17. *Sur la représentation de Villat pour les fonctions analytiques définies dans un anneau circulaire concentrique.*

Par Yûsaku KOMATU.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Feb. 12, 1945.)

On se donne un domaine annulaire, soit, un domaine doublement connexe sur un plan complexe dont les composantes de frontière sont deux continua arbitraires n'ayant aucun point commun. On peut, alors, lui donner un *module* $\lg\frac{1}{q}(0<q<1)$ comme une invariante conforme, une seule essentiellement, et le représenter conformément sur l'anneau circulaire concentrique $q<|z|<1$ qui peut être regardé comme étant une sorte d'un domaine normal. A cause de ce fait, si nous voulons traiter les problèmes sur les fonctions analytiques définies dans les domaines annulaires, la représentation de Villat correspondant à celle de Poisson pour un domaine circulaire dans le cas de domaines simplement connexes nous donne souvent une méthode très féconde[1]. Voici la représentation de Villat.

Dans l'anneau circulaire concentrique $q<|z|<1$, une fonction analytique régulière $\Omega(z)$, dont la partie réelle $U(z)=\Re\Omega(z)$ donne la solution du problème de Dirichlet ayant, comme les valeurs-frontières,

$$U(z)\to\begin{cases} M(\varphi) & (z\to e^{i\varphi}), \\ N(\varphi) & (z\to qe^{i\varphi}), \end{cases}$$

peut être écrite sous la forme suivante:

$$\Omega(z)=\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}M(\varphi)\left\{\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)-\left(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\right)\lg z\right\}d\varphi$$
$$-\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}N(\varphi)\left\{\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)-\left(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\right)\lg z\right\}d\varphi+ic,$$

où c est une constante réelle pouvant être choisie arbitrairement, et toutes les notations pour les fonctions elliptiques appartiennent à celles dont les périodes primitives sont un nombre réel $2\omega_1$ et un nombre imaginaire pure $2\omega_3$ satisfaisant à la relation

$$\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{i}{\pi}\lg\frac{1}{q}.$$

1) En ce qui concerne ses applications à la représentation conforme, voir, par exemple, les Notes du présent auteur: Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **25** (1943), 1-42; Darstellungen der in einem Kreisringe analytischen Funktionen nebst den Anwendungen auf konforme Abbildung über Polygonalringgebiete, Jap. Journ. Math., (sous presse).

Pour démontrer ce théorème, Villat a regardé les valeurs-frontières comme étant produites par la limite de superposition des fonctions constantes sur chaque arc des circonférences et au fond utilisé implicitement la notion de la mesure harmonique qui a été introduite ultérieurement. A part cette démonstration originale donnée par Villat[2] lui-même, nous avons encore une démonstration par Dini[3] qui utilise les notations empruntées de la théorie des fonctions elliptiques de Jacobi et une autre démonstration simple par Demtchenko[4] qui part de la considération des résidus, ce qui revient à utiliser la formule d'intégrale de Cauchy.

Cette représentation ayant, nous semble-t-il, une grande importance il ne sera pas inutile de montrer dans cette Note qu'en réalité on peut l'obtenir de la formule générale de Green sur les fonctions harmoniques, d'une manière très simple et d'un seul coup sans considérer les plusieurs cas se présentant à cause de la polydromie de la fonction $\Omega(z)$.

Or, il est bien connu que[5], pour un anneau circulaire concentrique $q<|w|<1$, une fonction analytique (multivalente et déterminée à une constante additive imaginaire pure près), dont la partie réelle $g(w;z) =\Re f(w;z)$ coïncide avec la fonction de Green ayant, comme pôle, le point intérieur z, est donnée par

$$f(w;z)=-\lg\left[i(q^{-\frac{1}{2}}w)^{\frac{1}{2}-\frac{\lg|z|}{\lg q}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{w}{z}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{\bar{z}w}{q}\right)}\right]$$

ou, avec les notations des fonctions elliptiques de Weierstraß,

$$f(w;z)=\lg\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{\pi i}\lg\frac{\bar{z}w}{q}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi i}\lg\frac{w}{z}\right)}+\frac{\omega_1}{\pi}\left(\frac{1}{i\omega_3}+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\lg(q^{-\frac{1}{2}}|z|)\lg w+f^*(z),$$

$f^*(z)$ étant une quantité déterminée ne dépendant que du paramètre z[6] De cette formule, on obtient en premier lieu

2) H. Villat, Le problème de Dirichlet dans un aire annulaire, Rend. del Circ. mat. di Palermo, **33** (1912), 134–175.

3) D. Dini, Il problema di Dirichlet in un'area anulare, e nello spazio compreso fra due sfere concentriche, Rend. del Circ. mat. di Palermo, **36** (1913), 1–28.

4) B. Demtchenko, Sur la formule de M. H. Villat résolvant le problème de Dirichlet dans un anneau circulaire, Journ. de math. pures et appl., **10** (1931), 201–211.

5) Voir, par exemple, R. Courant et D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, t. I, deuxième éd., Berlin, (1931), p. 335–337, où il apparait un facteur $\frac{1}{2\pi}$ à cause du fait qu'ils adoptent une condition de normalisation différente que celle d'ici pour la singularité au pôle.

6) Voir, par exemple, Y. Komatu, Die Geschwindigkeitspotentiale und die Kutta-Joukowskischen Bedingungen für die Strömungen in vielfach zusammenhängenden Gebieten. II, Proc., **21** (1945), 83–93, où nous avons montré la forme complète de la fonction $f(z;z_\infty)$ avec la spécialisation $\omega_1=\pi$, $\omega_3=i\lg\frac{1}{q}$.

$$w\frac{\partial f(w;z)}{\partial w}=\frac{\omega_1}{\pi i}\left\{\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi i}\lg\frac{\bar{z}w}{q}\right)-\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi i}\lg\frac{w}{z}\right)\right\}$$
$$+\frac{\omega_1}{\pi}\left(\frac{1}{i\omega_3}+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\lg|z|+\frac{\eta_3\omega_1}{\pi i},$$

par conséquent, les dérivées de la fonction de Green dans la direction de la normale intérieure à chaque point-frontière deviennent

$$\frac{\partial g(e^{i\varphi};z)}{\partial n}=-\Re\left[w\frac{\partial f(w;z)}{\partial w}\right]_{w=e^{i\varphi}}$$
$$=\Re\left[\frac{2\omega_1}{\pi i}\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)-\frac{\omega_1}{\pi}\left(\frac{1}{i\omega_3}+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\lg z\right],$$
$$\frac{\partial g(qe^{i\varphi};z)}{\partial n}=\Re\left[\frac{w}{q}\frac{\partial f(w;z)}{\partial w}\right]_{w=qe^{i\varphi}}$$
$$=-\frac{1}{q}\Re\left[\frac{2\omega_1}{\pi i}\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)-\frac{\omega_1}{\pi}\left(\frac{1}{i\omega_3}+\frac{2\eta_1}{\pi}\right)\lg z\right],$$

où nous avons utilisé les relations bien connues $\zeta(u+\omega_3)=\zeta_3(u)+\eta_3$ (définition), $\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{\pi i}{2}$ (par Legendre), le fait que le parallélogramme des périodes est un rectangle ayant les côtés parallèles aux axes, soit, que, ω_1 et $i\omega_3$ étant tous les deux un nombre réel, η_1 est en même temps un nombre réel, et les relations

$$\zeta(\bar{u})=\overline{\zeta(u)}, \qquad \zeta_3(\bar{u})=\overline{\zeta_3(u)}$$

valables d'après des circonstances ci-dessus. Enfin, d'après la formule de Green sur les fonctions harmoniques, on parvient à la représentation pour $U(z)=\Re\Omega(z)$:

$$\Re\Omega(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M(\varphi)\frac{\partial g(e^{i\varphi};z)}{\partial n}d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(\varphi)\frac{\partial g(qe^{i\varphi};z)}{\partial n}qd\varphi$$
$$=\Re\left[\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}M(\varphi)\left\{\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)-\left(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\right)\lg z\right\}d\varphi\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}N(\varphi)\left\{\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)-\left(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\right)\lg z\right\}d\varphi\right],$$

d'où on obtient immédiatement la représentation de Villat en question.