144. Über normale antilineare Transformationen.

Von Kiiti MORITA.

Tokyo Bunrika Daigaku.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1944.)

Eine wichtige Verallgemeinerung der linearen Transformationen bilden die antilineare Transformationen. Das Ziel der vorliegenden Note ist den Begriff der normalen antilinearen Transformationen einzuführen und dann einige Sätze zu beweisen, die die Analoga der bekannten Sätze über normale lineare Transformationen sind.

1. *Definitionen und Sätze.* Im folgenden handelt es sich hauptsächlich um quadratische Matrizen mit den Elementen aus dem Körper aller komplexen Zahlen. Die transponierte bzw. konjugiert-komplexe Matrix von einer Matrix A sei mit A' bzw. $\bar{A}$ bezeichnet.

In dem n-dimensionalen, komplexen Vektorraum $\mathfrak{M}$ definieren die Formeln

$$x_j' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\bar{x}_k\,, \qquad j=1, 2, \dots, n$$

eine antilineare Transformation, die mit $[A]$ bezeichnet werden soll, wobei $A=(a_{jk})$ gesetzt ist. Zwei antilineare Transformationen $[A]$, $[B]$ in $\mathfrak{M}$ mögen einander ähnlich genannt werden, wenn es eine reguläre Matrix P des Grades n gibt, so dass die Gleichung $P^{-1}A\bar{P}=B$ besteht. Ist dabei P eine unitäre Matrix, d. h. gibt es eine unitäre Matrix U, so dass $U'AU=B$ gilt, so heissen $[A]$ und $[B]$ einander *unitärähnlich.*

Definition. Ist $[A]$ mit $[A']$ vertauschbar, d. h. ist das Produkt $[A][A']$ gleich dem Produkt $[A'][A]$, so heisst $[A]$ eine *normale antilineare Transformation.*

Definition. Eine Matrix A heisst *quasinormal,* wenn die Relation $A\bar{A}'=A'\bar{A}$ besteht.

Die Beziehung zwischen diesen Definitionen ist klar; $[A]$ ist dann und nur dann normal, wenn A eine quasinormale Matrix ist. Für eine unitäre Matrix U sind die antilineare Transformationen $[A]$ und $[U'AU]$ gleichzeitig normal oder nicht normal. Symmetrische, schiefsymmetrische, unitäre sowie reell-normale Matrizen sind alle quasinormal. Daher mögen die quasinormalen Matrizen als eine Verallgemeinerung der reell-normalen Matrizen angesehen werden.

Nun gilt der folgende

Satz 1. Für eine quasinormale Matrix A des Grades n gibt es stets eine unitäre Matrix U des gleichen Grades, so dass die Matrix $U'AU$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & & & & \\ -b_1 & a_1 & & & & & & & \\ & & a_2 & b_2 & & & & 0 & \\ & & -b_2 & a_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_r & b_r & & \\ & 0 & & & & -b_r & a_r & & \\ & & & & & & & a_{r+1} & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & a_s \end{pmatrix}$$

hat, wobei a_j, b_k reelle, nichtnegative Zahlen bedeuten.

Bemerkung. Für eine symmetrische bzw. schiefsymmetrische Matrix sind die b_k bzw. a_j in der obigen Normalform gleich Null[1].

Aus diesem Satz folgt unmittelbar der

Satz 2. Zwei normale antilineare Transformationen $[A]$ und $[B]$ sind dann und nur dann unitär-ähnlich, wenn die beiden Matrizen $A\bar{A}$ und $B\bar{B}$ im gewöhnlichen Sinne ähnlich sind[2].

Im Fall, wenn $A\bar{A}$ eine reelle Matrix ist, lässt sich Satz 1 folgendermassen verschärfen.

Satz 3. Ist A eine quasinormale Matrix derart, dass $A\bar{A}$ eine reelle Matrix ist, so gibt es eine reelle orthogonale Matrix T, so dass $T'AT$ die im Satz 1 genannte Form mit komplexen Zahlen a_j, b_k besitzt.

Entsprechend dem Fall der normalen linearen Transformationen erhalten wir weiter den

Satz 4. Wenn normale antilineare Transformationen $[A_1], \cdots, [A_m]$, $[A'_1], \cdots, [A'_m]$ miteinander vertauschbar sind, so gibt es eine unitäre Matrix U derart, dass sämtliche Matrizen $U'A_1U, \cdots, U'A_mU$ die im Satz 1 genannte Normalform mit reellen a_j, b_k haben.

Sind insbesondere alle A_j reell, so kann man annehmen, dass die unitäre Matrix U auch reell ist.

Für allgemeine Matrizen gilt der

Satz 5. Für eine beliebige Matrix A gibt es eine unitäre Matrix U, so dass $U'AU$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A_{11} A_{12} \cdots A_{1m} \\ \quad A_{22} \cdots A_{2m} \\ 0 \quad \ddots \\ \qquad A_{mm} \end{pmatrix}$$

hat, wobei der Grad der Teilmatrizen A_{jj} gleich 1 oder 2 ist.

---

1) K. Morita, Proc. **17** (1941), 233.

2) Ist A quasinormal, so ist $A\bar{A}$ im gewöhnlichen Sinne normal; die Umkehrung gilt aber nicht.

2. *Hilfssätze.* Zunächst werden wir einige Hilfssätze voranschicken.

Hilfssatz 1. Es seien $A_1, A_2, \dots, A_m$ alle symmetrische Matrizen, die als antilineare Transformationen miteinander vertauschbar sind. Dann gibt es eine unitäre Matrix U derart, dass $U'A_1U, \dots, U'A_mU$ sämtlich reelle Diagonalmatrizen sind. Falls alle A_j reell sind, so kann man die unitäre Matrix U als reell annehmen.

Beweis. Der zweite Teil des Satzes ist bekannt. Um den ersten Teil zu beweisen setze man für jedes k $(k=1, 2, \dots, n)$

$$B_k = \frac{1}{2}(A_k + \bar{A}_k), \qquad C_k = \frac{1}{2i}(A_k - \bar{A}_k), \qquad i = \sqrt{-1},$$

und bilde die reellen, symmetrischen Matrizen S_k vom Grade $2n$:

$$S_k = \begin{pmatrix} B_k & -C_k \\ -C_k & -B_k \end{pmatrix}.$$

Dabei nehmen wir an, dass der Grad von A_k gleich n ist.

Dann ist $S_jS_k = S_kS_j$, da die Relation $A_j\bar{A}_k = A_k\bar{A}_j$ nach der Voraussetzung des Satzes gilt. Daher gibt es nach dem zweiten Teil des Hilfssatzes 1 einen reellen, $2n$-dimensionalen Vektor $\mathfrak{x}$ derart, dass die Gleichungen

$$S_k\mathfrak{x} = a_k\mathfrak{x}, \qquad k = 1, 2, \dots, m \tag{1}$$

mit reellen Zahlen a_k bestehen. Hier nehmen wir an, dass $\|\mathfrak{x}\| = 1$ ist.

Man schreibe $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_2 \end{pmatrix}$ mit n-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ und setze $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_2$. Dann geht (1) über in

$$A_k\mathfrak{z} = a_k\bar{\mathfrak{z}}, \qquad k = 1, 2, \dots, m. \tag{2}$$

Ergänzt man diesen Vektor $\mathfrak{z}$ zu einer unitären Matrix $U = (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_n)$, so gilt für jedes k

$$U'AU = \left(\begin{array}{c:c} a_k & 0 \\ \hdashline 0 & A_k^{(1)} \end{array}\right).$$

Dabei haben die Matrizen $A_1^{(1)} \dots, A_m^{(1)}$ denselbe Grad $n-1$ und erfüllen die Bedingung des Satzes. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhält man den Satz.

Hilfssatz 2. Ee seien $A_1, \dots, A_p$ bzw. $B_1, \dots, B_q$ symmetrische bzw. schiefsymmetrische Matrizen des Grades n. Ferner seien die antilineare Transformationen $[A_1], \dots, [A_p]$, $[B_1], \dots, [B_q]$ miteinander vertauschbar. Dann gibt es eine unitäre Matrix U derart, dass $U'A_1U, \dots, U'A_pU$, $U'B_1U, \dots U'B_qU$ sämtlich die im Satz 1 genannte Form mit reellen a_j bzw. b_k haben. Sind insbesondere alle A_j, B_k reell, so kann man die unitäre Matrix U als reell annehmen.

Beweis. Für A_j bzw. B_k bilde man die symmetrische Matrizen des Grades $2n$

$$G_j=\begin{pmatrix} A_j & 0 \\ 0 & A_j \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad H_k=\begin{pmatrix} 0 & B_k \\ -B_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Auf Grund der Annahme des Satzes sind diese symmetrische Matrizen als antilineare Transformationen miteinander vertauschbar. Also gibt es nach dem Hilfssatz 1 eine unitäre Matrix U_0, so dass alle $U_0'G_jU_0$ und $U_0'H_kU_0$ reelle Diagonalmatrizen sind. Daher kann man einen vom Nullvektor verschiedenen, $2n$-dimensionalen Vektor $\mathfrak{z}$ angeben, der die Gleichungen

$$\text{(3)} \qquad G_j\mathfrak{z}=a_j\bar{\mathfrak{z}}, \qquad H_k\mathfrak{z}=b_k\bar{\mathfrak{z}}; \qquad \|\mathfrak{z}\|=\sqrt{2}$$

mit reellen Zahlen a_j, b_k für $j=1, 2, \dots, p$ und $k=1, 2, \dots, q$ erfüllt. Die Gleichungen (3) können auch geschrieben werden:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} A_j\mathfrak{z}_1=a_j\bar{\mathfrak{z}}_1 \\ A_j\mathfrak{z}_2=a_j\bar{\mathfrak{z}}_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} B_k\mathfrak{z}_1=-b_k\bar{\mathfrak{z}}_2 \\ B_k\mathfrak{z}_2=b_k\bar{\mathfrak{z}}_1 \end{cases},$$

wobei $\mathfrak{z}=\begin{pmatrix}\mathfrak{z}_1\\ \mathfrak{z}_2\end{pmatrix}$ mit n-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ gesetzet ist.

Hier dürfen wir annehmen, dass es unter $b_1, b_2, \dots, b_q$ mindestens eine von Null verschiedene Zahl b_k gibt. Denn sind die in den Diagonalmatrizen $U_0'H_1U_0, \dots, U_0'U_qU_0$ auftretende Diagonalelemente sämtlich gleich Null, so sind alle B_k gleich der Nullmatrix, und daher wird der Satz auf den Fall des Hilfssatzes 1 zurückgeführt. Nimmt man also etwa $b_1 \neq 0$ an, so folgt aus (4) $\mathfrak{z}_1'\mathfrak{z}_2=0$, $\|\mathfrak{z}_1\|=\|\mathfrak{z}_2\|=1$.

Ergänzt man diese Vektoren $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ zu einer unitären Matrix $U=(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \dots, \mathfrak{z}_n)$, so erhält man

$$U'A_jU=\left(\begin{array}{cc:c} a_j & 0 & \\ 0 & a_j & 0 \\ \hdashline & 0 & A_j^{(1)} \end{array}\right), \qquad U'B_kU=\left(\begin{array}{cc:c} 0 & b_k & \\ -b_k & 0 & 0 \\ \hdashline & 0 & B_k^{(1)} \end{array}\right)$$

für alle j und k, wobei die Matrizen $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_p^{(1)}$ bzw. $B_1^{(1)}, \dots, B_q^{(1)}$ symmetrische bzw. schiefsymmetrische Matrizen des Grades n-2 sind und die antilineare Transformationen $[A_1^{(1)}], \dots, [A_p^{(1)}]$, $[B_1^{(1)}], \dots, [B_q^{(1)}]$ miteinander vertauschbar sind. Daher wird der Satz auf den Fall, dass der Grad der Matrizen gleich $n-2$ ist, zurückgeführt. Damit kann man durch vollständige Induktion den Satz beweisen.

3. *Beweise der Sätz 1, 2, 3, 4.* Nun gehen wir zu den Beweis des Satzes 4 über.

Beweis des Satzes 4. Es seien $[A_1], [A_2], \dots, [A_m]$ normale antilineare Transformationen, die die Bedingungen

$$\text{(5)} \qquad [A_j][A_k]=[A_k][A_j], \qquad [A_j][A_k']=[A_k'][A_j]$$

für alle j und k erfüllen. Setzt man für jedes k

$$A_k = P_k + Q_k\,, \qquad P_k = \frac{1}{2}(A_k + A_k')\,, \qquad Q = \frac{1}{2}(A_k - A_k')\,,$$

so ist P_k bzw. Q_k eine symmetrische bzw. schiefsymmetrische Matrix. Da $[A_k]$ normal ist, so erhält man $[P_k][Q_k]=[Q_k][P_k]$.

Aus den Bedingungen (5) folgt weiter, dass die antillineare Transformationen $[P_1], \cdots, [P_m]$, $[Q_1], \cdots, [Q_m]$ miteinander vertauschbar sind. Also ist Hilfssatz 2 auf unseren Fall anwendbar. Damit ist der Satz 4 bewiesen.

Satz 1 folgt unmittelbar aus Satz 4, da zwei normale antilineare Transformationen $[A]$ und $[A']$ die Bedingung des Satzes 4 erfüllen.

Es ist klar, den Satz 2 aus Satz 1 herzuleiten.

Beweis des Satzes 3. Es sei A eine quasinormale Matrix, so dass $A\bar{A}$ eine reelle Matrix ist. Es ist dann $(A\bar{A})(A\bar{A})' = (A\bar{A}')^2 = (\bar{A}'A)^2$. Hieraus sieht man leicht, dass $A\bar{A}' = \bar{A}'A$ gilt und $A\bar{A}'$ eine reelle Matrix ist, da die zu $A\bar{A}'$ gehörige Hermitesche Form positiv-semidefinit ist.

Falls die Determinante von A nicht verschwindet, so folgt aus den beiden Relationen $A\bar{A} = \bar{A}A$, $A\bar{A}' = \bar{A}'A$, dass $AA' = A'A$ besteht. Diese letzte Gleichung gilt aber im allgemeinen. Denn da $A\bar{A}$ eine reelle symmetrische Matrix ist und A mit $A\bar{A}'(=\bar{A}'A)$ vertauschbar ist, gibt es eine reelle orthogonale Matrix T derart, dass $T'AT = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit det. $A_1 \neq 0$ gilt, und daher wird der allgemeine Fall auf den obigen Spezialfall zurückgeführt.

Setzt man nun

$$B = \frac{1}{2}(A + \bar{A})\,, \qquad C = \frac{1}{2i}(A - \bar{A})\,, \qquad i = \sqrt{-1}\,,$$

so ist $A = B + iC$. Die Matrizen B, C, B', C' sind reell-normal und miteinander vertauschbar, wie man aus den Relationen $A\bar{A} = \bar{A}A$, $AA' = A'A$, $A\bar{A}' = \bar{A}'A$ leicht einsieht.

Also ist Satz 4 auf unseren Fall anwendbar. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

Bemerkung. Ist eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ vom Grade 2 quasinormal, so gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = e^{i\theta}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ mit reellen Zahlen α, β, θ.

4. *Beweis des Satzes 5.* Es sei A eine Matrix vom Grade n. Man setze

$$B = \frac{1}{2}(A + \bar{A})\,, \qquad C = \frac{1}{2i}(A - \bar{A})\,, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

und betrachte die reelle Matrix R:

$$R = \begin{pmatrix} B & -C \\ -C & -B \end{pmatrix}.$$

Fall 1. Es sei α ein reeller Eigenwert der Matrix R. Dann gibt es wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 einen n-dimensionalen Vektor $\mathfrak{z}$, so dass

$$A\mathfrak{z}=\alpha\bar{\mathfrak{z}}\,, \qquad \|\mathfrak{z}\|=1$$

bestehen.

Ergänzt man diesen Vektor $\mathfrak{z}$ zu einer unitären Matrix $U=(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2, \cdots, \mathfrak{z}_n)$, so wird

$$U'AU=\left(\begin{array}{c:c} \alpha & * \\ \hdashline 0 & A_1 \end{array}\right)$$

Dabei ist der Grad von A_1 gleich $n-1$.

Fall 2. Es sei $\lambda+i\mu$ $(\mu \neq 0)$ ein komplexer Eigenwert der Matrix R. In diesem Fall haben die Gleichungen

$$\begin{cases} R\mathfrak{x}=\lambda\mathfrak{x}-\mu\mathfrak{y} \\ R\mathfrak{y}=\mu\mathfrak{x}+\lambda\mathfrak{y} \end{cases}$$

nicht triviale, reelle Lösungsvektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$. Man schreibe

$$\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}\mathfrak{x}_1\\ \mathfrak{x}_2\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{y}=\begin{pmatrix}\mathfrak{y}_1\\ \mathfrak{y}_2\end{pmatrix}$$

mit n-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{z}_j, \mathfrak{y}_j$, und setze

$$\mathfrak{z}_1=\mathfrak{x}_1+i\mathfrak{x}_2\,, \qquad \mathfrak{z}_2=\mathfrak{y}_1+i\mathfrak{y}_2\,.$$

Dann bestehen die Relationen

$$\begin{cases} A\mathfrak{z}_1=\lambda\bar{\mathfrak{z}}_1-\mu\bar{\mathfrak{z}}_2 \\ A\mathfrak{z}_2=\mu\bar{\mathfrak{z}}_1+\lambda\bar{\mathfrak{z}}_2 \end{cases}. \tag{6}$$

Hier sind $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ linear unabhängig. Denn sonst wäre $\mathfrak{z}_2=c\mathfrak{z}_1$ mit einer von Null verschiedenen Zahl c, also $\mu(1+c\bar{c})=\lambda(c-\bar{c})$, was unmöglich ist, da die linke Seite dieser Gleichung eine von Null verschiedene Zahl bedeutet, und die rechte Seite rein imaginär ist.

Daher spannen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ einen zweidimensionalen Teilraum $\mathfrak{M}_0$ von $\mathfrak{M}$ auf. Wählt man in $\mathfrak{M}_0$ ein normiertes Orthogonalsystem $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$, so geht (6) über in

$$\begin{cases} A\mathfrak{x}_1=a\bar{\mathfrak{x}}_1+b\bar{\mathfrak{x}}_2 \\ A\mathfrak{x}_2=c\bar{\mathfrak{x}}_1+d\bar{\mathfrak{x}}_2 \end{cases}, \tag{7}$$

wobei a, b, c, d komplexe Zahlen sind.

Bildet man durch Hinzufügung der geeigneten $\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4, \cdots, \mathfrak{x}_n$ eine unitäre Matrix $U=(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \cdots, \mathfrak{x}_n)$, so bekommt man

$$U'AU=\left(\begin{array}{cc:c} a & c & * \\ b & d & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{0} & A_2 \end{array}\right),$$

wobei der Grad von A_2 gleich $n-2$ ist.

Durch wiederholte Anwnendung des Verfahrens im Fall 1 oder 2 ergibt sich unsere Behauptung.

Zum Schluss sei bemerkt, dass Satz 1 auch aus Satz 5 folgt.