Critères de Le Page et commutativité dans les algèbres m-convexes

O. H. Cheikh A. El Kinani M. Oudadess

Abstract

We obtain a general theorem of Le Page type on commutativity of Banach algebras, which allows to get all the known results as corollaries, and we give analogous results in the framework of locally m-convex algebras.

1 Introduction, terminologie et notations.

L'objet de ce travail est l'étude de certaines conditions entraînant la commutativité dans les algèbres normées ainsi que dans d'autres classes d'algèbres topologiques, notamment les algèbres localement multiplicativement convexes. Nous commençons par considérer un critère généralisant celui étudié dans les algèbres de Banach par C. Le Page ([13]). Ce critère généralisé a été déjà examiné par les deux derniers auteurs ([9]). Il est établi ici que les résultats obtenus dans les algèbres de Banach restent valides dans d'autres algèbres topologiques. Dans les algèbres A vérifiant $Ax^2 = Ax$ pour tout élément x, nous donnons une description de l'espace structurel ainsi qu'une caractérisation du radical de Jacobson et montrons que ces algèbres sont commutatives modulo ce dernier. Enfin, nous examinons certaines conditions équivalentes à la commutativité modulo le radical dans une algèbre de Banach ou dans une Q-a.l.m.c complète.

Une algèbre localement convexe (a.l.c) est une algèbre A munie d'une topologie séparée d'espace localement convexe (e.l.c) pour laquelle le produit $(x, y) \to xy$

Received by the editors November 1997. In revised form : May 1998.
Communicated by Fr. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 46H05; 46H20 .
Key words and phrases : Algèbre de Banach, algèbre m-convexe, radical de Jacobson, rayon spectral, commutativité.

est séparément continu. Si la topologie de A est définie par une famille $(P_\lambda)_\lambda$ de A-semi-normes, c'est-à-dire des semi-normes d'espace vectoriel vérifiant $P_\lambda(xy) \leq M(x,\lambda)P_\lambda(y)$ et $P_\lambda(yx) \leq M(x,\lambda)P_\lambda(y)$ pour tout λ et tous $x, y \in A$, où $M(x,\lambda)$ est une constante positive dépendant de x et de λ, on dit que A est une algèbre localement A-convexe (a.l.A-c). Si $M(x,\lambda) = P_\lambda(x)$ pour tout x et tout λ, on dit que A est une algèbre localement multiplicativement convexe (a.l.m.c) et si $M(x,\lambda) = M(x)$ ne dépend que de x, elle est dite uniformément localement A-convexe (a.u.l.A-c). Une algèbre A-normée est une algèbre munie d'une norme d'espace vectoriel pour laquelle le produit est séparément continu.

Une unité approchée (resp. à gauche ; resp. à droite) dans l'a.l.c A est une famille $(e_\alpha)_\alpha$ d'éléments de A telle que pour tout $x \in A$, les suites généralisées $(e_\alpha x)_\alpha$ et $(xe_\alpha)_\alpha$ (resp. $(e_\alpha x)_\alpha$; resp. $(xe_\alpha)_\alpha$) convergent vers x.

Si A est une algèbre unitaire d'unité e, on désigne par $C(A) = \{x \in A : xy = yx$ pour tout $y \in A\}$ le centre de A et par G le groupe des éléments inversibles de A. Si G est ouvert dans A, on dit que A est une Q-algèbre. Si A n'a pas d'élément unité, on note $A_1 = A \bigoplus \mathbb{C}$ l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A.

Pour les notions de A-module topologique (resp. à droite, resp. à gauche), de rayons spectral et numérique d'un élément, nous adoptons les définitions de ([4]). Toutes les algèbres considérées sont complexes et associatives.

2 Un critère généralisé de Le Page.

C'est C. Le Page qui inaugura ([13]) l'étude de la condition $||xy|| \leq \alpha||yx||$ (où $\alpha > 0$ est une constante) dans les algèbres de Banach unitaires. Plusieurs auteurs ont ensuite étudié cette même condition dans les algèbres de Banach non unitaires ou en ont considérée des variantes plus générales ([3], [9], [10], [14], ...). Nous montrons ici que les résultats obtenus s'étendent à d'autres algèbres topologiques dont en particulier les a.l.m.c.

Théorème 2.1. *Soit $(A, (P_j)_{j\in J})$ une a.l.c telle que l'exponentielle opère dans A (ou dans A_1 si A n'est pas unitaire), $(E, (r_i)_{i\in I})$ un e.l.c et $S : A \to E$ une application linéaire continue. On suppose que pour un certain i_0, il existe une application q_{i_0} de A dans $\mathbb{R}_+$ telle que :*

$$r_{i_0}[S(uv)] \leq q_{i_0}(vu); \qquad (u, v \in A) \qquad (1)$$

Alors : a) $r_{i_0}[S((xy)z) - S(z(xy))] = 0$ pour tous $x, y, z \in A$.
b) Si A admet une unité approchée à droite ou à gauche, alors $r_{i_0}[S(xy)-S(yx)] = 0$ pour tous $x, y \in A$.
c) Si (1) est vérifiée pour tout $u \in A_1$ et tout $v \in A$, alors $r_{i_0}[S(xy) - S(yx)] = 0$ pour tous $x, y \in A$.

Preuve. a) Soient $x, y, z \in A$. On pose $f(\lambda) = S(e^{\lambda z}xye^{-\lambda z}); \lambda \in \mathbb{C}$. Si ϕ est une forme linéaire sur E, continue pour r_{i_0}, l'application holomorphe $\phi \circ f$ est bornée. D'après le théorème de Liouville, elle est constante. En prenant sa dérivée en $\lambda = 0$, on obtient $\phi[S((xy)z) - S(z(xy))] = 0$. Par le Théorème de Hahn-Banach, on a alors $r_{i_0}[S((xy)z) - S(z(xy))] = 0$.
b) Suit de a).
c) Pour $x, y \in A$ on pose $g(\lambda) = S(e^{\lambda x}ye^{-\lambda x})$ et on fait comme dans a). ∎

Le corollaire suivant est une extension des résultats obtenus dans ([9]) et ([15]) pour les algèbres de Banach.

Corollaire 2.2. *Soit $(A,(P_j)_{j\in J})$ une a.l.A-c complète. On suppose que pour tout $j\in J$, il existe une constante $\alpha_j>0$ telle que :*

$$P_j(uv)\leq \alpha_j P_j(vu);\qquad (u,v\in A; j\in J) \qquad (2)$$

Alors : a) $A^2=\{xy; x,y\in A\}$ est contenu dans $C(A)$.
b) Si A admet une unité approchée à gauche ou à droite, elle est commutative.
c)Si (2) est vérifiée pour tout $u\in A_1$ et tout $v\in A$, alors A est commutative.

Remarquons que la condition (2) n'entraîne pas la commutativité dans les algèbres de Banach. Un contre-exemple en est donné dans ([6]).

Soit $(A,(P_j)_{j\in J})$ une a.l.m.c. Pour $j\in J$, on pose $N_j=\{x\in A: P_j(x)=0\}$ et $A_j=A/N_j$. Les éléments de A_j seront notés $\overline{x},\overline{y},\ldots$. On munit A_j de la norme $\overline{P_j}$ déduite de P_j et on désigne par $\rho_j(\overline{x})$ le rayon spectral d'un élément de l'algèbre normée $(A_j,\overline{P_j})$ et par $\nu(\overline{x})$ le rayon numérique, dans la complétée de $(A_j,\overline{P_j})$, d'un élément $\overline{x}$ de A_j.

Corollaire 2.3. *Soit $(A,(P_j)_{j\in J})$ une a.l.m.c complète et unitaire. Si A vérifie l'une des conditions suivantes :*

$$(\forall j\in J),(\exists \alpha_j>0):\quad P_j(uv)\leq \alpha_j\rho_j(\overline{v}\,\overline{u});\quad (u,v\in A)\quad (3)$$
$$(\forall j\in J),(\exists \alpha_j>0):\quad P_j(uv)\leq \alpha_j\nu_j(\overline{v}\,\overline{u});\quad (u,v\in A)\quad (4)$$
$$(\forall i\in I),(\exists j\in J),(\exists \alpha_i>0):\quad r_i(uv)\leq \alpha_i\rho_j(\overline{v}\,\overline{u});\quad (u,v\in A)\quad (5)$$

où $(r_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de semi-normes définissant sur A une topologie moins fine alors on a dans A les conclusions a), b) et c) du corollaire ci-dessus.

Remarquons que la condition $P_j(u)\leq \alpha_j\rho_j(\overline{u}); (u\in A; j\in J)$ consdérée dans ([9]) est un cas particuliers de (3). Pour les conditions (3) et (5) il n'est pas nécessaire que A soit unitaire.

Corollaire 2.4. *Soit $(A,(P_j)_{j\in J})$ une a.l.A-c complète, $(E,(r_i)_{i\in I})$ un e.l.c et $S: A\to E$ une application linéaire continue. On suppose que pour chaque i, il existe $j\in J$ et $\alpha_i>0$ tels que :*

$$r_i[S(xy+y)]\leq \alpha_i P_j(yx+y);\qquad (x,y\in A) \qquad (6)$$

Alors $S(xy)=S(yx)$ pour tous $x,y\in A$.

Preuve. En effet, la condition (6) est équivalente à $r_i[S(uv)]\leq \alpha_i P_j(vu)$; $(u\in A_1; v\in A)$. On conclut à l'aide du théorème 2.1. c). ∎

Ce corollaire est l'analogue du résultat de Niestegge ([14]).

Théorème 2.5. *Soit $(A,(P_j)_{j\in J})$ une a.l.c telle que l'exponentielle opère dans A (ou dans A_1 si A n'est pas unitaire), M un A-module topologique à gauche, X un e.l.c, $h: A\times M\to X$ une application bilinéaire continue, $(E,(r_i)_{i\in I})$ un e.l.c et $S: X\to E$ une application linéaire continue. On suppose que pour un certain i_0, il existe une application q_{i_0} de M dans $\mathbb{R}_+$ telle que :*

$$r_{i_0}[S(h(a,m))]\leq q_{i_0}(am);\quad (a\in A; m\in M) \qquad (7)$$

Alors : i) $r_{i_0}[S(h(b,am))-S(h(ba,m))]=0$ pour tous $a,b\in A$ et tout $m\in M$.
ii) Si A admet une unité approchée à gauche $(e_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$, alors $r_{i_0}[\lim_\alpha S(h(e_\alpha,am))-$

$S(h(a,m))] = 0$ *pour tout* $a \in A$ *et tout* $m \in M$.
iii) Si (7) *est vérifiée pour tout* $a \in A_1$ *et tout* $m \in M$, *alors* $r_{i_0}[S(h(e,am)) - S(h(a,m))] = 0$ *pour tout* $a \in A$ *et tout* $m \in M$ *où* e *est l'unité de* A_1.

Ce théorème est une généralisation d'un résultat de ([10]). Sa preuve, identique à celle du théorème 2.1., utilise les fonctions $f_1(\lambda) = S(h(be^{-\lambda a}, e^{\lambda a}m))$ et $g_1(\lambda) = S(h(e^{-\lambda a}, e^{\lambda a}m))$ $(a, b \in A; m \in M)$ au lieu de f et g respectivement.

Corollaire 2.6. *Supposons que* $h(x,y) = x\Delta y$ *soit un produit continu sur* A. *Si pour tout* $j \in J$, *il existe une application* $q_j : A \to \mathbb{R}_+$ *telle que :*

$$P_j[S(a\Delta b)] \leq q_j(ab); \quad (a, b \in A; j \in J) \qquad (8)$$

Alors : i) $S[x\Delta(yz)] = S[(xy)\Delta z]$ *pour tous* $x, y, z \in A$
ii) Si A *admet une unité approchée pour les deux produits, alors* $S(xy) = S(x\Delta y)$ *pour tous* $x, y \in A$
iii) Si (8) *est vérifiée pour tout* $a \in A_1$ *et tout* $b \in A$, *alors* $S(xy) = S(x\Delta y)$ *pour tous* $x, y \in A$.

Si par exemple le produit Δ est le produit opposé $(x, y) \to yx$, ce corollaire contient l'analogue du résultat de Baker et Pym ([3]). Ce corollaire s'applique à d'autres produits sur A : produit de Jordan, produits d'Arens, ...

3 Sur les algèbres vérifiant $Ax^2 = Ax$ pour tout x.

On considère une algèbre A vérifiant la condition suivante :

$$Ax^2 = Ax \qquad \textit{pour} \qquad \textit{tout} \qquad x \in A \qquad (P)$$

Les algèbres de Banach unitaires de ce type ont été étudiées par C. Le Page ([13]) et d'autres ([7],[8],[11], ...). Ici nous donnons une description du radical de Jacobson dans les algèbres vérifiant (P) et nous retrouvons les résultats de Le Page ([13]), Duncan et Tullo ([8]), Oudadess ([15]) ainsi que ceux d'Esterle et Oudadess ([11]). Nous obtenons également un théorème de représentation pour certaines algèbres vérifiant (P).

Signalons que la condition (P), imposée à l'algèbre normée A ne passe ni à sa complétée $\hat{A}$ ni à l'algèbre A_1 obtenue par adjonction de l'unité à A.

Proposition 3.1. *Soit* A *une algèbre vérifiant* (P). *Alors :*
i) $RadA = \{x \in A : x^2 = 0\}$.
ii) Si A *est unitaire, alors* A *est semi-simple.*
iii) Si p *est un idéal primitif de* A, *alors* A/p *est un corps.*

Preuve. i) Si $x \in RadA$, alors yx^2 est quasi-inversible pout tout $y \in A$. Il existe $y \in A$ tel que $x^2 = yx^4$, d'où $x^2 = 0$. On en déduit que $RadA \subseteq R = \{x \in A : x^2 = 0\}$. Or R est un idéal à gauche de A qui est contenu dans $RadA$ d'après ([4], p. 125).
iii) Soit p un idéal primitif de A et a un élément non nul de A/p. Il existe $b \in A/p$ tel que $a^2 = ba^4$. Alors $u = ba^4$ est idempotent et central dans A/p, c'est donc l'élément unité de A/p. Cela montre que A/p est un corps. ∎

On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux primitifs d'un anneau A. Muni de la topologie de Jacobson ([12]), $\mathcal{P}$ s'appelle l'espace structurel de l'anneau A.

Proposition 3.2. *Si A est une algèbre vérifiant (P), alors l'espace structurel de A est séparé, localement compact et totalement discontinu.*

Preuve. Les espaces structurels de A et $A/RadA$ étant homéomorphes, on peut supposer que A est semi-simple. En utilisant une méthode similaire à celle de ([12], pp. 206-209), on démontre que si p_1 et p_2 sont deux idéaux primitifs distincts de A, il existe un ouvert compact et fermé O_1 de $\mathcal{P}$ tel que $p_1 \in O_1$ et $p_2 \notin O_1$. En effet, si $x \in p_2$ et $x \notin p_1$, il suffit de prendre $O_1 = \mathcal{P}(eA) = \{p \in \mathcal{P} : eA \not\subseteq p\}$ où e est un idempotent central tel que $ex = x$. ■

Théorème 3.3. *Soit A une algèbre semi-simple vérifiant (P). Si tout idéal primitif de A est de codimension un, alors A est isomorphe à une algèbre de fonctions continues à valeurs complexes et à support compact sur un espace localement compact et totalement discontinu.*

Preuve. Soit ψ l'application de A dans l'algèbre des fonctions complexes sur $\mathcal{P}$ définie par $\psi(a) = \overline{a}$ où $\overline{a} : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ est donnée par $\overline{a}(p) = a_p$ $(a_p = a + p)$. Comme A est semi-simple, ψ est un isomorphisme de A sur une sous-algèbre $\psi(A)$ de l'algèbre des fonctions sur $\mathcal{P}$. Soit a un élément non nul de A. Il existe un idempotent central e tel que $ea = a$. Alors $O = \mathcal{P}(eA) = \{p \in \mathcal{P} : eA \not\subseteq p\}$ est compact ouvert et fermé dans $\mathcal{P}$. Or $\overline{e}$ est précisément la fonction caractéristique de O. Il en résulte que $\overline{e}$, et aussi $\overline{a}$, est à support compact. Soit k une valeur particulière prise par $\overline{a}$ et $O_1 = \{p \in \mathcal{P} : a_p = k\}$. Alors $O_1 = O \bigcap \{p \in \mathcal{P} : a - ke \in p\}$. Comme le second ensemble dans cette intersection est à la fois ouvert et fermé, l'ensemble O_1 est aussi ouvert et fermé. Il en résulte que $\overline{a}$ est continue. ■

Théorème 3.4. *Soit A une algèbre normée vérifiant (P).*
1) Si A est semi-simple alors A est commutative.
2) Si A admet une unité approchée à gauche (ou à droite), alors A est commutative.

Preuve. 1) L'algèbre A n'a pas d'éléments nilpotents puisqu'elle est semi-simple. Soit x un élément non nul de A. Il existe $y \in A$ tel que $x^2 = yx^4$. Mais alors $x^2 = y^n x^{2n+2}$ pour tout $n > 0$ et donc $A \bigcap Rad\hat{A} = \{0\}$ où $\hat{A}$ est la complétée de A. Soit p un idéal primitif fermé de $\hat{A}$ et $\pi : \hat{A} \to \hat{A}/p$ la surjection canonique. Si $\pi(x)$ est un élément non nul de $\pi(A)$, il existe $y \in A$ tel que $e = yx^2$ soit un idempotent central vérifiant $ex = x$. Alors $\pi(e)$ est un idempotent non nul qui, par continuité de π, est central dans $\pi(\hat{A})$. Il en résulte que $\pi(e)$ est l'élément unité de $\pi(\hat{A})$ et $\pi(x)$ est donc inversible. On en déduit que $\pi(A)$ est un corps. D'après le théorème de Gelfand-Mazur, ce corps est $\mathbb{C}$. De même $\pi(\hat{A}) = \mathbb{C}$. Ainsi $\hat{A}/Rad\hat{A}$ est commutative. Comme $A \bigcap Rad\hat{A} = \{0\}$, l'algèbre A s'identifie à une sous-algèbre de $\hat{A}/Rad\hat{A}$, donc A est commutative.
2) Il suffit de montrer que A est semi-simple. Si $x \in RadA$, $x = \lim_\alpha e_\alpha x = 0$ où $(e_\alpha)_\alpha$ est une unité approchée à gauche de A. ■

En utilisant les techniques de ([8]), nous avons retrouvé le résultat suivant de ([11]). Pour la preuve, voir ([7]).

Théorème 3.5. *Si A est une algèbre de Banach semi-simple et vérifiant (P), alors A est commutative et de dimension finie (donc $A = \mathbb{C}^n, n > 0$).*

Il résulte de ce théorème qu'une algèbre de Banach unitaire vérifiant (P) est isomorphe à $\mathbb{C}^n, n > 0$ ([8]) et qu'une algèbre de Banach vérifiant (P) et à unité approchée à gauche (ou à droite) est isomorphe à $\mathbb{C}^n, n > 0$ ([15]). Il en résulte également que les seules algèbres de Banach vérifiant (P) sont les algèbres de la forme $A = RadA \bigoplus \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$ ([11]).

On considère maintenant certaines algèbres toplogiques non normées.

Proposition 3.6. *1) Si A est une algèbre A-normée semi-simple vérifiant (P) alors A est commutative.*
2) Si A est une a.l.m.c à unité approchée à gauche (ou à droite) vérifiant (P), alors A est commutative.
3) Si A est une a.u.l.A-c semi-simple et vérifiant (P) alors A est commutative.

Preuve. 1) On considère sur A la norme d'algèbre définie par $||x||_0 = Sup_{||y||\leq 1}||xy||$ et on utilise le théorème 3.4.
2) Si $(P_j)_{j\in J}$ est une famille de semi-normes définissant la topologie de A, chaque $(A_j, \overline{P_j})$ est commutative et A est une sous-algèbre du produit des A_j.
3) Si $(P_j)_{j\in J}$ est une famille de semi-normes définissant la topologie de A, on pose $||x||_c = Sup_{j\in J}\{Sup\ P_j(xy); P_j(y) \leq 1\}$. Alors $||.||_c$ est une norme d'algèbre sur A. ■

4 Algèbres presque commutatives.

Dans une algèbre de Banach A, la sous-additivité et la sous-multiplicativité du rayon spectral sont équivalentes à la commutativité de l'algèbre $A/RadA$ (on dit que A est presque commutative ([2])).

En utilisant une fonction quelconque qui domine le rayon spectral, nous donnons d'autres propriétés équivalentes à la presque commutativité.

Théorème 4.1. *Soit A une algèbre de Banach unitaire et $q : A \to \mathbb{R}_+$ une application telle que $\rho(x) \leq q(x)$ pour tout $x \in A$.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) $\rho(xy) \leq \rho(x)q(y); (x, y \in A)$.
2) Pour tout $x \in G$, l'ensemble $\{x + y : q(y) < \frac{1}{\rho(x^{-1})}\}$ est contenu dans G.
3) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + q(y); (x, y \in A)$.
4) $A/RadA$ est commutative.
5) $|\rho(x) - \rho(y)| \leq ||x - y||; \quad (x, y \in A)$.
6) $|\rho(x) - \rho(y)| \leq q(x - y); \quad (x, y \in A)$.

Preuve. 1)$\Longrightarrow$ 2) : Soit $x \in G$ et $y \in A$ tel que $q(y) < \frac{1}{\rho(x^{-1})}$. Alors $\rho(x^{-1}y) \leq \rho(x^{-1})q(y) < 1$. Il en résulte que $x + y = x(e + x^{-1}y) \in G$.
2) $\Longrightarrow$ 3) : Soient $x, y \in A$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \rho(x) + q(y)$. On a $\rho((\lambda - x)^{-1})q(y) < \frac{q(y)}{|\lambda|-\rho(x)} < 1$ et donc $\rho(x + y) \leq \rho(x) + q(y)$.
3) $\Longrightarrow$ 4) : Pour $x, y \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, soit $f(\lambda) = \frac{e^{\lambda x}ye^{-\lambda x}-y}{\lambda}$. La fonction $\rho(f(\lambda))$ est sous-harmonique ([2]) et tend vers 0 à l'infini car $\rho(f(\lambda)) \leq \frac{\rho(y)+q(y)}{|\lambda|}$. Elle est alors identiquement nulle. Par suite $\rho(xy - yx) = 0$ et donc $A/RadA$ est commutative ([2]).
Il est clair que **3) $\Longrightarrow$ 6)**. Un raisonnement identique à celui utilisé pour démontrer que 3) $\Longrightarrow$ 4) montre que **6) $\Longrightarrow$ 4)** (et aussi **5) $\Longrightarrow$ 4)**). Enfin, il est évident que **4) $\Longrightarrow$ 5)**. ■

Ce théorème s'applique, en particulier, si q est le rayon spectral ([2]) ou le rayon numérique et si q est la norme de l'algèbre ([5]) ou une norme équivalente. Il s'applique également si q est la semi-norme de Ptàk sur une algèbre hermitienne ([4]).

Supposons maintenant que A est une a.l.m.c unitaire qui est une Q-algèbre. Pour toute fonction holomorphe f de $\mathbb{C}$ dans A, la fonction $\rho(f(\lambda))$ est sous harmonique ([1]). Il en résulte que dans A, on a :

Théorème 4.2. *Soit A une a.l.m.c unitaire complète qui est une Q-algèbre et soit $q : A \to \mathbb{R}_+$ une application telle que $\rho(x) \leq q(x)$ pour tout $x \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
a) $\rho(xy) \leq \rho(x)q(y); \quad (x, y \in A)$.
b) Si $x \in G$, l'ensemble $\{x + y : q(y) < \frac{1}{\rho(x^{-1})}\}$ est contenu dans G.
c) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + q(y); \quad (x, y \in A)$.
d) $A/RadA$ est commutative.
e) $|\rho(x) - \rho(y)| \leq q(x - y); \quad (x, y \in A)$.

Remarque : Si A est une algèbre non unitaire, on note G^o l'ensemble des éléments quasi-inversibles de A et x^o le quasi-inverse d'un élément x de G^o. Les deux théorèmes de cette section sont valides dans A avec G^o, x^o et $\frac{1}{1+\rho(x^o)}$ à la place de G, x et $\frac{1}{\rho(x^{-1})}$ respectivement.

Remerciements : Le premier coauteur remercie l'AUPELF pour le soutien financier.

Références

[1] M. AKKAR, C. NACIR : *Unicité de structure d'algèbres limites inductives localement convexe de suites de Q-algèbres de Fréchet* , Bol. U.M.I. (7) 10-A, (1996), 157-168

[2] B. AUPETIT : *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*, L.N.M. 735, Springer-Verlag, (1979)

[3] J. W. BAKER, J. S. PYM : *A remark on continuous bilinear mappings*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)17, (1970-71), 245-248

[4] F. F. BONSALL, J. DUNCAN : *Complete normed algebras*, Springer-Verlag, New-York, (1973)

[5] O. H. CHEIKH : *Algèbres de Banach presque commutatives*, C. R. Math. Acad. Sci. Canada, Vol. XVII, No 6, (1995), 243-246

[6] O. H. CHEIKH, M. OUDADESS : *On a commutativity question in Banach algebras*, Arab Gulf J. Sci. Res. A6, No 2, (1988), 173-179

[7] O. H. CHEIKH, M. OUDADESS : *Commutativity of normed algebras E satisfying $Ex^2 = Ex$ for every x*, Dekker Lec. Notes in Pure and Applied Math. Vol. 185, (1995)

[8] J. DUNCAN, A. W. TULLO : *Finite dimensionality, nilpotents and quasi-nilpotents*, Colloq. Math. 37 (1977), 81-82

[9] A. EL KINANI, M. OUDADESS : *Un critère généralisé de Le Page et commutativité* , C. R. Math. Acad. Sci. Canada, Vol. XVIII, No 2-3, (1996), 71-74

[10] A. EL KINANI, M. OUDADESS : *Bilinear mappings and commutativity in Banach algebras*, Tübinger Berichte Zur Functionalanalysis 6 (1996/97), 54-58

[11] J. ESTERLE, M. OUDADESS : *Structure of Banach algebras satisfying* $Ax^2 = Ax$ *for every* $x \in A$, Proc. A. M. S. 96(1), (1986), 91-94

[12] N. JACOBSON : *Structure of rings*, Colloq. Pub. 37, A. M. S. (1968)

[13] C. LE PAGE : *Sur quelques conditions entraînant la commutativité dans les algèbres de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris 265 (1967), 235-237

[14] G. NIESTEGGE : *A note on criteria of Le Page and Hirschfeld- Zelazko for commutativity of Banach algebras*, Studia Math. T.LXXIX, (1984), 87-90

[15] M. OUDADESS : *Commutativité de certaines algèbres de Banach*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 28 No 1, (1983), 9-14

O. H. Cheikh
Faculté des Sciences et Techniques, Université de Nouakchott
B.P. 5026, Nouakchott, Mauritanie

A. El Kinani - M. Oudadess
Ecole Normale Supérieure Takaddoum, Département de Mathématiques
B.P. 5118, Rabat 10105, Maroc