15. Über einfache distributive Systeme unendlicher Ränge.

Von Tadasi NAKAYAMA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Nagoya.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1944.)

Vor kurzem hat A. Kurosch[1] die Brauer-Noethersche Theorie der direkten Produkte einfacher Algebren auf den Fall ohne Endlichkeitsbedingungen auszudehnen in Angriff genommen. Unter anderem hat er künstlich mit einer sehr interessanten und bedeutsamen Methode bewiesen, dass ein direktes Produkt zweier einfachen Ringe mit Einselementen, deren eines normal ist, wieder einfach ist, was auch die Einfachheit eines normal-einfachen Ringes bei Grundkörpererweiterungen zur Folge hat. Weiter bewies er, dass das Produkt eines normaleinfachen Ringes mit einem zu ihm reziprok-isomorphen Ringe fundamental[2] ist. Den Beweis des ersteren Satzes betreffend, möchte ich hier bemerken, dass er, jedoch es ist dort nicht ausdrücklich erwähnt, auch auf nicht-assoziative distributive Systeme angewandt werden kann.

Das Ziel der vorliegenden Note[3] besteht darin, auf einem anderen Wege die Theorie neu zu begründen. Unsere Methode hat den Vorteil, wie es mir scheint, dass sie im obigen ersteren Satz die Nebenbedingung über Einselemente zu schwächern ermöglicht und damit seinen begleitenden Satz über Grundkörpererweiterungen von der unangenehmen Annahme der Existenz des Einselementes befreit, was besonders bei allgemeinen distributive Systemen, wie Lieschen Ringen, von der Bedeutung sein mag. Die Vorliegende Behandlung bildet also auch eine Verallgemeinerung der Theorie der normal-einfachen distributiven Systeme endlicher Ränge, die u. a. von H. Landherr, N. Jacobson und M. Abe entwickelt worden ist[4]. Grundlegend für das folgende ist eine Theorie von C. Chevalley, die sich mit den Ringen mit einfachen oder voll-reduziblen treuen Darstellungsmoduln beschäftigt; Wir werden sie im Anhang der vorliegenden Note skizzieren, da sie, soviel ich weiss, noch nirgends publiziert ist.

Es sei nun R ein distributives System, d. h. eine additive Gruppe, in der eine Art von Multiplikation unter einzigen Bedingung definiert ist, dass sie beiderseitig-distributiv ist: $(a+b)c=ac+bc$, $c(a+b)=ca+cb$. R sei weiter als einfach angenommen, d. h. es gebe in R kein nicht-

---

1) A. Kurosch, Direct decompositions of simple rings, Recueil Math. **53** (1942).

2) Sieh unten Satz 3.

3) Ich bin Y. Matsushima für seine freundlichen Kritik und Bemerkungen zu meinem herzlichen Dank verpflichtet.

4) H. Landherr, Über einfache Liesche Ringe, Abb. Hamburg **11** (1936); N. Jacobson, Note on non-associative algebras, Duke Math. J. **3** (1937); M. Abe, Eine Bemerkung über einfache distributive Systeme, Proc. Imp. Acad. **16** (1940); M. Abe, Irreduzibilitität und absolute Irreduzibilität des Matrizensystems, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **24** (1942).

triviales Ideal und $RR \neq 0$[1]. Dann besitzt R keinen totalen Nullteiler, denn aus $aR = Ra = 0 (a \neq 0)$ würde folgen, dass der von a erzeugte Modul (a) ein von Null verschiedenenes Ideal von R bildet, also $(a) = R$, $RR = 0$ gegen die Annahme. Jedes Element a aus R induziert zweierlei Transformationen:

$$a_l: \ x \to ax, \qquad a_r: \ x \to xa \qquad (x \in R)$$

von R. Die Gesamtheit der Transformationen a_l, a_r erzeugt einen (assoziativen) Ring $\mathfrak{A}$, den wir den *Multiplikationsring* von R nennen, und den wir als Linksoperatorenring von R betrachten wollen. Dass R einfach ist, meint, dass der $\mathfrak{A}$-Linksmodul R einfach (=irreduzibel) und nicht total-annuliert ist. Bezeichnet man weiter mit $\mathfrak{K}$ den Endomorphismenring des $\mathfrak{A}$-Moduls R, so gilt

Hilfssatz. $\mathfrak{K}$ ist ein (kommutativer) Körper.

Beweis. Da der $\mathfrak{A}$-Modul einfach ist, ist $\mathfrak{K}$ ein Schiefkörper. Seine Kommutativität folgt aus $RR = R$ und $(ab)\varkappa\lambda = \big((ab)\varkappa\big)\lambda = \big(a(b\varkappa)\big)\lambda = (a\lambda)(b\varkappa) = \big((a\lambda)b\big)\varkappa = (ab)\lambda\varkappa (a, b \in R;\ \varkappa, \lambda \in \mathfrak{K})$.

Definition. Der Körper $\mathfrak{K}$ heisse das *erweiterte Zentrum* von R. R lässt sich als ein hyperkomplexes System (im allgemeinen vom unendlichen Range) über $\mathfrak{K}$ betrachten.

Definition. Die Gesamtheit $\mathfrak{Z}$ der Elemente z aus R, so dass $za = az$, $(ab)z = a(bz)$, $z(ab) = (za)b$ für je a, b in R, soll das *assoziative Zentrum* von R heissen. Indem wir z mit $z_l = z_r$ identifizieren, können wir $\mathfrak{Z}$ als einen Teilring (sowol von $\mathfrak{A}$ als auch) von $\mathfrak{K}$ auffassen. Zwar ist $\mathfrak{Z}$ dann ein Ideal von $\mathfrak{K}$, da $z_r\lambda = (z\lambda)_r$ und $z\lambda \in \mathfrak{Z} (\lambda \in \mathfrak{K})$ wie man leicht einsieht. Also gilt[2]: *Das assoziative Zentrum eines einfachen Systemes R ist entweder 0 oder ein Körper, welcher mit dem erweiterten Zentrum identifiziert werden kann. Das letztere ist (dann und) nur dann der Fall, wenn R ein Einselement e besitzt: $ae = ea = a$ $(a \in R)$.*

Nehmen wir an, dass R vornherein ein hyperkomplexes System (unendlichen Ranges) über einem Körper K ist, so lässt K sich als einen Teilkörper von $\mathfrak{K}$ betrachten.

Definition. R heisst *normal*, wenn das erweiterte Zentrum $\mathfrak{K}$ mit dem Grundkörper K übereinstimmt. Ersichtlich gilt dann: Ein einfaches System R ist normal, wenn man es als ein hyperkomplexes System über seinem erweiterten Zentrum $\mathfrak{K}$ ansieht. Wir kommen nun zu unserem Hauptresultat:

Satz 1[3][4]. *Es sei R ein einfaches, S ein normal-einfaches distribu-*

---

1) Also $RR = R$.

2) Vgl. Kurosch, l. c., Theorem 1 für den assoziativen Spezialfall.

3) Vgl. Kurosch, l. c., Theorem 2. Eine Prüfung zeigt, dass der dortige Beweis, wenn man die obige Bemerkung über das assoziative Zentrum eines einfachen Systems mit Einselement in Betracht zieht, auf den nicht-assoziativen Fall ausgedehnt werden kann. Für die Annahme der Existenz der Einselemente in *beiden* Faktoren R und S, die besonders in bezug auf den Satz der Grundkörpererweiterung normal-einfacher Systeme unwillkommen ist, leider scheint es mir, dass sie dort in vielleicht wesentlicher Weise benutzt ist.

4) Sogar im Fall endlicher Ränge scheint mir diese Fassung nirgends ausdrücklich erwähnt zu sein.

tives System über einem Körper K, und es besitze mindestens eines von ihnen ein Einselement[1]*. Dann ist das direkte Produkt $R\times S$ (über K) einfach, und sein erweitertes Zentrum fällt mit dem von R zusammen.*

Beweis. Seien $R=\sum u\mathfrak{K}$, $S=\sum vK$ direkte Zerlegungen von R und S in bezug auf ihre erweiterten Zentren. Es gilt $R\times S=\sum uv\mathfrak{K}$. Multiplikationsringen $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ von R,S lassen sich in natürlicher Weise als Operatorenbereiche vom Produktmodul $R\times S$ betrachten. Nimmt man hier die Existenz eines Einselementes e in R an, so ist $\mathfrak{B}$ ein Teilring des Multiplikationsringes $\mathfrak{C}$ des Produktes $R\times S$. Gegeben sind weiter $v_1, v_2, \dots, v_n\in S$ und $a\in R$, so wollen wir die Existenz eines Elementes c in $\mathfrak{C}$ zeigen, so dass $cw=a_lw=aw$ für jedes w aus $R\times\sum_1^n v_jK=\sum_1^n v_jR$[2]. Dazu sei b ein beliebiges Element von S derart $bS\neq 0$. Wir können dann endlich-viele Elemente $v_{n+1},\dots,v_f$ aus S so wählen, dass $b\sum_1^u v_jK\subseteqq\sum_1^f v_jK$ und $b\sum_1^f v_jK\neq 0$. Da nach Chevalley[3] alle linearen Transformationen vom endlichen Modul $\sum_1^f v_jK$ durch $\mathfrak{B}$ realisiert werden können, so folgt ohne Schwierigkeit, dass eine geeignete Produktsumme der Form

$$\sum b'_{\alpha_1}b''_{\alpha_2}\cdots b_l\bar{b}'_{\beta_1}\bar{b}''_{\beta_2}\cdots\quad(b',b'',\dots,\bar{b}',\bar{b}'',\dots\in S\,;\ \alpha,\beta=l\text{ or }r)$$

die identische Transformation in $\sum_1^n v_jK$ induziert. Dann bewirkt das Element

$$\sum(eb')_{\alpha_1}(eb'')_{\alpha_2}\cdots(ab)_l(e\bar{b}')_{\beta_1}(e\bar{b}'')_{\beta_2}\cdots$$

aus $\mathfrak{C}$ dieselbe Transformation wie a_l in $\sum_1^n v_jR$. Dies beweist unsere Behauptung. Die rechtseitige Multiplikation a_r behandelt man ähnlich, und daraus folgt, dass in bezug auf den Teilmodul $\sum_1^n v_jR$ alle Transformationen aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von den Elementen aus $\mathfrak{C}$ verursacht werden.

Da $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ die gesamten ($\mathfrak{K}$- bzw. K-) linearen Transformationen je eines endlichen Moduls $\sum_1^m u_i\mathfrak{K}$ bzw. $\sum_1^n v_jK$ realiziert, so sieht man ein, dass alle ($\mathfrak{K}$-) linearen Transformationen eines endlichen Moduls $\sum u_iv_j\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{C}$ vermittelt werden können. Daher gilt $\mathfrak{C}w=R\times S$ für jedes nicht-verschwindende w aus $R\times S$, d. h. $\mathfrak{C}$-Modul $R\times S$ ist einfach, oder, was dasselbe ist, das Produktsystem $R\times S$ ist einfach. Weiter überzeugt man sich leicht davon, dass der Endomorphismenkörper vom $\mathfrak{C}$-Modul $R\times S$ genau der Körper $\mathfrak{K}$ ist.

Der Fall, wo S ein Einselement besitzt, lässt sich in ganz ähnlicher Weise erledigen, und damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Die Bedingung, dass R oder S ein Einselement haben soll, ist gewiss nicht vergeblich. Sei nämlich etwa $R=u_1K+u_3K$ ein distributives System mit der Multiplikation:

$$u_1^2=u_2^2=0\,,\qquad u_1u_2=u_2\,,\qquad u_2u_1=u_1\,.$$

R ist normal-einfach, aber $R\times R$ ist nicht einfach, wie man leicht sieht. Wir können doch die Bedingung durch die folgende etwas schwächere ersetzen: für je endliche Anzahl von Elementen $u_1, u_2, \cdots u_m$ aus R

---

1) Vgl. die Bemerkung unten.

2) Für (sowohl das Korollar als auch) den Satz 2 (unten) ist diese etwas verwickelte Beweisführung unnötig.

3) Sieh den Anhang.

(oder S) sollen zwei Elemente a_1 und a_2 in R (oder S) existieren, so dass $a_1u_i=u_ia_2=u_i(i=1, 2, \ldots, m)$ gilt. Dies sieht man aus unserem Beweis unmittelbar ein.

Korollar. Ein direktes Produkt von normal-einfachen distributiven Systemen mit Einselementen ist normal-einfach.

Nimmt man nun als R einen Körper $L\supset K$, so erhält man die erste Hälfte vom folgenden

Satz 2. Dann und nur dann bleibt ein einfaches distributives hyperkomplexes System für jede (algebraische oder transzendente) Grundkörpererweiterung einfach, wenn es normal ist.

Um die zweite Hälfte zu erledigen, nehme man das erweiterte Zentrum $\mathfrak{L}$ von S als echten Oberkörper von K an, und sei L ein zu $\mathfrak{L}$ isomorpher Körper über K. Dann besitzt $L\times\mathfrak{L}$ bekanntlich ein nicht-triviales Ideal $\mathfrak{l}$[1], und der echte Teilmodul $S_{\mathfrak{l}}$ von S_L ist zulässig in bezug auf $\mathfrak{B}$ und L. Daher ist $S_{\mathfrak{l}}$ ein echtes Ideal von S_L, womit ist der Satz bewiesen.

Den assoziativen Fall betreffend, können wir leicht zeigen:

Satz 3[2]. *Ist R ein normal-einfacher (assoziativer) Ring mit Einselement über einem Körper K, und ist R' mit R reziprok-isomorph, so ist das derekte Produkt $R\times R'$ fundamental, d. h. es besitzt einen einfachen Darstellungsmodul, dessen Endomorphismenschiefkörper mit dem Grundkörper K übereinstimmt.*

Beweis. Nach der Assoziativität ist der Links- bzw. Rechtsmultiplikationsring von R mit R bzw. R' isomorph. Da sie weiter miteinander elementweise kommutativ sind, ist der Multiplikationsring $\mathfrak{A}$ von R homomorph zu $R\times R'$: $\mathfrak{A}\sim R\times R'$. R ist ein einfacher Darstellungsmodul von $\mathfrak{A}$, also von $R\times R'$, dessen Endomorphismenkörper voraussetzungsgemäss mit K zusammenfällt, was den Satz beweist.

Unser Satz 2 beschäftigt sich zwar mit dem Verhalten eines einfachen Darstellungsmoduls bei Grundkörpererweiterungen, und die Beziehungen zwischen absolut und nicht-absolut irreduziblen Darstellungen, wie sie von E. Bannow und M. Abe betrachtet wurden[3], können tatsächlich von den Endlichkeitsbedingungen befreit werden. Darauf wollen wir doch an anderer Stelle zurückkehren.

Anhang: C. Chevalleys Theorie der Ringe mit einfachen oder voll-reduziblen treuen Darstellungsmoduln[4].

Es sei $\mathfrak{A}$ ein Ring und es gebe einen einfachen (=irreduziblen) $\mathfrak{A}$-Linksmodul $\mathfrak{m}$, so dass $a\mathfrak{m}(a\in\mathfrak{A})$ nur dann verschwindet, wenn $a=0$ ist[5]; wir sagen, dass $\mathfrak{m}$ ein treuer Darstellungsmodul von $\mathfrak{A}$ ist. $\mathfrak{K}$

1) Z. B. sei $\mathfrak{l}$ das Kern-Ideal des Homomorphismus $L\times\mathfrak{L}\to L$.

2) Kurosch, l. c., Theorem 6. Unsere Fassung ist doch allgemeiner als dortige, da wir hier die Existenz des Einselementes nicht voraussetzen.

3) E. Bannow, Die Automorphismengruppe der Cayley-Zahlen, Abh. Hamburg **13** (1940); M. Abe, l. c. (letzterer).

4) "Math. Club" Princeton, 1939.

5) Dann ist $\mathfrak{A}u=\mathfrak{m}$ für jedes $u\neq 0$ aus $\mathfrak{m}$, wie man unmittelbar einsieht.

sei der Endomorphismenschiefkörper vom $\mathfrak{A}$-Modul $\mathfrak{m}$. $\mathfrak{m}$ lässt sich auch als einen $\mathfrak{K}$-Rechtsmodul, also als $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{K}$-Doppelmodul, betrachten.

Hilfssatz 1. Es sei $\mathfrak{m}=\sum u\mathfrak{K}(u\in\{u\}=U)$ *eine* (*eingeschränkte* (=*restricted*)) *direkte Zerlegung von* $\mathfrak{m}$ *in einfache* $\mathfrak{K}$-*Moduln* $u\mathfrak{K}$. *Man nehme beliebige endlich-viele Elemente* $u_1, u_2 \dots, u_n$ *aus* U. *Dann gibt es in* $\mathfrak{A}$ *ein System von Elementen* $e_1, e_2, \dots, e_n$, *so dass*

$$e_i u_j = \begin{cases} u_i & (j=i) \\ 0 & (j\neq i) \end{cases}$$

gilt.

Beweis nach Induktion. Wir nehmen die Gültigkeit der Behauptung für $n(\geqq 0)$ an, und wollen die für $n+1$ zeigen. Dazu sei u_0 ein von $u_1, u_2, \dots, u_n$ verschiedenes Element aus U, und sei $\mathfrak{L}$ das annullierende (Links-) Ideal in $\mathfrak{A}$ von $u_1, u_2, \dots, u_n$; $\mathfrak{L}=[x \mid x\in\mathfrak{A},\ xu_i=0(i=1,2,\dots,n)]$. Wir zeigen $\mathfrak{L}u_0\neq 0$. Man nehme nämlich $\mathfrak{L}u_0=0$ an, gegen die Behauptung, und sei y ein Element aus $\mathfrak{A}$, so dass $yu_i=0$ für ein i $(1\leqq i\leqq n)$. Dann $ye_i\in\mathfrak{L}$, weil $ye_iu_i=yu_i=0$ und weiter $ye_iu_j=0$ für $j\neq i$ ist. Nach unserer Annahme ist also $ye_iu_0=0$. Dies zeigt aber, dass die Zuordnung $\varkappa_i: xu_i\rightarrow xe_iu_0(x\in\mathfrak{A})$ ein wohl definierter Endomorphismus von $\mathfrak{m}(=\mathfrak{A}u_i=\mathfrak{A}u_0)$ ist. Es gilt $u_i\varkappa_i=e_iu_i\varkappa_i=e_ie_iu_0=e_iu_0$, da $e_i^2-e_i\in\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}u_0=0$ voraussetzungsgemäss. Setzt man nun $e=\sum_1^n e_i$, so annulliert $x-xe$ mit beliebiges $x\in\mathfrak{A}$ die Elemente $u_1, u_2, \dots, u_n$, d. h. $x-xe\in\mathfrak{L}$, und $(x-xe)u_0=x(u_0-eu_0)=0$. Also $\mathfrak{A}(u_0-eu_0)=0$, $u_0-eu_0=0$, $u_0=eu_0=\sum_1^n e_iu_0=\sum u_i\varkappa_i\in\sum_1^n u_i\mathfrak{K}$, gegen die Annahme. Daher muss $\mathfrak{L}u_0\neq 0$ sein, wie oben behauptet wurde.

Es gilt also $\mathfrak{L}u_0=\mathfrak{A}u_0\ni u_0$, und es gibt ein e_0 in $\mathfrak{L}$, so dass $e_0u_0=u_0$. Weiter ist $e_iu_0=x_iu_0$ für geeignetes x_i aus $\mathfrak{L}$, da $e_iu_0\in\mathfrak{A}u_0=\mathfrak{L}u_0$ ist. Dann genügen die $n+1$ Elemente $e_0'=e_0$, $e_1'=e_1-x_1, \dots, e_n'=e_n-x_n$ unserer Forderung bezüglich $u_0, u_1, \dots, u_n$. Der Hilfssatz ist so bewiesen.

Es sei $\overline{\mathfrak{A}}$ der Ring aller Endomorphismen (d. h. $\mathfrak{K}$-linearen Transformationen) vom $\mathfrak{K}$-Modul $\mathfrak{m}$, den wir, wie $\mathfrak{A}$, als einen Linksoperatorenring von $\mathfrak{m}$ auffassen[1]. Also $\mathfrak{K}\leqq\overline{\mathfrak{A}}$. Da $\mathfrak{m}$ einfach ist, gilt $\mathfrak{A}u=\overline{\mathfrak{A}}u$ für je $u\in\mathfrak{m}$.

Hilfssatz 2. Es sei $u_1, u_2, \dots, u_n$ *beliebige endlich-viele Elemente aus* $\mathfrak{m}$. *Für jedes Element* A *aus* $\overline{\mathfrak{A}}$ *gibt es ein* $a\in\mathfrak{A}$ *derart, dass* $Au_i=au_i$ *für jedes* $i=1,2,\dots,n$ *gilt.*

Beweis. Es genügt den Fall zu betrachten, wo die Summe $\sum u_i\mathfrak{K}$ direkt ist. Es gibt a_i in $\mathfrak{A}$, so dass $Au_i=a_iu_i(i=1,2,\dots,n)$. Setzt man $a=\sum_1^n a_ie_i$ mit den Elementen e_i im Hilfssatz 1, so gilt $Au_i=au_i$ für $i=1,2,\dots,n$.

Dieser Hilfssatz sagt, dass $\mathfrak{A}$ *in* $\overline{\mathfrak{A}}$ *im Sinne der schwachen Topologie von Abbildungen* (*in sich*) *im* (*diskreten*) *Modul* $\mathfrak{m}$ *überalldicht ist.* Wir haben im obigen uns auf den unseren Zweck betreffenden Fall des einfachen Darstellungsmoduls beschränkt, jedoch Chevalleys Theorie beschäftigt sich vielmehr allgemeiner mit voll-reduziblen treuen Darstellungsmoduln. Es sei nämlich $\mathfrak{m}$ ein *voll-reduzibler*[2] *treuer*

1) $\overline{\mathfrak{A}}$ ist isomorph zum Ring aller spalten-finiten $\mathfrak{K}$-Matrizen von Grade=(Potenz U).

2) D. h. $\mathfrak{m}$ ist die Summe von (endlich oder unendlich vielen) einfachen (zulässigen) Teilmoduln.

Darstellungsmodul eines Ringes $\mathfrak{A}$; wir nehmen an, dass aus $\mathfrak{A}u=0$ $(u \in \mathfrak{m})$ $u=0$ folgt. $\mathfrak{K}$ sei der Endomorphismen-*ring* von $\mathfrak{m}$. Dann gilt

Hilfssatz 0. $\mathfrak{K}$-Rechtsmodul $\mathfrak{m}$ *is voll-reduzibel.*

Beweis. u sei ein Element $\neq 0$ aus einem einfachen Teilmodul von $\mathfrak{m}$. Dann stimmt $\mathfrak{A}u$ mit dem betreffenden Teilmodul überein, also $u \in \mathfrak{A}u$. Wir zeigen, dass der $\mathfrak{K}$-Modul $u\mathfrak{K}$ einfach ist. Zunächst ist $u\mathfrak{K} \neq 0$, da $u \in u\mathfrak{K}$. Sei $v(\neq 0) \in u\mathfrak{K}$, also $v=u\kappa (\kappa \in \mathfrak{K})$. Dann $\mathfrak{A}u\kappa \ni u\kappa = v \neq 0$. Da $\mathfrak{A}u$ einfach ist, bildet κ den $\mathfrak{A}$-Modul $\mathfrak{A}u$ isomorph auf $\mathfrak{A}v=\mathfrak{A}u\kappa$. κ_1 sei die inverse Abbildung von $\mathfrak{A}v$ auf $\mathfrak{A}u$. Weil $\mathfrak{A}v$ ein direkter Summand von $\mathfrak{m}$ ist, können wir κ_1 zu einem Endomorphismus κ' des ganzen Moduls $\mathfrak{m}$ erweitern, womit haben wir $u\kappa\kappa'=u$, d. h. $v\kappa'=u$, $u \in v\mathfrak{K}$, $u\mathfrak{K}=v\mathfrak{K}$. Dies zeigt, dass $u\mathfrak{K}$ einfach ist.

Da $\mathfrak{m}$ aus den u der betrachteten Art erzeugt ist, folgt unmittelbar, dass $\mathfrak{m}$ die Summe der einfachen $\mathfrak{K}$-Moduln $u\mathfrak{K}$ ist, w. z. b. w.

Der obige Hilfssatz 1 wird dann wörtlich auf den gegenwärtigen Fall ausgedehnt, indem wir in seinem Beweis die Abbildungen κ_i durch ihre Erweiterungsendomorphismen ersetzen. Bezeichnet man weiter mit $\overline{\mathfrak{A}}$ wieder den Ring aller Endomorphismen vom $\mathfrak{K}$-Modul $\mathfrak{m}$, so gilt

Hilfssatz 1'. Es ist $\overline{\mathfrak{A}}u=\mathfrak{A}u$ für jedes $u \in \mathfrak{m}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{m}=\mathfrak{A}u+\mathfrak{m}_1$. Die Abbildung $\lambda: au \to au,\ \mathfrak{m}_1 \to 0$ ist ein $\mathfrak{A}$-Endomorphismus von $\mathfrak{m}$. Nun sei $A \in \overline{\mathfrak{A}}$. Dann ist $A(u\lambda)=(Au)\lambda$. Ist hier $Au=au+v (a \in \mathfrak{A},\ v \in \mathfrak{m}_1)$, so gilt $au+v=Au=A(u\lambda)$[1] $=(Au)\lambda=(au)\lambda+v\lambda=(au)\lambda=a(u\lambda)=au$. Also $Au=au$ und $\overline{\mathfrak{A}}u=\mathfrak{A}u$.

Hiermit können wir auch den Hilfssatz 2, also die ganze Theorie, auf den jetzigen allgemeinen Fall übertragen.

1) Vgl. den (verallgemeinerten) Hilfssatz 1.