5. *Bemerkungen über die p-wertigen Funktionen.*

Von Tokunosuke YOSIDA.
Marineingenieurschule.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Jan. 12, 1944.)

Herr L. Bieberbach hat den folgenden Satz[1] bewiesen:

$$w(z)=z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots$$

sei in $|z|>1$ *schlicht und regulär bis auf den im unendlich fernen gelegenen einfachen Pol. Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \leqq 1\,.$$

In der folgenden Zeilen wollen wir zunächst diesen Satz etwas erweitern und mit Hilfe des erweiterten Satzes einige Eigenschaften der p-wertigen Funktionen untersuchten. Die p-wertige Funktion ist die, welche keinen Wert mehr als p-mal annimmt.

Satz 1. $$w(z)=z+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots$$

sei in $|z|>1$ *regulär bis auf den im unendlich fernen gelegenen einfachen Pol und* $\big(w(z)\big)^p$ *in* $|z|>1$ *p-wertig. Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \leqq 1\,.$$

Beweis. Es sei $r>1$, und R so gross dass das Bild C_R auf der w-Ebene des Kreises $|z|=R$ durch die Funktion $w=w(z)$ einfach ist und das Bild von dem Kreis $|z|=r$ durch dieselbe Funktion völlig im Innen enthält. Der Kreis $|z|>1$ wird auf der Riemannsche Fläche W abgebildet.

Es sei $A(R)$ der Flächeninhalt des von C_R umgeschlossene Flächenstückes $B(R)$ auf der w-Ebene und $A(r,R)$ der Flächeninhalt des Bild $B(r,R)$ auf W von dem Kreisring $r<|z|<R$.

Da $\big(w(z)\big)^p$ p-wertig ist, so ist die Anzahl der Wurzeln in $r<|z|<R$ von der Gleichung

$$\prod_{\nu=0}^{p-1}\Big(w(z)-\alpha e^{\frac{2\nu\pi i}{p}}\Big)=0$$

nicht grösser als p für beliebige α. Wenn damit die Anzahl der über α liegenden Punkte auf $B(r,R)$ k ist, so liegen keine Punkte von $B(r,R)$ über die mindestens $(k-1)$ Punkte aus $\alpha e^{\frac{2\pi i}{p}}, \alpha e^{\frac{4\pi i}{p}}, \ldots, \alpha e^{\frac{2(p-1)\pi i}{p}}$. Daher ist

1) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, (1927).

$$A(r, R) \leqq A(R).$$

Da aber

$$A(r, R) = \int_r^R \int_0^{2\pi} |w'(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr$$

$$= \pi\left(R^2 - \frac{|a_1|^2}{R^2} - \frac{2|a_2|^2}{R^4} - \cdots\right) - \pi\left(r^2 - \frac{|a_1|^2}{r^2} - \frac{2|a_2|^2}{r^4} - \cdots\right),$$

und

$$A(R) = \int_{\theta=0}^{2\pi} u(\theta) dv(\theta) \qquad \left(u(\theta) + iv(\theta) = w(Re^{i\theta})\right)$$

$$= \pi\left(R^2 - \frac{|a_1|^2}{R^2} - \frac{2|a_2|^2}{R^4} - \cdots\right)$$

ist, so ist

$$\left(r^2 - \frac{|a_1|^2}{r^2} - \frac{2|a_2|^2}{r^4} - \cdots\right) \geqq 0.$$

Grenzübergang zu $r \to 1$ lehrt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leqq 1$$

ist.

Satz 2. $\qquad w(z) = z + a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{z^n} + \cdots$

sei in $|z| > 1$ regulär bis auf den im unendlich fernen gelegenen einfachen Pol und $(w(z))^p$ in $|z| > 1$ p-wertig. Dann ist $w(z)$ in $|z| > \sqrt{2}$ schlicht.

Beweis. Es ist für $|z| > \sqrt{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|z|^{2n+2}} < 1,$$

und nach dem Satz 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leqq 1.$$

Folglich ist, nach der Ungleichung von Schwarz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|a_n|}{|z|^{n+1}} < 1.$$

Es sei $|z_1| \geqq |z_2| > \sqrt{2}$, so ist

$$\left|\frac{w(z_1) - w(z_2)}{z_1 - z_2}\right| = \left|1 - \frac{a_1}{z_1 z_2} - \cdots - \left(\frac{1}{z_1^n z_2} + \frac{1}{z_1^{n-1} z_2^2} + \cdots + \frac{1}{z_1 z_2^n}\right) a_n - \cdots\right|$$

$$\geqq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|a_n|}{|z_2|^{n+1}} > 0.$$

Daher ist $w(z)$ in $|z| > \sqrt{2}$ schlicht.

Satz 3. $\qquad w(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \cdots + a_n z^n + \cdots$

sei in $|z| < 1$ regulär und p-wertig. Dann ist

$$|a_{p+1}| \leqq 2p.$$

Beweis. Es sei $f(z)=\left(w(z^{-2})\right)^{-\frac{1}{2p}}=z+\frac{c_1}{z}+\cdots+\frac{c_n}{z_n}+\cdots$ gesetzt, so ist $c_1=-\frac{a_{p+1}}{2p}$ und nach dem Satz 1 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\,c_n\,|^2\leqq 1$. Damit erhält man $|\,a_{p+1}\,|\leqq 2p$.

Diese Schranke kann nicht verbessert werden.

Satz 4. $\qquad w(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots+a_nz^n+\cdots$

sei in $|\,z\,|<1$ *regulär und p-wertig. Dann ist*

$$f(z)=\left(w(z)\right)^{\frac{1}{p}}=z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots$$

in $|\,z\,|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ *schlicht und regulär.*

Beweis. Es sei $g(z)=\left(f(z^{-1})\right)^{-1}=z+c_0+\frac{c_1}{z}+\cdots$, so ist nach dem Satz 2 $g(z)$ in $|\,z\,|>\sqrt{2}$ schlicht. Folglich ist $f(z)$ in $|\,z\,|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ schlicht und regulär.

Satz 5. $\qquad w(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots+a_nz^n+\cdots$

sei in $|\,z\,|<1$ *regulär und p-wertig. Dann ist für* $|\,z\,|<1$

$$|\,w(z)\,|\geqq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p\frac{|\,z\,|^p}{(1+|\,z\,|)^{2p}}\,.$$

Beweis. Da nach dem Satz 4 $f(z)=\left(w(z)\right)^{\frac{1}{p}}$ in $|\,z\,|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ schlicht und regulär ist, so ist nach dem Satz von Koebe für $|\,z\,|<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\,\sqrt{2}f(z)\,|\geqq\frac{\sqrt{2}\,|\,z\,|}{(1+\sqrt{2}\,|\,z\,|)^2}\,.$$

Daher ist es für $|\,z\,|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|f(z)\,|\geqq\frac{|\,z\,|}{(1+\sqrt{2}\,|\,z\,|)^2}\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}\;\frac{|\,z\,|}{(1+|\,z\,|)^2}\,.$$

Da $w(z)=\left(f(z)\right)^p$ in $|\,z\,|<1$ p-wertig, $f(z)$ in $|\,z\,|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ schlicht und

$$|\,w(z)\,|^{\frac{1}{p}}=|f(z)\,|>\frac{1}{4\sqrt{2}}\quad\text{für}\quad|\,z\,|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist, so ist $\qquad |f(z)\,|>\frac{1}{4\sqrt{2}}\quad$ für $\quad 1>|\,z\,|>\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$

Anderseits ist

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{2}}\;\frac{|\,z\,|}{(1+|\,z\,|)^2}\quad\text{für}\quad 1>|\,z\,|>\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Damit ist für $1 > |z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|f(z)| > \frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|z|}{(1+|z|)^2} .$$

Folglich schliesst man für $|z| < 1$

$$|w(z)| \geqq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}} . \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Nimmt mit dem von Herrn K. Joh und Y. Fukusima bewiesene Satz[1)] zusammen, haben wir die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}} \leqq |w(z)| \leqq 16^p \frac{|z|^p}{(1-|z|)^{2p}} .$$

1) K. Joh and Y. Fukusima, Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. **25** (1943).