136. Über die Untergruppen geschlossener Liescher Gruppen.

Von Ryoji SHIZUMA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Nagoya.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 13, 1944.)

Die Homologie-Eigenschaften von Gruppen-Mannigfaltigkeiten sind von mehreren Autoren in vollem Umfange untersucht worden;[1] es ist aber nicht daran zu zweifeln, dasz die topologische Eigenschaften der Gruppen-Mannigfaltigkeiten schärferen Bedingungen unterliegen. Hier liegt gewiss eine wichtige Aufgabe vor, die zur näheren Untersuchung ihrer Beziehungen zwingt. Im folgenden werden einige hierhergehörige Sätze bewiesen.

Der Rang einer geschlossenen Lieschen Gruppe G ist definitionsgemäss die grösste Zahl r von der Eigenschaft, dasz es in G eine r-dimensionale Abelsche Untergruppe gibt. Es ist nun folgendes bekannt: der Homologie-Schnittring $\mathfrak{R}(G)$ — in Bezug auf den Koeffizientenbereich der rationalen Zahlen — einer geschlossenen Gruppe G ist dimensionstreu isomorph dem Homologie-Ring eines topologischen Produktes

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r, \qquad r \geqq 1$$

wobei die S_i Sphären von ungeraden Dimensionen sind. Der Rang von G ist gleich der Anzahl der Faktoren in diesem Sphärenprodukt. Auf Grund dieses Satzes ergibt sich insbesondere:

Die Summe der Bettischen Zahlen einer geschlossenen Gruppe vom Range r ist gleich 2^r (Cartan).

1. Für das Weitere ist es angebracht, den Begriff der Pontrjaginschen Produktbildung einzuführen. Wir beginnen mit der Erklärung des singulären Simplexes in der Gruppen-Mannigfaltigkeit G[2]. Es ist bekanntlich der Inbegriff zweier Bestandteile, nämlich erstens eines r-dimensionalen Euklidischen Simplexes T, zweitens einer eindeutigen und stetigen Abbildung f von T in G. Wir bezeichnen sie mit $f(T)$. Zwei Parameterdarstellungen $f(T)$, $f'(T')$ sind äquivalent oder stellen dasselbe singuläre Simplex dar, wenn T und T' isomorph sind, und zwar so, dass es eine solche nicht-singuläre affine Abbildung τ von T auf T' gibt, dass erstens $T'=\tau(T)$ ist, und zweitens die durch τ bestimmte Abbildung zwischen f und f' die Beziehung $f=f'\tau$ herstellt. Ein singuläres Simplex wird orientiert, indem das Urbild T orientiert wird. Ein singulärer r-dimensionaler algebraischer Komplex besteht aus endlich vielen singulären r-dimensionalen Simplexen von G, deren jedes mit einer bestimmten Orientierung und einer bestimmten

---

1) Ich nenne neben Cartan vor allem Pontrjagin und Hopf. Vgl. L. Pontrjagin: Homologies in compact Lie groups, Rec. Math. **6** (1939), 389-422., sowie

H. Hopf: Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, Ann. of Math. **42** (1941), 22-32.

2) Vgl. hierzu, S. Lefschetz: Singular and continuous complexes, chains and cycles. Rec. Math. **3** (1936), 271-285

rationalen Vielfachheit versehen ist[1]. Unter dem Rand des orientierten singulären Simplexes $f(T^r)$ wird der Komplex $\sum_\nu f(T_\nu^{r-1})$, der aus singulären $r-1$ -dimensionalen Seitensimplexen besteht. Verschwindet der Rand des algebraischen singulären Komplexes, so heisst er ein singulärer Zyklus. Der Zyklus. heisst homolog Null, falls er Rand eines algebraischen Komplexes ist.

Der Homologiebegriff führt in bekannter Weise zur Einteilung der Gesamtheit aller r-dimensionalen Zyklen in Homologieklassen ; diese bilden bezüglich der Addition eine Abelsche Gruppe — die r-dimensionale Bettische Gruppe.

Für diese Homologieklasse erklärt man weiter das Pontrjaginsche Produkt folgendermassen: Zwei Simplexe $f(T)$, $f'(T')$ seien orientiert; wir erteilen jetzt auch einer Zelle $T\times T'$ eine bestimmte Orientiertung; die orientierten Zellen nennen wir S. Jedem Punkte $z=(x, y)$ aus S ordnet man den Punkt $h(z)=f(x)f'(y)$[2] zu; somit erhalten wir eine Abbildung h von S in G. Wir dürfen daher $h(S)$ als Produkt zweier Simplexen $f(T)$ und $f'(T')$ definieren. In ganz naheliegender Weise lässt sich das Gruppenprodukt XY zweier Zyklen X, Y definieren; wenn die Zyklen X und Y innerhalb ihrer Homologieklassen durchlaufen, so ändert sich die Homologieklasse von XY nicht. Auf Grund dieser Tatsache dürfen wir kurz vom Produkt der Homologieklassen sprechen. Somit lässt sich die additive Gruppe der Homologieklassen für eine Gruppen-Mannigfaltigkeit G zu einem Ring machen, der übrigens mit dem gewöhnlichen Homologie-Schnittring $\mathfrak{R}(G)$ in engem Zusammenhang steht.

2. Es sei G wie immer eine geschlossene Liesche Gruppe. Unter dem Teiler verstehen wir diejenige abgeschlossene Untergruppe[3] von G, der nicht ~ 0 in G ist[4]. Eine Reihe von Untergruppen in G:

$$G\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_l=e$$

heisst Normalreihe, wenn für $\nu=1, 2, \ldots, l$ jedes G_ν Teiler von $G_{\nu-1}$ ist.

Unsere Behauptung lautet:

Satz. Der Rang von G sei r. Für jede Normalreihe

$$G\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_l=e$$

ist die Anzahl $l\leqq r$.

Beweis[5]. Es sei G' Teiler von G, der also nicht ~ 0 in G ist;

---

1) Als Koeffizientenbereich soll immer der Körper der rationalen Zahlen dienen.

2) Gruppenprodukt!

3) Sie ist bekanntlich ebenfalls eine geschlossene Liesche Gruppe.

4) Dieser Begriff rührt von Lusternik und Schnirelmann her. Vgl. Méthode topologiques dans les problèmes variationelles, Actual. Scient. (1943). Man vergl. auch L. Elsholz: Die Länge einer Mannigfaltigkeit und ihre Eigenschaften. Rec. Math. **5** (1939), 565-571, (in russ. Spr.), sowie R. H. Fox: On the Lusternik-Schnirelamann Category, Ann. of Math. **42** (1941) 333-370.

Dabei verdient folgende Tatsache Erwähnung: für die Gruppen-Mannigfaltigkeiten ist die hiesige Definition mit der üblichen gleichwertig, wie man aus dem Beweis des nachstehenden Satzes leicht abliest.

5) Der Beweis verläuft wie bei Pontrjagin, a.a.O..

ferner sei $\{Z_i\}$ die Menge von Zyklen in G', die in G' voneinander unabhängig sind. Wir wählen zu diesem G' einen Zyklus W so, dass G' und W nur den einen Punkt, nämlich Einheit e, gemein haben. Mit ZW bezeichen wir wie oben das Gruppenprodukt von Z mit W.

Zunächst stellen wir fest: Ist X nicht ~ 0 in G', so ist X bzw. XW nicht ~ 0 in G. Es sei nämlich X nicht ~ 0 in G'. Sodann gibt es in G einen Zyklus derart, dass ihre Schnittzahl in bezug auf G' $s_{G'}(X, Y) \neq 0$ ist. Da W und G' nur einen einzigen gemeinsamen Punkt e haben, folgt offenbar

$$s_G(X, YW) = \pm s_{G'}(X, Y).$$

Daraus erhält man immerhin $s_G(X, YW) \neq 0$ und $s_G(XW, Y) \neq 0$. Dies bedeutet nun, dass X und XW nicht ~ 0 in G sind.

Wir zeigen jetzt, dass $\{Z_i\}$ und $\{Z_j W\}$ in G unabhängig sind. Gesetzt nämlich, X sei $\sim YW$ in G, wobei X, Y in G' ist. Dann genügt es zu zeigen, dass $X \sim Y \sim 0$ in G' gilt. Wir wählen einen Punkt p ausserhalb von G'. Es ist ohne weiteres klar, dass $X \sim X_p$ gilt.

Infolge der Annahme $X \sim YW$ in G folgt nun

$$X - YW \sim X_p - YW \sim 0 \qquad \text{in } G.$$

Der Schnittzyklus von G' mit demjenigen, der ~ 0 in G, ist ~ 0 in G'. Wegen

$$(X_p - YW) \circ G' = \pm Y$$

erhält man also

$$Y \sim 0 \quad \text{in} \quad G',$$

woraus $YW \sim 0$ in G folgt. Es ist also $X \sim 0$ in G; folglich ist nach dem oben Gesagten $X \sim 0$ in G'.

Aus dem Bewiesenen folgt unmittelbar: die Summe der Bettischen Zahlen von G ist wenigstens zweimal so gross als diejenige von G'. Wendet man dieselbe Schlussweise auf Normalreihe

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_l = e$$

schrittweise an, so überzeugt man sich leicht davon, dass es in G wenigstens 2^l unabhängige Zyklen gibt. Nach dem anfangs genannten Cartanschen Satz ist die Summe der Bettischen Zahlen von G gleich 2^r. Daraus folgt $l \leqq r$ w.z.b.w.

Die damit bewiesene Tatsache können wir kurz so aussprechen:

Die Länge der Gruppen-Mannigfaltigkeit ist höchstens gleich dem Rang. Dabei versteht man unter der Länge von G die grösste ganze Zahl l von der Eigenschaft, dass es eine Normalreihe

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_l = e$$

gibt, deren Anzahl l ist.

Wir betrachten nun beispielsweise die Drehungsgruppe D^n in n Dimensionen. Pontrjagin hat rechnerisch — unter Heranziehung der oben genannten Gruppenbildung — die Homologiebasis geschlossener

Liescher Gruppen aufgezählt. Im Laufe seiner Überlegungen ergibt sich leicht das folgende Resultat:

Die Drehungsgruppe hat folgende Normalreihe, je nachdem n gerade oder ungerade ist,

$$D^{2d} \supset D^{2d-1} \supset D^{2d-3} \supset \cdots \supset e\,,$$

$$D^{2d+1} \supset D^{2d-1} \supset D^{2d-3} \supset \cdots \supset e\,.$$

Infolgedessen muss jede Untergruppe D^{2m} gerader Dimensionen notwendig ~ 0 sein.

Weiter heben wir noch den Zusammenhang hervor, der zwischen Länge und Rang besteht. Die Länge von G stimmt mit dem Rang überein, falls man als G die einfache geschlossene Liesche Gruppe wählt, welche den vier grossen Klassen in der Killing-Cartanschen Aufzählung angehört.

3. Neuerdings haben sich Hopf und Samelson in einer Reihe von Arbeiten mit den topologischen Eigenschaften der Wirkungsräume geschlossener Liecher Gruppen beschäftigt[1]. Die Charakteristik eines solchen Wirkungsraumes ist, wie sie gezeigt haben, positiv oder Null. Daraus ergibt sich unmittelbar folgende Tatsache:

G sei eine geschlossene Liesche Gruppe; ferner sei T ein maximales Toroid in G; dann *ist die Dimension des Wirkungsraumes G/T immer gerade.* Denn die Euler-Poincarésche Charakteristik χ des Wirkungsraumes G/T ist immer positiv; daher kann es nie ungerade sein, da sonst $\chi = 0$ wäre.

Wir betrachten jetzt die Drehungsgruppe D^3 in drei Dimensionen. Dann gilt folgender

Satz. D^3 hat keine andere zusammenhängende Untergruppe als die Kreislinie T^1[2].

Beweis. Zunächst beweisen wir, dass D^3 keine Torus $T^2 = T^1 \times T^1$ enthält. Man nehme an, T^2 wäre ein maximales Toroid in D^3. Dann ist $\chi(D^3/T^2) > 0$. Das ist aber nicht der Fall, da $\dim(D^3/T^2) = 1$ ist.

Wir dehmen jetzt an, — im Gegensatz zu dem zu beweisenden Satz — dass D^3 eine solche $\bar{D}$ enthält. Ein maximales Toroid von $\bar{D}$ sei $\bar{T}$. Mit denselben Schlüssen wie oben erhält man $\chi(\bar{D}/\bar{T}) > 0$. Mithin ist dim $(\bar{D}/\bar{T})$ gerade. Andererseits muss $\bar{D}$ 2-dimensional sein, was unmöglich ist, denn es ist ja dim $(\bar{D}/\bar{T}) = 1$. Damit ist alles bewiesen.

Zum Schluss will ich im Anschluss an das Vorige eine Vermutung äussern. Es sei D^n wie vorher Drehungsgruppe in n Dimensionen. Die höchst-dimensionale abgeschlossene Untergruppe von D^n ist eine Drehungsgruppe in $n-1$ Dimensionen. Solche Untergruppe sind also miteinander konjugiert.

---

1) Vgl. insbesondere, H. Hopf und H. Samelson: Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen, Comment. Math. Helv. **13** (1941).

2) Vgl. diesbezüglich, D. Mongomery and L. Zippin: A theorem on rotation group of the two sphere, Bull. Amer. Tr. **46** (1940), 520-521. Dieser Satz ist übrigens eine leichte Folge aus dem unsrigen.