak{A}$ in der Form $E_y=B_yE_0$, $B_y\in\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ darstellen. Wir setzen dann $U=B_y^*E_x$. U liegt auch in $\mathfrak{A}$. Nach Lemma 3 gilt also $U^2=\lambda U$ (λ eine Konstante). Ferner setzen wir $A=U^*-\lambda I$, dann ist $AU^*=0$, da $U^{*2}=\lambda U^*$ ist. Wenn $U\neq 0$ ist, dann gilt $\mathfrak{A}=\mathfrak{R}(\mathfrak{X})U$ und $\mathfrak{A}^*=U^*\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$. Also gibt es einen Operator $C\in\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ für $E_0\in A^*$, so dass $E_0=U^*C$ ist. Es gilt daher

1) Vgl. loc. cit. 5).

$$E_x^* E_y = E_x^* B_y E_0 = U^* E = (\lambda I + A) \cdot E_0 = \lambda E_0 + A \cdot U^* C = \lambda E_0 \,,$$

d. h. es gibt eine Konstante λ für beliebiges Paar $E_x, E_y \in \mathfrak{A}$, so dass $E_x^* E_y = \lambda E_0$ ist. Für $E_0^* E_0 = E_0^2 = \lambda_0 E$ ist $\lambda_0 \neq 0$ und reell, denn es gilt $E_0^* = E_0$ und $(\lambda_0 E_0)^* = \bar{\lambda}_0 E_0$. Wir setzen nur $(y, x) = \varepsilon_0 \lambda$, wobei $\varepsilon_0 = \pm 1 = \mathrm{sgn} \lambda_0$ ist, d. h.

$$E_x^* E_y = \varepsilon_0 (y, x) E_0 \,. \tag{13}$$

(i) Aus der Stetigkeit des Produktes AB und des A^* in $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ und der Äquivalenz $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{A}$ folgt, dass (y, x) in bezug auf die beiden Veränderlichen x und y stetig ist. (ii) Aus (13), (10) folgt $(\alpha y_1 + \beta y_2, x) = \alpha (y_1, x) + \beta (y_2, x)$, $(y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \bar{\alpha} (y, x_1) + \bar{\beta} (y, x_2)$. (iii) Aus $(E_x^* E_y)^* = E_y^* E_x$, $\big((y, x) E_0\big)^* = \overline{(y, x)} E_0$ und (13) folgt $(x, y) = \overline{(y, x)}$. (iv) Aus (11) folgt, dass $(x, x) \neq 0$ für $x \neq 0$ ist. (v) Da $\varepsilon_0 (x, x)$ aus (i), (iii), (iv) reell definit ist, folgt aus der Normierung $E_0^* E_0 = \varepsilon_0 |\lambda_0| E_0$, dass $(x, x) > 0$ für $x \neq 0$ ist. (vi) Da $E_{Ax} = A E_x$ ist, gilt $(Ax, y) E_0 = E_y^* E_{Ax} = E_y^* A E_x = (A^* E_y)^* E_x = E_{A^* y}^* E_x = (x, A^* y) E_0$, d. h. $(Ax, y) = (x, A^* y)$. (vii) Aus $(x, x) = \| (x, x) E_0 \| = \| E_x^* E_x \| \leqq \| E_x^* \| \| E_x \| = \| E_x \|^2 = \| x \|^2$ folgt $(x, x) \leqq \| x \|^2$. (viii) Es gibt eine Konstante N, so dass $\| x \|^2 \leqq N (x, x)$ ist. Denn andernfalls gäbe es $\{x_n\}$ mit $(x_n, x_n) = 1$, $\lim \| x_n \| = \infty$, d. h. $\lim \| E_{x_n}^* \| = \infty$. Da $E_{x_n}^*$ in einem minimalen Rechtsideal $\mathfrak{A}^*$ von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ liegt, gibt es nach Lemma 2 ein lineares Funktional $f_n(y)$ mit $\| E_{x_n}^* \| = \| f_n \|$, so dass für jedes $E_y \in \mathfrak{A} \cdot E_{x_n}^* E_y = f_n(y) E_0$ gilt. Nach der Relation $\lim_{n \to \infty} \| f_n \| = \lim \| E_{x_n}^* \| = \infty$ gäbe es nach einem Satz von Banach[1] ein Element $y \in \mathfrak{X}$, so dass $\lim \| E_{x_n}^* E_y \| = \lim | f_n(y) | = \infty$, was der Ungleichung $\| E_{x_n}^* E_y \|^2 = | (y, x_n) |^2 \leqq (y, y)(x_n, x_n) = (y, y)$ widerspricht, womit alles bewiesen ist.

Den normierten Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ für den allgemeinen B. R. $\mathfrak{X}$ abstrakt zu charakterisieren, scheint sehr schwierig zu sein[2]. In einem speziellen Fall gilt aber

Satz 7. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein nichtkommutativer normierter Ring $\mathfrak{R}$ ein voller Operatorenring $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{X}$ ist, ist folgende:

(i) *$\mathfrak{R}$ hat ein minimales Linksideal $\mathfrak{A}$. Dies $\mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ abgeschlossen.*

(ii) *Jedes Element $A \in \mathfrak{A}$ genügt $A^2 = \lambda A$ für eine Konstante λ.*

---

1) Vgl. loc. cit. 2), Satz 5, S. 80.

2) $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ hat folgende Eigenschaften: (i) Falls $\mathfrak{A}$ ein minimales Linksideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ist, dann ist auch $\mathfrak{A} \cdot b$ minimal. Umgekehrt ist jedes minimales Linksideal in der Form $\mathfrak{A} \cdot b$ dargestellt wird. Die gleiche gilt für Rechtsideal. (ii) Der Durchschnitt aller maximalen Linksideale (oder Rechtsideale) ist ein einziges Flement 0. (iii) Das Zentrum von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ist $\{\lambda I\}$. (iv) Ein normales Ideal $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ist entweder $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ oder 0. (Ein Ideal heisst normal, falls $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^{rl}$ (oder $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^{lr}$) gilt, wobei wir im allgemeinen für eine Menge $\mathfrak{M} < \mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ $\mathfrak{M}^r = (B;\ \mathfrak{M} \cdot B = 0)$ und $\mathfrak{M}^l = (A;\ A \cdot \mathfrak{M} = 0)$ setzen). Solche Eigenschaften und die im Lemma 3 genügt den Ring aller Matrizen auf einem Grundkörper zu charakterisieren. Aber gibt es im allgemeinen Falle ein nicht kommutativer normierter Ring, der alle diese Eigenschaften besitzt und doch nie ein $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ist.

(iii) *Es gilt* $\|B\| = sup_{A\in\mathfrak{A}} \|BA\| \cdot \|A\|^{-1}$.

(iv) *Wenn für eine Folge* $\{B_n\}$ $lim\|B_nA - B_mA\| = 0$ *für jedes* $A \in \mathfrak{A}$ *gilt, dann gibt es ein* $B \in \mathfrak{R}$ *mit* $lim\|B_nA - BA\| = 0$ *für jedes* $A \in \mathfrak{A}$.

(v) *Es gibt eine Involution* $A \to A^*$ *von* $\mathfrak{R}$ *mit* (9), (10), (11) *und* $\|A\| = \|A^*\|$[1].

Beweis. Aus der Abgescholossenheit von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{R}$ folgt, dass $\mathfrak{A}$ ein B. R. ist. Da $\mathfrak{A}$ ein Linksideal von $\mathfrak{R}$ ist, können wir $\mathfrak{R}$ als einen Operatorenring auf $\mathfrak{A}$ ansehen. (iii) zeigt, dass die gegebene Norm $\|B\|(B \in \mathfrak{R})$ mit der Norm $\|B\|_1$ von B als Operator auf $\mathfrak{A}$ übereinstimmt. Dann ist $\mathfrak{R}$ ganz analog wie beim Beweis des Satzes 6 ein Operatorenring auf einem Hilbertschen Raum $\mathfrak{X}$. Nach unserer Annahme (iv) ist dieser Operatorenring $\mathfrak{R}$ stark abgeschlossen in $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ und $\mathfrak{R} \ni I$. Um $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ zu zeigen, genügt es also nachzuweisen, dass der Kommutatorring von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}) = \{\lambda I\}$ ist[2]. Es sei $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ein Element im Kommutatorring von $\mathfrak{R}$. Aus $E_x^* E_y = \varepsilon_0(y, x)E_0$, $AE_x^*E_y = \varepsilon_0(y, x)AE_0$ und $E_x^*AE_y = \varepsilon_0(Ay, x)E_0$ folgt, dass $AE_0 = \lambda E_0$, $\lambda(y, x) = (Ay, x)$ für jedes $y \in \mathfrak{X}$ gelten. Also muss $A = \lambda I$ sein, w. z. b. w.

4. Es sei $\mathfrak{X}_0$ ein regulärer B. R. $\overline{\mathfrak{X}}_0$ sei der konjugierte B. R. von $\mathfrak{X}_0$. $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 + \overline{\mathfrak{X}}_0$ sei der B. R., der die direkte Summe von $\mathfrak{X}_0$ und $\overline{\mathfrak{X}}_0$ ist: $\mathfrak{X} \ni x = x_0 + f_0$, $x_0 \in \mathfrak{X}_0$, $f_0 \in \overline{\mathfrak{X}}_0$, mit $\|x\| = \|x_0\| + \|f_0\|$. Dann ist $\mathfrak{X}$ mit seinem konjugierten B. R. $\overline{\mathfrak{X}}$ isomorph, und nach Satz 5 lässt sich für einen solchen B. R. eine Involution definieren. Nun fragen wir uns wie ein solcher B. R. charakterisiert wird[3].

Es sei $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit aller Operatoren $\mathfrak{A} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ mit $Ax_0 \in \mathfrak{X}_0$ für jedes $x_0 \in \mathfrak{X}_0$; ähnlicherweise seien $\mathfrak{B} = (B;\ Bx_0 = f_0 \in \overline{\mathfrak{X}}_0$ für jedes $x_0 \in \mathfrak{X}_0)$, $\mathfrak{C} = (C;\ Cf_0 = x_0 \in \mathfrak{X}$ für jedes $f_0 \in \overline{\mathfrak{X}}_0)$ und $\mathfrak{D} = (D;\ Df_0 = g_0 \in \overline{\mathfrak{X}}$ für jedes $f_0 \in \overline{\mathfrak{X}}_0)$. Wir bezeichnen $(x_0, f_0) = (f_0, x_0) = f_0(x_0) f_0 \in \overline{\mathfrak{X}}_0$, $x_0 \in \mathfrak{X}_0$. Nun definieren wir $A^* \in \mathfrak{D}$ für $A \in \mathfrak{A}$, $B^* \in \mathfrak{B}$ für $B \in \mathfrak{B}$, $C^* \in \mathfrak{C}$ für $C \in \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}^* \in \mathfrak{A}$ für $D \in \mathfrak{D}$ durch

$$(14)\quad (Ax_0, f_0), = (x_0, A^*f_0),\ (Bx_0, y_0) = (x_0, B^*y_0),\ (Cf_0, g_0) = (f_0, C^*g_0),$$
$$(Df_0, x_0) = (f_0, D^*x_0)\,.$$

Dann wird jeder $H \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ bzw. der adjungierte H^* in der Form

$$(15)\qquad H\begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC \\ BD \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_0 + Cf_0 \\ Bx_0 + Df_0 \end{pmatrix},\quad H^* = \begin{pmatrix} D^*C^* \\ B^*A^* \end{pmatrix}$$

dargestellt.

---

1) Für den endlichdimensionalen Ring ist die Bedingungen (ii) und (iii'): aus $BA = 0(A \in \mathfrak{A})$ folgt $B = 0$ (diese Bedigung folgt aus (iii)) genügend, um den Ring aller Matrizen auf einem Grundkörper zu charakterisieren.

2) Vol. J. von Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperatoren und der Theroie der normalen Operatoren, Math. Ann. **102** (1929), Satz 8.

3) Die Bedingung $HH^* \neq 0$ für $H \neq 0$ gilt nicht. Z. B. sei $H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (vgl. (15)), dann ist $H^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix}$ und $H^*H = H \cdot H^* = 0$. Das in (13) definierte innere Produkt $((x_0 + f_0), (y_0 + g_0))$ ist, wie leicht zu rechnen wird, gleich $f_0(y_0) + g_0(x_0)$. Insbesondere ist $((x_0 + f_0), (x_0 + f_0)) = 2f_0(x_0)$. Dieses innere Produkt genügt den Eigenschaften (i), (ii), (iii), (vi) und nicht (iv), (v), (viii) im Beweis des Satzes 6.

Lemma 4. Wenn der Einheitsoperator I von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ in der Form $I=I_1+I_2$, $I_1I_2=I_2I_1=0$ zerlegt wird, dann können wir $\mathfrak{X}$ als die direkte Summe zweier B. R. daestellen.

Beweis. Es gilt $I_1=I_1^2+I_1I_2=I_1^2$ und $I_2^2=I_2$. Es seien dann $\mathfrak{M}_1=(x\,;\,I_1x=x,\,x\in\mathfrak{X})$, $\mathfrak{M}_2=(x\,;\,I_2x=x,\,x\in\mathfrak{X})$, so ist $\mathfrak{M}_1\frown\mathfrak{M}_2=0$, $\mathfrak{X}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$ (im algebraischen Sinne). Da $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ in $\mathfrak{X}$ abgeschlossen sind, sind sie B. R. Die direkte Summe $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$ ist also mit $\mathfrak{X}$ isomorph[1].

Satz 8. Wenn es eine Involution $A\rightarrow A^*$ von $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ mit (9), (10) *gibt, und I in der Form $I=I_0+I_0^*$, $I_0I_0^*=I_0^*I_0=0$ zerlegt wird, dann ist der B. R. $\mathfrak{X}$ mit einer direkte Summe $\mathfrak{X}_0+\overline{\mathfrak{X}}_0$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}_0\cong\mathfrak{X}_0$ isomorph und wird die Zuordnung $H\rightarrow H^*$ in der Form* (14), (15) *dargestellt.*

Beweis. Es sei wie im Lemma 4 $\mathfrak{X}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$ mit $I_1=I_0$ und $I_2=I_0^*$. Es seien ferner $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}$; $\mathfrak{A}=I_0\mathfrak{R}(\mathfrak{X})I_0$, $\mathfrak{B}=I_0^*\mathfrak{R}(\mathfrak{X})I_0$, $\mathfrak{C}=I_0\mathfrak{R}(\mathfrak{X})I_0^*$, $\mathfrak{D}=I_0^*\mathfrak{R}(\mathfrak{X})I_0^*$, dann gilt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\mathfrak{D}=\mathfrak{B}^2=\mathfrak{B}\mathfrak{D}=\mathfrak{C}\mathfrak{A}=\mathfrak{C}^2=\mathfrak{D}\mathfrak{A}=\mathfrak{D}\mathfrak{C}=0$, $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_2=0$, $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{M}_2=0$, $\mathfrak{B}\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{C}\mathfrak{M}_1=0$, $\mathfrak{C}\mathfrak{M}_2=\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{M}_1=0$, $\mathfrak{D}\mathfrak{M}_2=\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{A}=\mathfrak{R}(\mathfrak{M}_1)$, $\mathfrak{D}=\mathfrak{R}(\mathfrak{M}_2)$. Da $\mathfrak{A}^*=\mathfrak{D}$ gilt, folgt aus Satz 4 die Äquivalenz $\mathfrak{M}_1\cong\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_1\cong\mathfrak{M}_2$. Dabei ist A^* für $A\in\mathfrak{A}$ der konjugierte Operator von $A\in\mathfrak{R}(\mathfrak{M}_1)$. Für die direkte Zerlegung $\mathfrak{X}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$ sei $H\in\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ in der Form $H=\begin{pmatrix}A&C\\B&D\end{pmatrix}$ mit $A=I_0HI_0$, $B=I_0^*HI_0$, $C=I_0HI_0^*$, $D=I_0^*HI_0^*$ dargestellt, dann gilt $H^*=\begin{pmatrix}D^*&C^*\\B^*&A^*\end{pmatrix}$ mit $D^*=I_0H^*I_0$, $B^*=I_0^*H^*I_0$, $C^*=I_0H^*I_0^*$, $A^*=I_0^*H^*I_0^*$. Dass A^*, B^*, C^*, D^* der Relation (14) genügen, wird wie bei (vi) im Beweis von Satz 6 bewiesen, w. z. b. w.

1) Vgl. loc. cit. 2), Satz 5, S. 41.