Application du Calcul Fonctionnel à l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

M'hamed El Hodaibi

Abstract

In this paper we will give an application of functional calculus bound to the growth of the resolvant in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. We introduce the algebra $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ when U is neighbourhood of $\sigma(f)$. We prove that the restriction to $\sigma(f)$ of an element in $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ is C^∞ and $\bar{\partial}$-flat in $\sigma(f)$. We establish also the theorem of functional calculus

Résumé

Le but de cet article est de donner une application du calcul fonctionnel lié à la croissance de la résolvante à l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On introduit l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ pour U voisinage de $\sigma(f)$. On montre que la restriction à $\sigma(f)$ d'un élément de l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ est une fonction de classe C^∞ au sens de Whitney et $\bar{\partial}$-plate sur $\sigma(f)$. On établit aussi le théorème du calcul fonctionnel.

1 Introduction

Si on considère l'opérateur de Laplace (-Δ) qui est un endomorphisme continu de $S'(\mathbb{R}^n)$, alors son spectre est $\mathbb{R}^+$. M.Hemdaoui a défini dans [2] l'algèbre $C^1_\delta(T,\delta_0)$ où $\delta_0(t) = (1+|t|^2)^{-1/2}$, T un secteur contenant strictement $\mathbb{R}^+$ et δ une fonction qui contrôle la résolvante de l'opérateur $(-\Delta)$ sur $T\backslash\mathbb{R}^+$. Il montre que la restriction d'un élément h de l'algèbre $C^1_\delta(T,\delta_0)$ à $\mathbb{R}^+$ est de classe C^∞ tempérée ainsi que toutes ses dérivées pour la même filtration N, c'est à dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ h vérifie :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \delta_0(x)^N |D^k_x h(x)| < \infty$$

Received by the editors November 1997.
Communicated by P. Laubin.
Key words and phrases : Représentation intégrale, Champs de Whitney, Calcul fonctionnel.

Réciproquement toute fonction h tempérée ainsi que ses dérivées pour la même filtration N sur $\mathbb{R}^+$ se prolonge dans le secteur T en une fonction $\tilde{h}$ de l'algèbre $C^1_\delta(T, \delta_0)$ de classe C^∞ sur T et vérifiant sur $\mathbb{R}^+$:

$$D^\alpha \partial_{\bar{t}} \tilde{h}(x) = 0$$

où $t = x + iy$ et $\alpha \in \mathbb{N}^2$. Ainsi il montre que l'algèbre des restrictions à $\mathbb{R}^+$ de l'algèbre $C^1_\delta(T, \delta_0)$ est utile pour le calcul fonctionnel.

Le but de cet article est de donner une application du calcul fonctionnel à l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dans [8] Waelbroeck étudie l'extension du calcul fonctionnel holomorphe lié à la croissance de la résolvante d'un élément régulier d'une algèbre localement convexe complète à unité. Il introduit une algèbre abstraite X de fonctions supposées vérifier une condition plus faible que l'holomorphie. Dans cet article nous introduisons l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ pour U un ouvert borné, voisinage de $\sigma(f)$ et δ une fonction lipschitzienne positive contrôlant la résolvante d'un élément f de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Nous étudions complètement cette algèbre et nous montrons que si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors sa restriction au spectre de f est de classe C^∞ et "$\bar{\partial}$-plate", en particulier h est holomorphe à l'intérieur du spectre, si le spectre a un intérieur non vide. Nous nous sommes heurtés au problème de prolongement (Solution partielle en utilisant le théorème d'extension de Whitney).

Du point de vue calcul fonctionnel nous montrons que l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(\sigma(f))$ est utile pour le calcul fonctionnel et nous donnons dans ce cas une extension du théorème de composition dû à Waelbroeck [7] et du théorème d'Arens-Calderón [9].

Signalons que le calcul fonctionnel multidimensionnel lié à la croissance des coefficients spectraux de l'identité spectrale a été étudié dans le cas d'une algèbre de Banach commutative et unitaire par C.Wrobel [10] et dans le cas bornologique par Nguyen The Hoc, voir [5] et [6].

2 L'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$

Soient K un compact dans $\mathbb{C}$ et U un voisinage ouvert de K.

Définition 1. *: Une fonction δ définie, positive et lipschitzienne sur U est dite très plate au voisinage de K si δ vérifie pour tout entier $m \in \mathbb{N}$:*

$$\sup_{z \in U} \delta(z)\, d(z, K)^{-m} < \infty$$

Comme conséquence on a $\delta^{-1} = +\infty$ sur K.
On désigne par $\Delta(K)$ l'ensemble des fonctions δ, définies au voisinage de K et vérifiant cette définition.

Définition 2. *: $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ si et seulement si :*
(i) h est continue et bornée sur U,
(ii) $\int_U \delta^{-1}(\lambda)\ |\partial_{\bar{\lambda}} h(\lambda)|\ dm(\lambda) < \infty$ où $\partial_{\bar{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}$ et dm la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.

On remarque que $\bar{\partial} h = 0$ sur K au sens des distributions.
On munit l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ de la norme suivante :

$$\|h\|_{U,\delta} = \sup_{\lambda \in U}\ |h(\lambda)| + \int_U \delta^{-1}(\lambda)\ |\partial_{\bar{\lambda}} h(\lambda)| dm(\lambda) \tag{2.1}$$

Proposition 1. *: L'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ est une algèbre de Banach.*

Démonstration :
On considère l'espace suivant :

$$L^1_\delta(U) = \{g \in \mathcal{M}(U) \ / \ \|g\|_{1,\delta} = \int_U \delta^{-1}(\lambda) \ |g(\lambda)| dm(\lambda) < +\infty\} \tag{2.2}$$

C'est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_{1,\delta}$.
Soit $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors la suite $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers une fonction h.
La suite $(\partial_{\bar{\lambda}} h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^1_\delta(U)$, soit g sa limite dans $L^1_\delta(U)$. Au sens des distributions et grâce au théorème du graphe fermé on a $\partial_{\bar{\lambda}} h = g$, d'où $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ est un espace complet.
Comme pour $(h, h') \in \mathcal{C}^1_\delta(U)^2$ on a :

$$\|h\, h'\|_{U,\delta} \leq \ \|h\|_{U,\delta} \ \|h'\|_{U,\delta}$$

alors $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ est une algèbre de Banach. ■

2.1 Structure topologique de l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(K)$

On considère la relation d'équivalence suivante sur l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$:

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \ f = g \text{ sur } K$$

L'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R}$ est de Banach, car le noyau de la relation $\mathcal{R}$ est fermé. Si $U" \subset U' \subset U$ sont trois voisinages ouverts de K alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R} \arrow[rr, "\mathcal{R}_{U,U'}"] \arrow[dr, "\mathcal{R}_{U,U"}"'] & & \mathcal{C}^1_\delta(U')/\mathcal{R} \arrow[dl, "\mathcal{R}_{U',U"}"] \\
& \mathcal{C}^1_\delta(U")/\mathcal{R} &
\end{tikzcd}$$

avec $\mathcal{R}_{U,U"} = \mathcal{R}_{U',U"} o \mathcal{R}_{U,U'}$, où $\mathcal{R}_{U,U'}$ est la restriction d'un élément de l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ à l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(U')$. D'où la famille $(\mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R})_{U\in\mathcal{V}(K)}$ est un système inductif de limite inductive l'algèbre notée $\mathcal{C}^1_\delta(K)$. On écrit :

$$\mathcal{C}^1_\delta(K) = \varinjlim_{U\in\mathcal{V}(K)} (\mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R})$$

Comme pour $U \in \mathcal{V}(K)$ l'applications $\mathcal{R}_{U,K}$ de $\mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R}$ dans $\mathcal{C}^1_\delta(K)$ est injective ; dès lors l'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(K)$ est une algèbre topologique séparée et quasi-complète.

Proposition 2. *: L'algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(K)$ est une limite inductive séquentielle d'algèbres de Banach.*

Démonstration :
D'abord un lemme.

Lemme 1. *: Il existe un système fondamental décroissant d'ouverts $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ relativement compacts dans $\mathbb{C}$, tels que :*
(i) $(\forall m \in \mathbb{N})$ $\quad U_m$ *est un voisinage de* K*,*
(ii)$(\forall m \in \mathbb{N})$ $\quad \bar{U}_{m+1} \subset U_m$*,*
(iii) $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} U_m = K$*.*

Démonstration :
On choisit $U_m = \{z \in \mathbb{C}/\ d(z, K) < 1/(m + 1)\}$. ■

Si U est un ouvert quelconque contenant K alors d'après la compacité de K il existe un entier naturel m tel que $U_m \subseteq U$ et on considère la restriction $\mathcal{R}_{U,U_m}$ de $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ à $\mathcal{C}^1_\delta(U_m)$. On a aussi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^1_\delta(U_m)/\mathcal{R} \arrow[rr, "\mathcal{R}_{U,U_m}"] \arrow[dr, "\mathcal{R}_{U_m,K}"'] & & \mathcal{C}^1_\delta(U)/\mathcal{R} \arrow[dl, "\mathcal{R}_{U,K}"] \\
& \mathcal{C}^1_\delta(K) &
\end{tikzcd}$$

avec $\mathcal{R}_{U_m,K} = \mathcal{R}_{U_m,U} o \mathcal{R}_{U,K}$, d'où :

$$\mathcal{C}^1_\delta(K) = \lim_{\rightarrow} (\mathcal{C}^1_\delta(U_m)/\mathcal{R})$$

ainsi $\mathcal{C}^1_\delta(K)$ est une limite inductive séquentielle d'algèbres de Banach. ■

2.2 Restriction d'un élément de $\mathcal{C}^1_\delta(U)$ à K

On montre que si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors sa restriction à K est de classe C^∞ au sens de Whitney et $\bar{\partial} - plate$ sur K. Ce résultat n'est pas évident à première vue. Pour l'établir on a besoin de la formule de Cauchy-Pompièu.

Théorème 1. *: Si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors sa restriction à K est de classe C^∞ au sens de Whitney et $\bar{\partial} - plate$.*

Démonstration :
Rappelons la formule de Cauchy-Pompièu.

Lemme 2. *: Soit Ω un domaine dans $\mathbb{C}$ à bord régulier, si $h \in C^1(\bar{\Omega})$ alors h vérifie pour tout $\lambda \in \Omega$:*

$$h(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\partial\Omega} \frac{h(z)}{z-\lambda}\, dz + \int_{\Omega} \frac{\partial_{\bar{z}} h(z)}{z-\lambda}\, dz \wedge d\bar{z}\right\} \tag{2.3}$$

dz sur $\partial\Omega$ est la différentielle d'ordre 1 définie par $dz = dx + i\,dy$ et $dz \wedge d\bar{z} = -2i\,dx \wedge dy$, notée tout simplement $dz\,d\bar{z}$. Pour la démonstration de ce lemme voir [3].

Théorème 2. *: Soit $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$, où U est un voisinage de K. Si Ω est un domaine à bord régulier dans U et voisinage de K alors pour tout $\lambda \in K$ on a :*

$$h(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\partial\Omega} \frac{h(z)}{z-\lambda}\, dz + \int_{\Omega} \frac{\partial_{\bar{z}} h(z)}{z-\lambda}\, dz\, d\bar{z}\right\} \tag{2.4}$$

Démonstration :
D'abord un lemme.

Lemme 3. *: Soit $K_m = \{x \in U \ / \ d(x,\Omega) \leq 1/m\}$ alors il existe une famille de fonctions $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dans $D(\mathbb{R}^n)$ telle que :*

$$(H)\left\{\begin{array}{ll} supp\psi_m \subseteq K_{m/3} & \\ \psi_m = 1 \ sur\ K_m \ et\ 0 \leq \psi_m \leq 1 & \\ \|D^\alpha\psi_m\| \ \leq \ c_\alpha \ m^{|\alpha|} & pour\ \alpha \in \mathbb{N}^n \end{array}\right.$$

La démonstration de ce lemme se trouve dans [4].
On pose $K' = \bar{V}$, où V est un voisinage de K relativement compact dans U et contenant $\bar{\Omega}$. Soit $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors $h \in C(K')$. Soit $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur K', convergeant uniformément vers h dans K' alors la suite $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge au sens des distributions vers h dans $D'(V)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ la suite de fonctions $(\frac{h_j(z)}{z-\lambda})_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(V)$ vers $\frac{h(z)}{z-\lambda}$, car h est une fonction continue et $\frac{1}{z-\lambda}$ est une fonction localement integrable pour la mesure de Lebesgue.
Soit λ un point fixe dans K alors pour m fixé et supérieur à m_0 la suite $(<\partial_{\bar z}(\frac{h_j}{z-\lambda}), \psi_m >)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $< \partial_{\bar z}(\frac{h}{z-\lambda}), \psi_m >$. Montrons que la convergence est uniforme en m indépendamment de λ. On a au sens des distributions :

$$\begin{array}{rcl} < \partial_{\bar z}(\frac{h_j}{z-\lambda}), \psi_m > & = & - < \frac{h_j}{z-\lambda}, \partial_{\bar z}\psi_m > \\ < \partial_{\bar z}(\frac{h}{z-\lambda}), \psi_m > & = & - < \frac{h}{z-\lambda}, \partial_{\bar z}\psi_m > \end{array}$$

d'où :

$$< \partial_{\bar z}(\frac{h_j}{z-\lambda}), \psi_m > - < \partial_{\bar z}(\frac{h}{z-\lambda}), \psi_m >= - < \frac{h_j - h}{z-\lambda}, \partial_{\bar z}\psi_m > \tag{2.5}$$

or :

$$< \frac{h_j - h}{z-\lambda}, \partial_{\bar z}\psi_m >= \frac{1}{2} \int_{K_{m/3}} \frac{(h_j(z) - h(z))}{z-\lambda} \ \partial_{\bar z}\psi_m(z) \ d\bar z \, dz$$

On a aussi :

$$\int_{K_{m/3}} \frac{(h_j(z) - h(z))}{z-\lambda} \ \partial_{\bar z}\psi_m(z) \ d\bar z \, dz = \int_{K_{m/3}\setminus\Omega} \frac{(h_j(z) - h(z))}{z-\lambda} \ \partial_{\bar z}\psi_m(z) \ d\bar z \, dz$$

d'où :

$$\left|\int_{K_{m/3}} \frac{(h_j(z) - h(z))}{z-\lambda} \ \partial_{\bar z}\psi_m(z) \ d\bar z \, dz\right| \leq c_1 \ \frac{\sup_{z\in K'} |h_j(z) - h(z)|}{d(K, \partial\Omega)} \ m \int_{K_{m/3}\setminus\Omega} dm(z)$$

Comme h_j converge uniformément sur K' vers h et comme $m \ \int_{K_{m/3}\setminus\Omega} \ dm(z)$ est majorée par une constante alors $< \ \partial_{\bar z}(\frac{h_j}{z-\lambda}), \psi_m \ >$ converge par rapport à j et uniformément en m vers $< \partial_{\bar z}(\frac{h}{z-\lambda}), \psi_m >$.
Montrons qu'on a :

$$\lim_j \int_\Omega \partial_{\bar z}(\frac{h_j}{z-\lambda}) \ dx\, dy = \int_\Omega \partial_{\bar z}(\frac{h}{z-\lambda}) \ dx\, dy \tag{2.6}$$

Posons :

$$\int_\Omega \partial_{\bar z}(\frac{h_j}{z-\lambda}) \ dx\, dy - \int_\Omega \partial_{\bar z}(\frac{h}{z-\lambda}) \ dx\, dy = A_{1,j,m} + A_{2,j,m} + A_{3,j,m} \tag{2.7}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{lll} A_{1,j,m} & = & \int_\Omega \partial_{\bar z}(\frac{h_j}{z-\lambda})\, dx\, dy - < \partial_{\bar z}(\frac{h_j}{z-\lambda}), \psi_m > \\ A_{2,j,m} & = & < \partial_{\bar z}(\frac{h_j}{z-\lambda}), \psi_m > - < \partial_{\bar z}(\frac{h}{z-\lambda}), \psi_m > \\ A_{3,j,m} & = & < \partial_{\bar z}(\frac{h}{z-\lambda}), \psi_m > - \int_\Omega \partial_{\bar z}(\frac{h}{z-\lambda})\, dx\, dy \end{array}\right.$$

La suite de fonctions $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction caractéristique de $\bar\Omega$, notée $\chi_{\bar\Omega}$. Comme m dépend de j alors on commence par les termes $A_{1,j,m}$ et $A_{3,j,m}$. Pour le terme $A_{2,j,m}$ on utilise (2.5), d'où $A_{(2,j,m)}$ converge uniformément en j et m vers 0. En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, le terme $A_{(1,j,m)}$ converge vers 0 pour m dépendant de j et le terme $A_{(3,j,m)}$ converge vers 0 pour m assez grand. Comme le premier membre de l'égalité (2.7) ne dépend pas de m alors on a (2.6). Ainsi le théorème 2 est démontré. ■

La régularité au sens de Whitney est définie comme suit.

Définition 3. *: Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ où d est un entier naturel non nul, on dit que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^d}$ est un champ de Whitney sur K si et seulement si :*
(i) f_α est continue sur K pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,
(ii)si $x_0 \in K$ et $|\alpha| \le r$ pour $r \in \mathbb{N}$ alors sur K on a :

$$f_\alpha(x) - \sum_{|\alpha+\beta|\le r} f_{\alpha+\beta}(x_0)\, \frac{(x-x_0)^\beta}{\beta!} = o(|x-x_0|^{r-|\alpha|})$$

Définition 4. *Soient K un compact de $\mathbb{C}$ et h une fonction définie sur K. La fonction h est dite $\bar\partial$-plate sur K si et seulement si on peut associer à h un champ de Whitney $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^2}$ tel que $h_0 = h$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$ on ait :*

$$h_{\alpha+(1,0)} + i h_{\alpha+(0,1)} = 0$$

Si h est $\bar\partial$-plate pour le champ $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^2}$ alors en utilisant le théorème d'extension de Whitney on associe au champ $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^2}$ une fonction $\tilde h$ de classe C^∞ sur un voisinage de K et vérifiant pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$ et tout $\lambda \in K$:

$$D^\alpha \bar\partial \tilde h(\lambda) = 0$$

Soient V un ouvert voisinage de K relativement compact dans U, $\psi \in D(V)$ et $\psi = 1$ sur un voisinage de K. Si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$, on associe à h la famille de fonctions suivantes :

$$h_\alpha(\lambda) = \frac{k!\, (i)^{\alpha_2}}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial_{\bar z}(h\,\psi)(z)}{(z-\lambda)^{k+1}}\, dz\, d\bar z$$

où $\lambda \in K$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $k = |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.
Comme la fonction δ absorbe au voisinage de K les puissances de $d(\lambda, K)$ alors la famille $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^2}$ est un champ de Whitney sur K.
Montrons que h est $\bar\partial$-plate sur K. Il suffit de montrer que h est limite uniforme sur K d'une famille de fonctions holomorphes au voisinage de K. Soit $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une famille de fonctions qui vérifie (**H**). Posons $\tilde\psi_m = (1-\psi_m)$ et aussi, pour $\lambda \in K_m$:

$$h_m(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \tilde\psi_m(z)\, \frac{\partial_{\bar z}(h\,\psi)(z)}{(z-\lambda)}\, dz\, d\bar z$$

alors h_m est holomorphe à l'intérieur de K_m. Il est facile de montrer que $D^\alpha h_m$ converge uniformément sur K vers h_α. Comme $D^\alpha \bar{\partial} h_m = 0$ sur K pour tout $m \in \mathbb{N}$ alors on a :

$$h_{\alpha+(1,0)} + i h_{\alpha+(0,1)} = 0$$

ce qui montre que la fonction h est $\bar{\partial}$-plate sur K et le théorème 1 est démontré. ∎

D'ailleurs Waelbroeck [8] étudie la sous-algèbre des éléments réguliers à l'ordre $r+1$ de l'algèbre X pour δ vérifiant $\delta(z) \geq \epsilon d(z,K)^{r-1}$. Dans cet article, on utilise la notion de régularité sur le compact K sans se préoccuper de la régularité de la fonction en dehors du compact K, régularité qui s'avère non nécessaire.

Exemple :

Soient $M_n = n!^s$ pour $s > 1$ et $\delta(\lambda) = \inf_{n\in\mathbb{N}} d(\lambda, D)^n \frac{M_n}{n!}$ où D est le disque unité, alors $\delta(\lambda)$ est équivalente à $exp(-\frac{1}{d(\lambda,D)^{s-1}})$ (voir [1]). Si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ où U est un voisinage de $\bar{D}$ alors h est holomorphe sur D et pour tout $\lambda \in \bar{D}$ on a :

$$|h^{(n)}(\lambda)| \leq \|h\|_{U,\delta}\, ((n+1)!)^{s-1}$$

En particulier si $h \in \mathcal{C}^1_{\delta_L}(U)$ pour $L > 0$ et $\delta_L(\lambda) = \inf_{n\in\mathbb{N}} L^n\, d(\lambda, D)^n \frac{M_n}{n!}$ alors sa restriction à $\bar{D}$ est dans la classe de Gevrey, c'est à dire que pour tout $L > 0$:

$$|h^{(n)}(\lambda)| \leq C_L \|h\|_{U,\delta_L}\, ((n+1)!)^{s-1}\, L^n$$

Réciproquement en utilisant un résultat de B.Droste [1] on montre que si h est holomorphe sur D et de classe de Gevrey sur $\bar{D}$ alors il existe $\tilde{h}$ une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de $\bar{D}$ tel que $h \in \mathcal{C}^1_{\delta_L}(U)$ pour tout $L > 0$.

Applications :

Si $K = \bar{\Omega}$ et si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ alors h est holomorphe sur Ω et les dérivées de h sur Ω se prolongent jusqu'au bord de Ω.

Si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ est de classe C^{r+1} sur un voisinage de K alors h vérifie sur K pour $|\alpha| \leq r$:

$$D^\alpha \bar{\partial} h(z) = 0$$

en particulier si h est de classe C^∞ sur un voisinage de K alors h vérifie sur K pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$:

$$D^\alpha \bar{\partial} h(z) = 0$$

Si on considère l'application suivante :

$$\mathcal{R} : \mathcal{C}^1_\delta(U) \longrightarrow C^\infty(K)$$

$$h \longrightarrow (h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^2}$$

alors $\mathcal{R}$ est une application continue, c'est à dire que pour $\alpha \in \mathbb{N}^2$:

$$\|h_\alpha\|_\infty \leq c_\alpha \|h\|_{U,\delta}$$

3 Calcul Fonctionnel

3.1 Spectre d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

On munit l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de l'addition,la multiplication, la multiplication par un scalaire et de la famille des semi-normes suivantes :

$$\|f\|_{p,m} = \underset{|\alpha|\leq m}{sup}\ \underset{x\in\mathbb{R}^n}{sup}\ (1+|x|^2)^p\ |D^\alpha f(x)| \tag{3.1}$$

L'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ munie de cette famille de semi-normes est une algèbre de Fréchet séparable. C'est une $\mathcal{F}$-algèbre.
Soit $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, algèbre obtenue par adjonction d'une unité. Pour la multiplication le spectre de chaque élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est déterminé dans l'algèbre $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$. Un élément de $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ s'écrit $\lambda \oplus f$ et $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ est munie de la famille des semi-normes suivantes $\|\lambda \oplus f\|_{p,m} = |\lambda| + \|f\|_{p,m}$.

Proposition 3. *: Soit f une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors le spectre de f dans $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ est la fermeture dans $\mathbb{C}$ de $f(\mathbb{R}^n)$, c'est à dire que $\sigma(f) = f(\mathbb{R}^n) \cup \{0\}$. On a aussi pour $(m,p) \in \mathbb{N}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(f)$:*

$$\|(\lambda - f)^{-1}\|_{p,m} \leq c_{m,f} \frac{1}{d(\lambda, \sigma(f))^{m+2}}$$

Démonstration :
Soit $K = \sigma(f)$, comme pour $\lambda \in \mathbb{C}\backslash K$ on a :

$$(\lambda - f).(\lambda - f)^{-1} = 1$$

alors pour $|\alpha| = m+1$ on a :

$$(\lambda - f).D^\alpha(\lambda - f)^{-1} = \sum_{0<\beta\leq\alpha} D^\beta f.D^{\alpha-\beta}(\lambda - f)^{-1}$$

d'où par récurrence on a :

$$|D^\alpha(\lambda - f)^{-1}| \leq c_{m,f} \sum_{0<\beta\leq\alpha} |D^\beta f|.\frac{1}{d(\lambda, K)^{m+3}}$$

on pose $c_{m+1,f} = c_{m,f}\ \underset{|\alpha|=m+1}{max}\ (\sum_{0<\beta\leq\alpha} \|D^\beta f\|_{0,0}, 1)$. ■

On appelle spectre de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, noté $\widehat{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$, l'ensemble des caractères continus de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4. *Soit χ un caractère non nul de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\chi(f) = f(x)$$

Démonstration :
pour cela on a besoin d'une partition de l'unité particulière.

Lemme 4. *: il existe une fonction positive $\phi \in D([-1,1]^n)$ qui vérifie l'identité suivante :*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi(x-k) = 1$$

comme conséquence de ce lemme on a aussi l'identité suivante :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi(2^j x - k) = 1$$

pour $j \in \mathbb{N}$.
Soit χ un caractère non nul de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, posons $\phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k)$ et :

$$I_j = \{k \in \mathbb{Z}^n / \ \chi(\phi_{j,k}) \neq 0\}$$

Montrons que $card(I_j)$ est majoré par un entier qui ne dépend pas de j, si χ est un caractère non nul de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors il vérifie $\chi(f.g) = \chi(f).\chi(g)$, d'où pour $f.g = 0$ on a $\chi(f) = 0$ ou $\chi(g) = 0$.
Si $\chi(\phi_{j,k}.\phi_{j,k'}) \neq 0$ alors $supp\phi_{j,k}$ rencontre $supp\phi_{j,k'}$, d'où $supp\phi_k$ rencontre $supp\phi_{k'}$. comme le nombre de k' tels que $supp\phi_{k'}$ rencontre $supp\phi_k$ est fini et ne dépend pas de k alors $card(I_j)$ est majoré par cet entier, noté r. posons :

$$K_j = \cup_{k\in I_j} supp\phi_{j,k}$$

alors le volume de K_j est majoré par $r.2^{-nj}$, on a aussi $K_j \cap K_{j+1} \neq \emptyset$, d'où $\cap_{j\in\mathbb{N}} K_j$ est réduit à un point noté x, montrons que $\chi(f) = f(x)$.
on a :

$$\chi(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi(f.\chi_{j,k})$$

Comme on somme sur I_j alors on a :

$$\chi(f - f(x)) = \sum_{k\in I_j} \chi((f - f(x)).\chi_{j,k})$$

on a aussi :

$$(\forall f \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)) \qquad (|\chi(f)| \leq \|f\|_\infty)$$

d'où :

$$|\chi(f - f(x))| \leq \sup_{y\in K_j} |f(y) - f(x)|$$

∎

En conséquence de cette proposition le radical $\mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est réduit à 0.

3.2 Calcul Fonctionnel Holomorphe

Comme les éléments de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont réguliers, c'est à dire à spectres compacts, alors on a le théorème du calcul fonctionnel holomorphe pour un seul élément, voir même pour plusieurs éléments (voir [7] où l'auteur montre que l'homomorphisme du calcul fonctionnel est l'unique homomorphisme Φ continu qui vérifie $\Phi 1 = 1$ et $\Phi z_i = a_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ n éléments réguliers d'une algèbre topologique commutative).

3.3 Extension du Calcul Fonctionnel

3.3.1 Régularisation

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, posons $K = \sigma(f)$ dans $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$.
Soit u_λ la fonction de $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie :

$$u_\lambda\ (\lambda - f) = 1 \text{ dans } \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) \text{ pour } \lambda \notin K. \tag{3.2}$$

Soit $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de fonctions dans $D(\mathbb{R}^2)$ qui vérifie (H') :

$$(H')\begin{cases} supp\psi_\varepsilon \subseteq K_{3\varepsilon} \\ \psi_\varepsilon = 1 \text{ sur } K_\varepsilon \text{ et } 0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1 \\ \|D^\alpha \psi_\varepsilon\| \ \leq \ c_\alpha\ \varepsilon^{-|\alpha|} \qquad\qquad \text{pour } \alpha \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$

posons :

$$v_\varepsilon(\lambda) = [1 - \psi_\varepsilon(\lambda)]\ u_\lambda\ \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) \tag{3.3}$$

Lemme 5. *: Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de spectre K. Alors il existe une famille $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définie sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie l'identité suivante :*

$$(\lambda - f)\ v_\varepsilon(\lambda) + \psi_\varepsilon(\lambda) = 1 \ dans\ \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) \tag{3.4}$$

On a aussi l'égalité suivante sur $\mathbb{C}$ tout entier :

$$(\lambda - f)\ \partial_{\bar{z}} v_\varepsilon(\lambda) = -\partial_{\bar{z}}\psi_\varepsilon(\lambda)\ dans\ \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n).$$

cette égalité est une conséquence directe du lemme 5.

3.3.2 Théorème du calcul fonctionnel

On dit que $h \in \mathcal{C}^1_{\delta,0}(K)$ si et seulement si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(K)$ et h s'annule en 0.

Théorème 3. *: Soient f une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec $K = \sigma(f)$ et $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de fonctions qui vérifie l'hypothèse (**H'**) alors on a :*
(1) Si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(K)$ alors $h[f] = -\frac{1}{2\pi i} \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{C}} h(\lambda)\ \partial_{\bar{z}} v_\varepsilon(\lambda)\ d\lambda\, d\bar{\lambda} \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ est défini et ne dépend pas du choix de la famille $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.
Si h(0)=0 alors h[f] est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(2) L'application Φ_0 :

$$\begin{aligned} \Phi_0 : \mathcal{C}^1_{\delta,0}(K) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ h &\longrightarrow h[f] \end{aligned}$$

est un homomorphisme d'algèbres continu.

Démonstration :
Commençons par montrer (1).
Soit $h \in C^1_\delta(U)$ où U est un voisinage ouvert de K.
Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $K_{2\varepsilon_0} \subset U$, étudions la différence suivante :

$$\int_{\mathbb{C}} h(\lambda)\ (\partial_{\bar{z}} v_\varepsilon(\lambda) - \partial_{\bar{z}} v_{\varepsilon'}(\lambda))\ d\lambda\, d\bar{\lambda}$$

pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon < \varepsilon_0$. Calculons la norme $\| \, \|_{p,m}$ de cette différence dans $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ pour p et m entiers naturels quelconques. En utilisant la formule de Stockes on a :

$$\left\| \int_{\mathbb{C}} h(\lambda)\ (\partial_{\bar{z}} v_\varepsilon(\lambda) - \partial_{\bar{z}} v_{\varepsilon'}(\lambda))\ d\lambda\, d\bar{\lambda} \right\|_{p,m} = \left\| \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} h(\lambda)\ (\lambda - f)^{-1}\ (\psi_\varepsilon(\lambda) - \psi_{\varepsilon'}(\lambda))\ d\lambda\, d\bar{\lambda} \right\|_{p,m} \tag{3.5}$$

d'où :

$$\left\| \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial_{\bar{z}} h(\lambda)}{(\lambda - f)}\ (\psi_\varepsilon(\lambda) - \psi_{\varepsilon'}(\lambda))\ d\lambda\, d\bar{\lambda} \right\|_{p,m} \leq c_{m,f} \int_{K_{2\varepsilon} \setminus K_{\varepsilon'}} |\partial_{\bar{z}} h(\lambda)|\ d(\lambda, K)^{-m-2}\ dm(\lambda) \tag{3.6}$$

D'où aussi :

$$\left\| \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} h(\lambda)\ (\lambda - f)^{-1}\ (\psi_\varepsilon(\lambda) - \psi_{\varepsilon'}(\lambda))\ d\lambda\, d\bar{\lambda} \right\|_{p,m} \leq c_{m,f,\delta}\ \omega(\varepsilon) \tag{3.7}$$

Où $\omega(\varepsilon)$ est une fonction de ε qui décroît plus vite que n'importe quelle puissance de ε, ce qui est le cas car $\delta(\lambda)$ décroît plus vite que les puissances de $d(\lambda, K)$.
Si on choisit une autre famille $(\tilde{\psi}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui vérifie (H'), alors on associe à $(\tilde{\psi}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ la famille $(\tilde{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.
Si on remplace dans (3.5), (3.6) et (3.7) $\psi_{\varepsilon'}$ par $\tilde{\psi}_\varepsilon$ et $v_{\varepsilon'}$ par $\tilde{v}_\varepsilon$ alors on a l'inégalité suivante :

$$\left\| \int_{\mathbb{C}} h(\lambda)\ (\partial_{\bar{z}} v_\varepsilon(\lambda) - \partial_{\bar{z}} \tilde{v}_\varepsilon(\lambda))\ d\lambda\, d\bar{\lambda} \right\|_{p,m} \leq \tilde{c}_{m,f,\delta}\ \tilde{\omega}(\varepsilon)$$

Où $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ est une fonction qui décroît plus vite que n'importe quelle puissance de ε.
Comme le radical de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est réduit à $\{0\}$ alors on a (1).
Montrons (2). Pour chaque ouvert U voisinage de K, on pose :

$$\Phi_0^U(h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} h(\lambda)\ \partial_{\bar{z}} v_\varepsilon(\lambda)\ d\lambda\, d\bar{\lambda} \tag{3.8}$$

Soit $\mathcal{R}_{U,U'}$ la restriction d'un élément de $C^1_{\delta,0}(U)/\mathcal{R}$ à $C^1_{\delta,0}(U')/\mathcal{R}$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^1_{\delta,0}(U)/\mathcal{R} \arrow[rr, "\mathcal{R}_{U,U'}"] \arrow[dr, "\Phi_0^U"'] & & \mathcal{C}^1_{\delta,0}(U')/\mathcal{R} \arrow[dl, "\Phi_0^{U'}"] \\ & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \end{tikzcd}$$

avec :

$$\Phi_0^U = \Phi_0^{U'} o \mathcal{R}_{U,U'} \tag{3.9}$$

Comme $C^1_{\delta,0}(K)$ est la limite inductive de $C^1_{\delta,0}(U)/\mathcal{R}$ où U décrit l'ensemble des voisinages ouverts de K, on a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^1_{\delta,0}(U)/\mathcal{R} \arrow[rr, "\mathcal{R}_{U,K}"] \arrow[dr, "\Phi_0^U"'] & & \mathcal{C}^1_{\delta,0}(K) \arrow[dl, "\Phi_0"] \\ & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \end{tikzcd}$$

avec :

$$\Phi_0^U = \Phi_0 o \mathcal{R}_{U,K}$$

et

$$\Phi_0 = \lim_{\overrightarrow{U}} \Phi_0^U \tag{3.10}$$

Montrons que Φ_0 est un homomorphisme d'algèbres.
Soient $(h, h') \in \mathcal{C}_\delta^1(U)^2$ alors on définit le produit tensoriel de h par h', noté $h \otimes h'$:

$$(h \otimes h')(s,t) = h(s)\, h'(t)$$

Soient les deux identités spectrales suivantes :

$$\begin{cases} (\lambda - f)\, v_\varepsilon(\lambda) + \psi_\varepsilon(\lambda) & = & 1 \\ (\lambda - f)\, \omega_{\varepsilon'}(\lambda) + \varphi_{\varepsilon'}(\lambda) & = & 1 \end{cases}$$

A partir de ces deux familles spectrales $(v_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ et $(\omega_{\varepsilon'}, \varphi_{\varepsilon'})$, on construit la famille suivante :

$$U_{\varepsilon,\varepsilon'} = v_\varepsilon \otimes \varphi_{\varepsilon'},\ V_{\varepsilon'} = 1 \otimes \omega_{\varepsilon'} \text{ et } Z_{\varepsilon,\varepsilon'} = \psi_\varepsilon \otimes \varphi_{\varepsilon'}.$$

Par exemple on a $U_{\varepsilon,\varepsilon'}(s,t) = v_\varepsilon(s)\, \varphi_{\varepsilon'}(t)$. On a aussi dans $\mathbb{C}^2$ l'identité spectrale suivante :

$$(s-f)\, U_{\varepsilon,\varepsilon'} + (t-f)\, V_{\varepsilon'} + Z_{\varepsilon,\varepsilon'} = 1$$

On dit que $h \in C^1_{\delta\times\delta}(U \times U)$ si et seulement si h est continue et bornée sur $U \times U$ et :

$$\int_{U\times U} \delta^{-1}(s)\, \delta^{-1}(t)\, |\partial_{\overline{(s,t)}} h(s,t)|\, dm(s,t) < \infty$$

On en déduit que si $h \in \mathcal{C}_\delta^1(U)$ et $h' \in \mathcal{C}_\delta^1(U)$ alors $h \otimes h' \in C^1_{\delta\times\delta}(U \times U)$. Si on utilise (1) du théorème 3 pour deux éléments on a :

$$(h \otimes h')[f,f] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \lim_{\varepsilon,\varepsilon' \to 0^+} \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} (h \otimes h')(s,t)\ \partial_{\bar s} U_{\varepsilon,\varepsilon'}(s,t)\, \partial_{\bar t} V_\varepsilon(s,t)\, d\bar s\, d\bar t\, ds\, dt$$

On a aussi le lemme suivant.

Lemme 6. *Si $h \in \mathcal{C}_\delta^1(\sigma(f))$ et $h' \in \mathcal{C}_\delta^1(\sigma(f))$ alors on a :*

$$(h \otimes h')[f,f] = h[f]\, h'[f]$$

Démonstration :
Calculons la limite de $\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} (h \otimes h')(s,t)\ \partial_{\bar s} U_{\varepsilon,\varepsilon'}(s,t)\ \partial_{\bar t} V_\varepsilon(s,t)\ d\bar s\, d\bar t\, ds\, dt$.
On a :

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} (h \otimes h')(s,t)\ \partial_{\bar s} U_{\varepsilon,\varepsilon'}(s,t)\ \partial_{\bar t} V_\varepsilon(s,t)\ d\bar s\, d\bar t\, ds\, dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{C}} h(s)\ \partial_{\bar s} v_\varepsilon(s)\ d\bar s\, ds \int_{\mathbb{C}} h'(t)\ \varphi_{\varepsilon'}(t)\ \partial_{\bar t} \omega_{\varepsilon'}(t)\ d\bar t\, dt$$

Soit l'identité spectrale suivante :

$$(\lambda - f)\, \omega'_{\varepsilon'}(\lambda) + \varphi^2_{\varepsilon'}(\lambda) = 1$$

Alors on a :

$$\partial_{\bar{t}}\omega'_{\varepsilon'}(t) = \varphi_{\varepsilon'}(t)\, \partial_{\bar{t}}\omega_{\varepsilon'}(t)$$

d'où :

$$(h \otimes h')[f, f] = h[f]\, h'[f]$$

d'où le lemme 6. ■

Considérons l'application suivante :

$$T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$s \longrightarrow (s, s)$$

Cette application T se décompose en une injection i de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^2$ et en un automorphisme S de $\mathbb{C}^2$, espace vectoriel sur $\mathbb{C}$: on a $i(s) = (s, 0)$ et la matrice associée à S dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $((h \otimes h')oT)(s) = h(s)\, h'(s) = h\, h'(s)$ d'où $(h \otimes h')oT = h\, h'$.

Lemme 7. *:Si* $(h, h') \in \mathcal{C}^1_{\delta,0}(\sigma(f))^2$ *alors on a :*

$$h\, h'[f] = ((h \otimes h')oT)[f] = (h \otimes h')[f, f]$$

Démonstration :

Commençons par choisir $\varepsilon' = \varepsilon$ pour montrer que $((h \otimes h')oS)[f, 0] = (h \otimes h')[f, f]$. Soit $H \in C^1_{\delta\times\delta}(U \times U)$; on suppose que H ne dépend que de t. Si $h(s) = H(s, t)$ alors on a $H[f, f] = h[f]$ car H vérifie $H = h \otimes 1$.

On a l'identité spectrale suivante :

$$(s - f)\, U_\varepsilon + (t - f)\, V_\varepsilon + Z_\varepsilon = 1$$

ce qui s'écrit :

$$< \begin{pmatrix} s - f \\ t - f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{U}_\varepsilon(s, t) \\ \bar{V}_\varepsilon(s, t) \end{pmatrix} > + Z_\varepsilon(s, t) = 1$$

Posons :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_\varepsilon(s, t) \\ \bar{V}_\varepsilon(s, t) \end{pmatrix} = (S^{-1})^* \begin{pmatrix} \bar{U}'_\varepsilon(s', t') \\ \bar{V}'_\varepsilon(s', t') \end{pmatrix}$$

où S^* est l'adjoint de S et $\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$. On en déduit alors l'identité suivante :

$$< S^{-1} \begin{pmatrix} s - f \\ t - f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{U'}_\varepsilon(s', t') \\ \bar{V'}_\varepsilon(s', t') \end{pmatrix} > + Z_\varepsilon o S(s', t') = 1$$

c'est à dire qu'on a l'identité spectrale suivante :

$$(s' - f)\, U'_\varepsilon + t'\, V'_\varepsilon + Z'_\varepsilon = 1$$

avec $Z'_\varepsilon(s', t') = Z_\varepsilon(s, t)$. Calculons $((h \otimes h')oS)[f, 0]$; on a :

$$((h\otimes h')oS)[f, 0] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} ((h\otimes h')oS)(s', t')\, \partial_{\bar{s}} U'_\varepsilon(s, t)\, \partial_{\bar{t}} V'_\varepsilon(s, t)\, d\bar{s'}\, d\bar{t'}\, ds'\, dt'$$

car $(h \otimes h')oS \in C^1_{\delta'}(U \times U')$ où $\delta'(s', t') = \delta(s')\,\delta(s' + t')$ et U' est un voisinage de 0 tel que $U \times U' \subset S^{-1}(U \times U)$.
Comme $\partial_{\bar{s}} U_\varepsilon(s,t)\,\partial_{\bar{t}} V_\varepsilon(s,t)\,d\bar{s}\,d\bar{t}\,ds\,dt = dU_\varepsilon\,dV_\varepsilon\,d\bar{s}\,d\bar{t}\,ds\,dt$ alors on considère l'application qui associe au vecteur $(s, t, U_\varepsilon, V_\varepsilon)$ le vecteur $(s', t', U'_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ alors le jacobien de cette transformation est 1, d'où on a :

$$\begin{aligned}
&((h \otimes h')oS)[f, 0] \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} ((h \otimes h')oS)(s', t')\,\partial_{\bar{s}'} U'_\varepsilon(s', t')\,\partial_{\bar{t}'} V'_\varepsilon(s', t')\,d\bar{s}'\,d\bar{t}'\,ds'\,dt' \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} (h \otimes h')(s, t)\ \partial_{\bar{s}} U_\varepsilon(s,t)\,\partial_{\bar{t}} V_\varepsilon(s,t)\,d\bar{s}\,d\bar{t}\,ds\,dt \\
&= (h \otimes h')[\mathrm{f,f}]
\end{aligned}$$

Montrons que $((h \otimes h')oS)[f, 0] = h\,h'[f]$, comme on peut écrire :

$$U'_{\varepsilon,\varepsilon'} = v'_\varepsilon \otimes \varphi_{\varepsilon'},\ V'_{\varepsilon'} = 1 \otimes \omega'_{\varepsilon'} \text{ et } Z'_{\varepsilon,\varepsilon'} = \psi_\varepsilon \otimes \varphi_{\varepsilon'}$$

avec :

$$\begin{cases} (s' - f)\,v'_\varepsilon(s) + \psi_\varepsilon(s) & =1 \\ t'\,w'_{\varepsilon'}(t') + \varphi_{\varepsilon'}(t') & =1 \end{cases}$$

alors on a :

$$((h \otimes h')oS)[f, 0] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \lim_{\varepsilon,\varepsilon' \to 0^+} \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} ((h \otimes h')oS)(s', t')\,\partial_{\bar{s}'} U'_{\varepsilon,\varepsilon'}(s', t')\,\partial_{\bar{t}'} V'_\varepsilon(s', t')\,d\bar{s}'\,d\bar{t}'\,ds'\,dt'$$

Or on a :

$$((h \otimes h')oS)[f, 0] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \lim_{\varepsilon,\varepsilon' \to 0^+} \int_{\mathbb{C}} h(s') \int_{\mathbb{C}} h'(s' + t')\ \varphi_{\varepsilon'}(t')\partial_{\bar{t}'} V'_{\varepsilon'}(t')\,d\bar{t}'\,dt' \partial_{\bar{s}'} v'_\varepsilon(s')\,d\bar{s}'\ ds'$$

Comme on a pour ε fixé et $s' \in U \backslash K_\varepsilon$:

$$\sup_{\varepsilon' > 0} \int_{\mathbb{C}} \varphi_{\varepsilon'}(t')\,|\partial_{\bar{t}'} V'_{\varepsilon'}(t')|\,dm(t') < \infty$$

alors pour h' fonction continue sur U on a :

$$h'(s') = \frac{1}{(2\pi i)} \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \int_{\mathbb{C}} h'(s' + t')\ \varphi_{\varepsilon'}(t')\partial_{\bar{t}'} V'_{\varepsilon'}(t')\,d\bar{t}'\,dt'$$

On a $((h \otimes h')oS)[f, 0] = h\,h'[f]$ et on a $(h \otimes h')oT = (h \otimes h')oSoi$; alors :

$$((h \otimes h')oT)[f] = ((h \otimes h')oSoi)[f] = (h \otimes h')oS)[f, 0]$$

Or on a montré que $((h \otimes h')oT)[f] = h\,h'[f]$ et $((h \otimes h')oS)[f, f] = h[f]\,h'[f]$. ∎

Remarques :
On montre par substitution dans la formule de Cauchy-Pompéiu que $h[f] = hof$; on en déduit aussi que $h\,h'[f] = h[f]\,h'[f]$.
Si on considère une algèbre topologique A, si $a \in A$ est un élément régulier de A et si on peut contrôler la résolvante de a par une fonction δ alors on définit l'élément $h[a]$ pour $h \in \mathcal{C}^1_\delta(\sigma(a))$

3.4 Convolution

Si on remplace la multiplication par la convolution alors on a les mêmes résultats que dans le théorème 3 et on a aussi le théorème suivant.

Théorème 4. *: Si* $(h,h') \in \mathcal{C}^1_{\delta,0}(\sigma(\hat{f}))^2$ *alors on a :*
(i)$\widehat{h[f]^*} = h[\hat{f}] = \hat{h}of$ *et*
(ii)$h\,h'[f]^* = h[f]^* * h'[f]^*$

Démonstration :
(ii) est une conséquence directe de (i). Pour montrer (i) on va rappeler l'identité spectrale associée à f on a :

$$(\lambda - f)\, v_\varepsilon(\lambda) + \psi_\varepsilon(\lambda) = 1$$

dans $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$, d'où par $\mathcal{F}$ourier on a :

$$(\lambda\, \delta_0 - \hat{f}) * \hat{v}_\varepsilon(\lambda) + \psi_\varepsilon(\lambda)\, \delta_0 = \delta_0$$

où δ_0 est la mesure de Dirac à l'origine. Calculons $\widehat{h[f]}$, on a par $\mathcal{F}$ourier :

$$\widehat{h[f]} = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{C}} h(\lambda)\ \partial_{\bar{z}} \hat{v}_\varepsilon(\lambda)\ d\lambda\, d\bar{\lambda}$$

d'où aussi $\widehat{h[f]^*} = h[\hat{f}] = ho\hat{f}$, ce qui termine la démonstration du théorème 4. ■

3.5 Extension du théorème de composition

D'après le théorème de l'image spectrale on a $\sigma(h[f]) = h(\sigma(f))$, pour $h \in \mathcal{C}^1_\delta(\sigma(f))$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Soient $\delta \in \Delta(\sigma(f))$ et U un voisinage de $\sigma(f)$. On dit que $h \in \mathcal{C}^2_\delta(U)$ si et seulement si $h \in \mathcal{C}^1_\delta(U)$ et h est de classe C^1 sur U.
$\mathcal{C}^2_\delta(\sigma(f))$ est par définition la limite inductive de la famille $(\mathcal{C}^2_\delta(U))_{U \in \mathcal{V}(K)}$. On a le théorème suivant.

Théorème 5. *: Soit* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*,* $h \in \mathcal{C}^2_\delta(\sigma(f))$*, on suppose que* h *est un difféomorphisme de* $\sigma(f)$ *sur* $\sigma(h[f])$*. si on pose* $\delta'(h(z)) = \delta(z)$ *et si* $h' \in \mathcal{C}^2_{\delta'}(\sigma(h[f]))$ *alors on a :*
(i)$h'oh \in \mathcal{C}^1_\delta(\sigma(f))$ *et*
(ii)(h'oh)[f]=h'[h[f]]

Démonstration :
Pour montrer (i) on a besoin de calculer $\partial_{\bar{z}}(h'oh)$. A la fonction h' on associe la variable $z' = x' + iy'$. Commençons par calculer $\partial_x(h'oh)$ et $\partial_y(h'oh)$. On a :

$$\partial_x(h'oh) = \partial_{x'} h'\, \partial_x h_1 + \partial_{y'} h'\, \partial_x h_2$$

et

$$\partial_y(h'oh) = \partial_{x'} h'\, \partial_y h_1 + \partial_{y'} h'\, \partial_y h_2$$

Comme $2\partial_{\bar{z}}(h'oh) = \partial_x(h'oh) + i\partial_y(h'oh)$ on a :

$$\partial_{\bar{z}}(h'oh) = \partial_{x'} h'_1\, \partial_{\bar{z}} h_1 + \partial_{y'} h'\, \partial_{\bar{z}} h_2$$

Comme $h = h_1 + i\, h_2$ on a :

$$\partial_{\bar z}(h' o h) = (\partial_{x'} h')(h(z))\,(\partial_{\bar z} h)(z) - i(\partial_{\bar z'} h')(h(z))\,(\partial_{\bar z} h_2)(z) \tag{3.11}$$

d'après (3.11) on a (i). Pour (ii) on utilise le changement de variable $\eta = h(\zeta)$. ■

4 Théorème des fonctions implicites appliqué au calcul fonctionnel

Soient f une fonction de spectre K et F une fonction définie et continue sur un ouvert $U' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On suppose que F vérifie :

$$(H")\begin{cases} \text{si } z \in K \text{ alors il existe } y \in \mathbb{C} \text{ tels que } (z,y) \in U' \text{ et } F(z,y) = 0). \\ F'_y(z,y) \text{ est inversible pour } F(z,y) = 0 \text{ et } z \in K. \end{cases}$$

Proposition 5. *: Si F une fonction de classe C^1 sur U' vérifiant $(H")$ alors il existe une fonction h de classe C^1 sur un voisinage V de K, vérifiant sur V :*

$$F(z, h(z)) = 0$$

Démonstration :
Si on applique au point 0 le théorème des fonctions implicites, alors il existe une fonction h définie sur un voisinage V de 0, vérifiant sur V :

$$F(z, h(z)) = 0$$

Soit H l'ensemble suivant :

$$H = \{z \in K /\ h \text{ est définie au voisinage de } z\}$$

montrons que H est à la fois un ouvert de K et un fermé de K. H est déjà un ouvert de K, pour montrer que H est un fermé de K, on utilise la condition de Lipschitz que vérifie h. Comme H rencontre chaque composante connexe de K alors $H = K$.■

Soit $K' = \{(z, h(z)) \in \mathbb{C}^2 /\ (z \in K)\}$.

Théorème 6. *: Soit F une fonction définie et de classe C^1 sur un ouvert $U' \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ et vérifiant (H"). On suppose que $F \in \mathcal{C}^1_\delta(K')$ pour $\delta \in \Delta(K')$ et que :*

$$\int_V |\bar\partial_{z,y} F(z, h(z))|\, \delta^{-1}(z, h(z))\, dm(z) < \infty \tag{3.12}$$

Alors $h \in \mathcal{C}^1_{\delta'}(\sigma(f))$ pour $\delta'(z) = \delta(z, h(z))$ et on a :

$$F[f, h[f]] = 0$$

Démonstration :
On pose $z = s + it$ et $y = s' + it'$. On a :

$$\partial_{\bar z}(F(., h(.))) = (\partial_{\bar z} F)(., h(.)) + (\partial_{s'} F)(., h(.))\, \partial_{\bar z} h - i(\partial_{\bar y} F)(., h(.))\, \partial_{\bar z} h_2$$

Comme $\partial_{\bar{z}}(F(.,h(.))) = 0$ on a :

$$0 = (\partial_{\bar{z}}F)(.,h(.)) + (\partial_{s'}F)(.,h(.))\,\partial_{\bar{z}}h - i(\partial_{\bar{y}}F)(.,h(.))\,\partial_{\bar{z}}h_2$$

Comme $F'_y(z,y)$ est inversible sur un voisinage de K' alors $\partial_{s'}F \neq 0$ sur le même voisinage. D'où :

$$\partial_{\bar{z}}h = -\frac{1}{(\partial_{s'}F)(.,h(.))}\{(\partial_{\bar{z}}F)(.,h(.)) - i(\partial_{\bar{y}}F)(.,h(.))\,\partial_{\bar{z}}h_2\}$$

Comme F vérifie (3.12) alors on a $\int_U |\bar{\partial}h(z)|\,\delta'^{-1}(z)\,dm(z) < \infty$ où $\delta'(z) = \delta(z,h(z))$. Montrons que $F[f,h[f]] = 0$. Soient les deux identités spectrales suivantes :

$$\begin{cases} (\lambda - f)\,v_\varepsilon(\lambda) + \psi_\varepsilon(\lambda) & = & 1 \\ (\lambda - h[f])\,\omega_{\varepsilon'}(\lambda) + \varphi_{\varepsilon'}(\lambda) & = & 1 \end{cases}$$

A partir de ces deux familles spectrales $(v_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ et $(\omega_{\varepsilon'}, \varphi_{\varepsilon'})$, on construit la famille spectrale suivante :

$$U_{\varepsilon,\varepsilon'} = v_\varepsilon \otimes \varphi_{\varepsilon'},\;\; V_{\varepsilon'} = 1 \otimes \omega_{\varepsilon'} \text{ et } Z_{\varepsilon,\varepsilon'} = \psi_\varepsilon \otimes \varphi_{\varepsilon'}$$

Par exemple on a $U_{\varepsilon,\varepsilon'}(\zeta,\zeta') = v_\varepsilon(\zeta)\,\varphi_{\varepsilon'}(\zeta')$. On a aussi dans $\mathbb{C}^2$ l'identité spectrale suivante :

$$(\zeta - f)\,U_\varepsilon + \;(\zeta' - h[f])\,V_{\varepsilon'} + Z_{\varepsilon,\varepsilon'} = 1 \tag{3.13}$$

On définit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \lambda & = & \zeta \\ \lambda' & = & \zeta' - h(\zeta) \end{cases}$$

alors l'identité (3.13) s'écrit :

$$(s - f)\,U_{\varepsilon,\varepsilon'} + \;(h(s) - h[f])\,V_{\varepsilon'} + \;(t - h(s))\,V_{\varepsilon'} + Z_{\varepsilon,\varepsilon'} = 1$$

montrons qu'elle s'écrit :

$$(\lambda - f)\,U'_{\varepsilon,\varepsilon'} + \;\lambda'\,V'_{\varepsilon'} + Z'_{\varepsilon,\varepsilon'} = 1$$

Soient les deux identités spectrales suivantes :

$$\begin{cases} (\lambda - f)\,v_\varepsilon(\lambda) + \;\psi_\varepsilon(\lambda) & = & 1 \\ (\lambda - \zeta)\,\tilde{v}_\varepsilon(\lambda) + \;\psi_\varepsilon(\lambda) & = & 1 \end{cases}$$

d'où :

$$\bar{\partial}v_\varepsilon(\lambda) - \bar{\partial}\tilde{v}_\varepsilon(\lambda) = \frac{f - \zeta}{\lambda - \zeta}\bar{\partial}v_\varepsilon(\lambda)$$

d'où aussi :

$$h[f] - h(\zeta) = (f - \zeta)\,\frac{1}{(2\pi i)}\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{\mathbb{C}} h(\lambda)\,\frac{1}{\lambda - \zeta}\,\partial_{\bar{\lambda}}v_\varepsilon\,d\bar{\lambda}\,d\lambda$$

or la fonction $\frac{1}{\lambda-\zeta}\,v_\varepsilon$ ainsi que ses dérivées par rapport à λ sont contrôlées par $\delta(\lambda)$.

Proposition 6. *: On a :*

$$F[f,h[f]] = \frac{1}{(2\pi i)} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{C}} F(\lambda, h(\lambda))\ \partial_{\bar\lambda} v_\varepsilon \, d\bar\lambda \, d\lambda$$

Démonstration :
Le couple $(f, h[f])$ est transformé par le changement de variable en $(f, 0)$. Comme dans le calcul fonctionnel le changement de la famille spectrale ne modifie pas la limite, alors on choisit pour le couple $(f, 0)$ la famille spectrale suivante :

$$\begin{cases} (\lambda - f)\, v_\varepsilon(\lambda) + \psi_\varepsilon(\lambda) & = & 1 \\ \lambda' \, \tilde w_{\varepsilon'}(\lambda') + \tilde\varphi_{\varepsilon'}(\lambda') & = & 1 \end{cases}$$

où $\tilde\varphi_{\varepsilon'}$ est de support la boule de centre 0 et de rayon ε', d'où :

$$F[f,h[f]] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0^+} \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} (F(\lambda, \lambda' + h(\lambda))\ \tilde\varphi_{\varepsilon'}(\lambda')\partial_{\bar\lambda} v_\varepsilon \, \partial_{\bar\lambda'} \tilde w_{\varepsilon'} \, d\bar\lambda \, d\bar\lambda' \, d\lambda \, d\lambda'$$

Comme on a :

$$\sup_{\varepsilon'>0} \int_{\mathbb{C}} |\tilde\varphi_{\varepsilon'}(\lambda')|\, |\partial_{\bar\lambda'} \tilde w_{\varepsilon'}(\lambda')| \, dm(\lambda') < \infty$$

et :

$$1 = \frac{1}{(2\pi i)} \lim_{\varepsilon'\to 0^+} \int_{\mathbb{C}} \tilde\varphi_{\varepsilon'}(\lambda')\partial_{\bar\lambda'} \tilde w_{\varepsilon'}(\lambda') \, d\bar\lambda' \, d\lambda'$$

alors pour ε fixé et $\lambda \in U\backslash K_\varepsilon$, on a :

$$F(\lambda, h(\lambda)) = \frac{1}{(2\pi i)} \lim_{\varepsilon'\to 0^+} \int_{\mathbb{C}} F(\lambda, \lambda' + h(\lambda))\ \tilde\varphi_{\varepsilon'}(\lambda')\partial_{\bar\lambda'} \tilde w_{\varepsilon'}(\lambda') \, d\bar\lambda' \, d\lambda'$$

en conclusion :

$$F[f,h[f]] = \frac{1}{(2\pi i)} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{C}} F(\lambda, h(\lambda))\ \partial_{\bar\lambda} v_\varepsilon \, d\bar\lambda \, d\lambda$$

comme $F(\lambda, h(\lambda)) = 0$ sur un voisinage de $\sigma(f)$ alors on a le théorème 6. ■

Pour finir, signalons qu'on définit aussi un calcul fonctionnel multidimensionnel dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^k$ lié à la croissance des coefficients spectraux de l'identité spectrale.

Je tiens à remercier le referee de cet article pour les corrections et les remarques précieuses qu'il a apportées à cet article.

Références

[1] B.Droste : *Holomorphic Approximation of Ultradifferentiable Functions.* Math. Ann. 257 1981. 293-316.

[2] M.Hemdaoui : *Calcul symbolique et l'opérateur de Laplace.* Doctorat Université libre de Bruxelles année académique 1986-1987 BELGIQUE.

[3] L.Hörmander : *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables* (1990) Third Edition North-Holland Mathematical Library.

[4] L.Hörmander : *The analysis of Linear Partial Differential Operators I* (1983) A Series of Comprehencive Studies in Mathematics 256, Springer-Verlag.

[5] Nguyen the Hoc : *Croissance des coefficients spectraux et calcul fonctionnel.* Thèse année académique 1975-1976 U.L.B Bruxelles Belgique.

[6] Nguyen the Hoc : *Calcul fonctionnel dépendant de la croissance des coefficients spectraux.* Annales de L'Institut Fourier Tome 27 fascicule 4 1977.

[7] L.Waelboeck : *Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives.* J. Math. P. et App. 9 33 1954. p. 147-186.

[8] L.Waelboeck : *Calcul Symbolique lié à la croissance de la résolvante*, Rend.del Sem. Mat.e Fis. di Milano 34 (1964), 51-72.

[9] L.Waelbroeck : *The holomorphic functional calculus as an operational calculus.* Spectral Theory. Banach center publications, volume 8. Warsaw 1982.

[10] C.Wrobel : *Extension du calcul fonctionnel holomorphe.* Revue Math II institue Elie Cartan 1972 Nancy France.

Faculté des Sciences, Université Mohammed I
Oujda, Maroc