Untersuchungen zur abgeschnittenen Hilbert-Transformation von BMO-Funktionen und VMO-Funktionen

Holger Boche

Abstract

The behaviour of the truncated Hilbert transform for functions of bounded mean oscillation (BMO) and functions of vanishing mean oscillation (VMO) is investigated in the paper. It is shown that for VMO functions the truncated Hilbert transform is convergent in the BMO-norm to the Hilbert transform. A new characterization of VMO function is also given in the paper.

1 Einleitung und Ergebnisse

In der Arbeit wird das Verhalten der abgeschnittenen Hilbert-Transformation für BMO-Funktionen und VMO-Funktionen untersucht.
Dazu werden als erstes einige Begriffe eingeführt. Mit $L^p[-\pi,\pi)$, $1 \le p < \infty$, wird die Menge aller p-integrierbaren Lebesgue meßbaren Funktionen bezeichnet. Es sei $C^\infty[-\pi,\pi)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen. Der Hardy-Littlewood-Maximaloperator ist durch

$$(Mf)(t) = \sup_{\mu(I)\le 2\pi} \frac{1}{\mu(I)} \int\limits_I |f(\tau)|\, d\tau \tag{1}$$

Received by the editors December 1997.
Communicated by F. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification* : 30D50, 31A20.
Key words and phrases : bounded mean oscillation, vanishing mean oscillation, Hilbert transform.

definiert [1], [2], [5]. Das Supremum in (1) wird über alle offenen Intervalle I mit $t \in I$ gebildet. Im weiteren bezeichnen wir mit $\mu(E)$ das Lebesguesche Maß der Lebesgue meßbaren Menge E. Für den Hardy-Littlewood Maximaloperator gilt für alle Funktionen $f \in L^1[-\pi,\pi]$ [1], [2], [6] die Abschätzung

$$\mu\Big(\{t \in [-\pi,\pi) \,|\, (Mf)(t) > \lambda\,\} \Big) \leq \frac{C_1}{\lambda} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt \ . \tag{2}$$

Hierbei ist $\lambda > 0$ beliebig und C_1 eine von f und λ unabhängige Konstante. Insbesondere haben wir

$$(Mf)(t) < \infty$$

für fast alle $t \in [-\pi,\pi)$. Das Poissonsche Integral einer Funktion $f \in L^1[-\pi,\pi)$ ist für $0 \leq r < 1$ durch

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\tau)+r^2}\, d\tau \tag{3}$$

definiert [7]. Für das Poissonintegral (3) gilt

$$\lim_{r\to 1} u(r,t) = f(t)$$

fast überall in $[-\pi,\pi)$ [1], [7]. Damit erhält man ebenfalls

$$\limsup_{r\to 1} |u(r,t)| < \infty$$

fast überall in $[-\pi,\pi)$.
Es sei $f \in L^1[-\pi,\pi)$ und I ein festes Intervall. Wir führen die Zahl

$$a_I(f) = \frac{1}{\mu(I)} \int\limits_I f(t)\, dt \tag{4}$$

ein. Wir betrachten nun die Menge aller $f \in L^1[-\pi,\pi)$, für welche die Beziehung

$$\sup_{\mu(I)\leq 2\pi} \frac{1}{\mu(I)} \int\limits_I |f(t) - a_I(f)|\, dt < \infty \tag{5}$$

gilt. Hierbei wird das Supremum in (5) über alle Intervalle $I \subset [-\pi,\pi)$ gebildet. Die Menge dieser Funktionen f bezeichnen wir mit BMO (bounded mean oscillation) [1], [6], [5]. Für diese Menge führen wir die Norm

$$\|f\|_* = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt + \sup_{\mu(I)\leq 2\pi} \frac{1}{\mu(I)} \int\limits_I |f(t) - a_I(f)|\, dt \tag{6}$$

ein [1]. Der Raum BMO ist mit dieser Norm ein nicht separabler Banachraum [1]. Für $\delta > 0$ betrachten wir weiterhin die Menge der Funktionen $f \in BMO$, für die mit

$$M_\delta f = \sup_{\mu(I)\leq \delta} \frac{1}{\mu(I)} \int\limits_I |f(t) - a_I(f)|\, dt \tag{7}$$

die Beziehung

$$\lim_{\delta\to 0} M_\delta f = 0 \tag{8}$$

gilt. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir nach [1], [4] mit VMO (vanishing mean oscillation). Der Raum VMO ist ein abgeschlossener separabler Unterraum von BMO. Er ist der Abschluß der Menge $C[-\pi,\pi]$ der stetigen 2π-periodischen Funktionen in der BMO-Norm. Die BMO-Funktionen und VMO-Funktionen besitzen eine große Bedeutung für die Funktionentheorie [3].
In der Arbeit wird das Verhalten der konjugierten Funktion $\tilde{f}$ untersucht. Diese Funktion wird auch häufig als Hilbert-Transformierte der Funktion f bezeichnet. Hierbei ist für eine Zahl $0 < \varepsilon \le \pi$ die abgeschnittene Hilbert-Transformation H_ε durch

$$(H_\varepsilon f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varepsilon\le|\tau|\le\pi} \frac{f(t+\tau)}{\tan\frac{\tau}{2}}\, d\tau$$

erklärt. Die Funktion $\tilde{f}$ ist durch den fast überall existierenden Grenzwert

$$\tilde{f}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}(H_\varepsilon f)(t)$$

definiert. Die Abbildung $\tilde{f} = Hf$ ist ein stetiger linearer Operator vom Raum BMO in den Raum BMO und vom Raum VMO in den Raum VMO. Für eine Funktion $f \in L^1[-\pi,\pi)$ ist das konjugierte Potential v durch

$$v(r,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{r\sin(t-\tau)}{1-2r\cos(t-\tau)+r^2}\, d\tau$$

definiert. Das Verhalten des konjugierten Potentials von VMO- bzw. BMO-Funktionen steht in einem engen Zusammenhang dem Verhalten der Hilbert-Transformierten.
Die Räume BMO und VMO haben eine ganze Reihe von interessanten Eigenschaften [1] [3]. Es werden als nächstes einige wichtige Eigenschaften der BMO- und VMO-Funktionen aufgelistet. Diese Eigenschaften werden im weiteren benötigt. Für einen Beweis der Resultate sei auf [1], [6] verwiesen.
Für $1 \le p < \infty$ existiert eine Konstante A_p mit

$$\sup_{\mu(I)\le 2\pi} \left(\frac{1}{\mu(I)} \int\limits_I |f(t) - a_I(f)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \le A_p \cdot \|f\|_* \,. \tag{9}$$

Die Funktion $f \in BMO$ gehört damit zu jedem Raum $L^p[-\pi,\pi)$. Weiterhin gilt für alle $f \in BMO$ und alle Intervalle I die John-Nirenberg-Ungleichung [1]

$$\mu\Big(\{ t \in I \,:\, |f(t) - a_I(f)| > \lambda \} \Big) \le \mu(I) \cdot \exp\Big(-C_2 \frac{\lambda}{\|f\|_*} \Big) \,. \tag{10}$$

Hierbei ist C_2 eine von f und λ unabhängige Konstante. Weiterhin lassen sich die Räume BMO und VMO durch das Poissonsche Integral klassifizieren. Es existiert eine Konstante C_3, so daß für alle $f \in BMO$ die Beziehung

$$\left(\sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\tau) - u(r,t)|^2 \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\tau)+r^2}\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \le C_3 \cdot \|f\|_* \tag{11}$$

gilt [1]. Ist umgekehrt die linke Seite von (11) endlich, so gehört die Funktion f zum Raum BMO.

Der Verfasser dankt den Gutachtern für die zahlreichen Hinweise und Verbesserungen.

2 Hauptresultat

Als nächstes wird ein Zusammenhang zwischen der abgeschnittenen Hilbert-Transformation H_ε und dem Randverhalten des konjugierten Potentials v angegeben.

Satz 1. *Es existiert eine Konstante C_4 derart, daß für alle $f \in BMO$ die Beziehung*

$$|(H_\varepsilon f)(t) - v(1-\varepsilon, t)| \leq C_4 \cdot \|f\|_* \tag{12}$$

gilt. Für alle $f \in VMO$ ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\max_{t \in [-\pi, \pi)} |(H_\varepsilon f)(t) - v(1-\varepsilon, t)| \right) = 0 \ . \tag{13}$$

<u>Beweis:</u>
Es sei $f \in BMO$ beliebig. Wir haben

$$\begin{aligned} & (H_\varepsilon f)(t) - v(1-\varepsilon, t) = \\ = & \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \right) f(t+\tau) \Big(\frac{1}{\tan \frac{\tau}{2}} - \frac{2(1-\varepsilon)\sin\tau}{1 - 2(1-\varepsilon)\cos\tau + (1-\varepsilon)^2} \Big) \, d\tau - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t+\tau) \frac{2(1-\varepsilon)\sin\tau}{1 - 2(1-\varepsilon)\cos\tau + (1-\varepsilon)^2} \, d\tau \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Mit

$$\frac{1}{\tan \frac{\tau}{2}} = \frac{\sin\tau}{1-\cos\tau}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \frac{\tau}{2}} - \frac{2(1-\varepsilon)\sin\tau}{1 - 2(1-\varepsilon)\cos\tau + (1-\varepsilon)^2} &= \frac{\varepsilon^2 \sin\tau}{(1-\cos\tau)\cdot(1 - 2(1-\varepsilon)\cos\tau + (1-\varepsilon)^2)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\tau}{2}} \cdot \frac{1-(1-\varepsilon)^2}{1 - 2(1-\varepsilon)\cos\tau + (1-\varepsilon)^2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} q(\varepsilon, \tau) \ . \end{aligned}$$

Für den ersten Ausdruck der rechten Seite von Gleichung (14) erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon, t) &= \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \right) f(t+\tau) q(\varepsilon, \tau) \, d\tau \\ &= \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \right) \Big(f(t+\tau) - u(1-\varepsilon, t) \Big) q(\varepsilon, \tau) \, d\tau \ . \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Tatsache genutzt, daß die Funktion q bezüglich τ ungerade ist. Weiterhin ist für $\varepsilon \le |\tau| < \pi$

$$\frac{1}{|\tan\frac{\tau}{2}|} \le \frac{1}{\tan\frac{\varepsilon}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} \le \frac{\pi}{\varepsilon}\ .$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
|I_1(\varepsilon,t)| &\le \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\varepsilon} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\Big|f(t+\tau)-u(1-\varepsilon,t)\Big|\cdot|q(\varepsilon,\tau)|\,d\tau \\
&\le \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\int\limits_{-\pi}^{-\varepsilon} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\Big|f(t+\tau)-u(1-\varepsilon,t)\Big|\frac{1-(1-\varepsilon)^2}{1-2(1-\varepsilon)\cos\tau+(1-\varepsilon)^2}\,d\tau \\
&\le \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|f(t+\tau)-u(1-\varepsilon,t)\Big|\frac{1-(1-\varepsilon)^2}{1-2(1-\varepsilon)\cos\tau+(1-\varepsilon)^2}\,d\tau \\
&= \frac{1}{2(2+\varepsilon)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|f(\tau)-u(1-\varepsilon,t)\Big|\frac{1-(1-\varepsilon)^2}{1-2(1-\varepsilon)\cos(t-\tau)+(1-\varepsilon)^2}\,d\tau \\
&\le C_5\cdot\|f\|_*\ .
\end{aligned}$$

Für den zweiten Ausdruck erhalten wir mit

$$a(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t+\tau)\,d\tau$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
I_2(\varepsilon,t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t+\tau)\frac{2(1-\varepsilon)\sin\tau}{1-2(1-\varepsilon)\cos\tau+(1-\varepsilon)^2}\,d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(f(t+\tau)-a(t,\varepsilon)\Big)\frac{2(1-\varepsilon)\sin\tau}{1-2(1-\varepsilon)\cos\tau+(1-\varepsilon)^2}\,d\tau\ .
\end{aligned}$$

Es sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
&|I_2(\varepsilon, t)| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| f(t+\tau) - a(t,\varepsilon) \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{2(1-\varepsilon)\sin\tau}{1 - 2(1-\varepsilon)\cos\tau + (1-\varepsilon)^2} \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| f(t+\tau) - a(t,\varepsilon) \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \\
&\qquad \cdot (2\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \left(2 \int_{0}^{\varepsilon} \left| \frac{2(1-\varepsilon)\sin\tau}{1 - 2(1-\varepsilon)\cos\tau + (1-\varepsilon)^2} \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{A_p}{2\pi} \|f\|_* \cdot \left((2\varepsilon)^{q-1} 2 \int_{0}^{\varepsilon} \left| \frac{2(1-\varepsilon)\sin\tau}{1 - 2(1-\varepsilon)\cos\tau + (1-\varepsilon)^2} \right|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{A_p}{2\pi} \cdot \|f\|_* \cdot (A(\varepsilon, q))^{\frac{1}{q}} .
\end{aligned}
$$

Nun ist aber

$$
\begin{aligned}
A(\varepsilon, q) &= 2^q (\varepsilon)^{q-1} \int_{0}^{\varepsilon} \frac{(1-\varepsilon)^q \sin^q \tau}{(1 - 2(1-\varepsilon)\cos\tau + (1-\varepsilon)^2)^q} d\tau \\
&\leq 2^q (\varepsilon)^{q-1} \cdot \Big(\sin\varepsilon \Big)^q \cdot \int_{0}^{\varepsilon} \frac{1}{(1 - 2(1-\varepsilon)\cos\tau + (1-\varepsilon)^2)^q} d\tau \\
&< 2^q \cdot \varepsilon^{2q-1} \cdot \frac{1}{(1 - 2(1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2)^q} \cdot \int_{0}^{\varepsilon} d\tau \\
&= 2^q .
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$
|(H_\varepsilon f)(t) - v(1-\varepsilon, t)| \leq |I_1(\varepsilon, t)| + |I_2(\varepsilon, t)| \leq C_4 \cdot \|f\|_* ,
$$

womit die erste Aussage (12) des Satzes 1 bewiesen ist.

Die Beziehung (13) ist eine unmittelbare Konsequenz aus (12). Dazu sei $\delta > 0$ eine beliebige Zahl. Es existiert eine Funktion $\phi \in C^\infty[-\pi, \pi)$ derart, daß

$$
\|f - \phi\|_* < \frac{\delta}{2C_6}
$$

gilt. Es wird die Funktion

$$
v_\phi(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\tau) \frac{r \sin(t-\tau)}{1 - 2r\cos(t-\tau) + r^2} d\tau
$$

betrachtet. Man hat

$$
\begin{aligned}
|(H_\varepsilon f)(t) - v(1-\varepsilon, t)| &\leq |(H_\varepsilon (f - \phi))(t) - \Big(v(1-\varepsilon, t) - v_\phi(1-\varepsilon, t)| + \\
&\quad + |(H_\varepsilon \phi)(t) - v_\phi(1-\varepsilon, t)| \\
&\leq C_6 \cdot \|f - \phi\|_* + |(H_\varepsilon \phi)(t) - v_\phi(1-\varepsilon, t)| \\
&< \frac{\delta}{2} + |(H_\varepsilon \phi)(t) - v_\phi(1-\varepsilon, t)| . \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Da $\phi \in C^\infty[-\pi,\pi)$ gilt, hat man ebenfalls $\tilde{\phi} \in C^\infty[-\pi,\pi)$ [7]. Folglich ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\max_{t\in[-\pi,\pi)}\left|\tilde{\phi}(t)-(H_\varepsilon\phi)(t)\right|\right)=0$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\max_{t\in[-\pi,\pi)}\left|\tilde{\phi}(t)-v_\phi(1-\varepsilon,t)\right|\right)=0\ .$$

Damit existiert eine Zahl $\varepsilon_0>0$ derart, daß

$$\max_{t\in[-\pi,\pi)}|(H_\varepsilon\phi)(t)-v_\phi(1-\varepsilon,t)|<\frac{\delta}{2}$$

für alle $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ gilt. Somit hat man für alle $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$

$$\max_{t\in[-\pi,\pi)}|(H_\varepsilon f)(t)-v(1-\varepsilon,t)|<\delta\ .$$

Damit wurde ebenfalls die Beziehung (13) bewiesen.

3 Charakterisierung von VMO-Funktionen

In diesem Abschnitt wird eine neue Charakterisierung von VMO-Funktionen angegeben. In der Literatur sind eine ganze Reihe äquivalenter Charakterisierungen bekannt [1], [4]. In der Arbeit wurde unter anderem bereits die Tatsache genutzt, daß eine Funktion f genau dann zum Raum VMO gehört, wenn eine Folge stetiger 2π-periodischer Funktionen existiert, welche bezüglich der BMO-Norm gegen die Funktion f konvergiert. Weiterhin gehört eine Funktion f genau dann zum Raum VMO, wenn für das Poissonsche Integral u der Funktion f die Beziehung

$$\lim_{r\to 1}\|f(\cdot)-u(r,\cdot)\|_*=0 \tag{16}$$

gilt [1], [4], [5]. Eine weitere Charakterisierung gibt der folgende Satz an.

Satz 2. *Eine Funktion f gehört genau dann zum Raum VMO, wenn*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\tilde{f}-H_\varepsilon f\|_*=0 \tag{17}$$

gilt.

<u>Beweis:</u>
Es sei $H_\varepsilon f$ gegen die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ in der BMO-Norm konvergent. Für ein festes $\varepsilon>0$ ist die Funktion $H_\varepsilon f$ stetig. Da der Raum VMO die Abschließung der stetigen 2π-periodischen Funktionen bezüglich der BMO-Norm ist, haben wir $\tilde{f}\in VMO$. Es ist aber $f=-\tilde{\tilde{f}}+C$ mit einer geeigneten Konstanten C. Folglich hat man $f\in VMO$.
Nun sei $f\in VMO$ beliebig. Damit haben wir

$$\|\tilde{f}-H_\varepsilon f\|_*\le\|\tilde{f}(\cdot)-v(1-\varepsilon,\cdot)\|_*+\|v(1-\varepsilon,\cdot)-(H_\varepsilon f)(\cdot)\|_*\ .$$

Da die Funktion f zum Raum VMO gehört, haben wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\tilde{f}(\cdot) - v(1-\varepsilon,\cdot)\|_* = 0\ .$$

Es sei

$$a(\varepsilon, I) = \frac{1}{\mu(I)} \int_I v(1-\varepsilon,t) - (H_\varepsilon f)(t)\, dt\ .$$

Mit dem Satz 1 ist

$$\begin{aligned}
\|v(1-\varepsilon,\cdot) - (H_\varepsilon f)(\cdot)\|_* &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |v(1-\varepsilon,t) - (H_\varepsilon f)(t)|\, dt + \\
&\quad + \sup_{\mu(I)\le 2\pi} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |v(1-\varepsilon,t) - (H_\varepsilon f)(t) - a(\varepsilon,I)|\, dt \\
&\le \max_{t\in[-\pi,\pi)} |(H_\varepsilon f)(t) - v(1-\varepsilon,t)| + \\
&\quad + \sup_{\mu(I)\le 2\pi} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |v(1-\varepsilon,t) - (H_\varepsilon f)(t)|\, dt + \\
&\quad + \sup_{\mu(I)\le 2\pi} |a(\varepsilon,I)| \\
&\le 3 \max_{t\in[-\pi,\pi)} |(H_\varepsilon f)(t) - v(1-\varepsilon,t)|\ .
\end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|v(1-\varepsilon,\cdot) - (H_\varepsilon f)(\cdot)\|_* = 0\ , \tag{18}$$

womit der Satz 2 bewiesen ist.

Diskussion: Der Satz 2 gibt Aufschluß über das Konvergenzverhalten der abgeschnittenen Hilbert-Transformation von stetigen Funktionen f. Die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ einer stetigen Funktion muß nicht unbedingt beschränkt sein, womit eine Ersetzung der VMO-Norm durch die Maximum-Norm im Satz 2 nicht möglich ist. Für viele praktische Anwendungen ist es erforderlich, die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ von stetigen Funktionen f zu berechnen. Dazu können in der Regel nur numerische Integrationsverfahren angewendet werden. Bei der Durchführung der numerischen Integration treten jedoch häufig Probleme auf. Die Ursache dieser Probleme liegt darin begründet, daß die Hilbert-Transformation ein singuläres Integral darstellt. Standardverfahren sind damit nur bedingt einsetzbar. Der Satz 2 gibt in gewisser Hinsicht einen Ausweg aus dieser Situation an. Gemäß Satz 2 kann die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ einer stetigen Funktion als erstes durch die abgeschnittene Hilbert-Transformation $H_\varepsilon f$ approximiert werden. Die abgeschnittene Hilbert-Transformation stellt nun ein reguläres Integral dar, welches mit den Verfahren der numerischen Integration ausgewertet werden kann. Für die praktische Anwendung ist es damit interessant, den Approximationsfehler $\tilde{f} - H_\varepsilon f$ weiter zu untersuchen. Dazu sind weitere Forschungsarbeiten erforderlich.

Literatur

[1] J.B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*,
Pure and applied Mathematics Bd. 96, Academic Press, New York, 1981,

[2] J. Garcia-Cuerva, J. Rubio De Francia, *Weighted norm Inequalities and related topics*,
North-Holland Mathematics Studies, New York, 1986

[3] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*,
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 299, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992,

[4] D. Sarason, *Functions of vanishing mean oscillation*,
Trans. Amer. Math. Soc. 207, 1975, p. 391-405

[5] E.M. Stein, *Harmonic Analysis; Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*,
Princeton Mathematical Series, 43, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993

[6] A. Torchinsky, *Real-variable methods in Harmonic Analysis*,
Pure and applied Mathematics Bd. 123, Academic Press, New York, 1986,

[7] A. Zygmund, *Trigonometric Series I,II*,
Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1990,

Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik Berlin GmbH,
Broadband Mobile Communication Networks,
Einsteinufer 37, D-10587 Berlin, Germany

and

Swiss Federal Institut of Technology (ETH Zurich),
Communication Technology Laboratory,
ETH-Zentrum, Sternwartstrasse 7,
CH-8092 Zurich, Switzerland