# Formes faibles de moyennabilité pour les groupes à un relateur

Cédric Béguin    Tullio Ceccherini-Silberstein*

**Résumé**

On considère des formes faibles de moyennabilité pour les groupes à un relateur. On montre l'a-T-moyennabilité des groupes à un relateur à centre non-trivial et des groupes de surfaces, la non-moyennabilité intérieure des groupes à un relateur à au moins trois générateurs et des groupes non-hopfiens de Baumslag-Solitar. On rappelle également la preuve de [4] de la K-moyennabilité de tous les groupes à un relateur.

**Abstract**

Weak forms of amenability for one-relator groups are considered. We prove the a-T-menability for those groups with non-trivial centre and for surface groups, the non-inner amenability for those of rank at least three and for the non-hopfian Baumslag-Solitar groups. The K-amenability of all one-relator groups is also recalled from [4].

## 1 Introduction

Le propos de cet article est de mieux situer la famille des groupes à un relateur dans le paysage de diverses formes faibles de moyennabilité (K-moyennabilité, a-T-moyennabilité et moyennabilité intérieure).

La moyennabilité au sens classique des groupes à un relateur a été étudiée dans [7] ; les deux auteurs y exhibent une liste exhaustive de tous les groupes à

*Supported by grant 20.50575.97 of the Swiss National Fund for Scientific Research.

Received by the editors August 1998.

Communicated by A. Valette.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 43A07, 20E06, 46L05.

*Key words and phrases :* Amenability, one-relator groups, HNN extensions, graphs of groups, reduced C*-algebra.

un relateur moyennables et fournissent un algorithme permettant de déterminer si une présentation à un relateur définit un groupe de cette liste. Rappelons en outre que, par le Freiheitssatz de Magnus [20], tous les groupes à un relateur avec au moins 3 générateurs contiennent un groupe libre sur 2 générateurs et donc ne sont pas moyennables.

Dans [4], les trois auteurs ont démontré que tous les groupes à un relateur sont K-moyennables en utilisant une démonstration par récurrence similaire à celle du Freiheitssatz de [19].

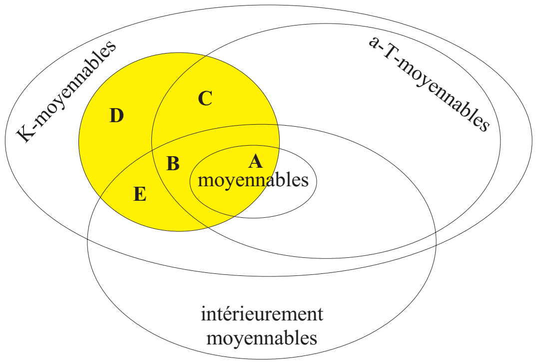
Récemment la conjecture de Baum-Connes a été démontrée par N.Higson et G.G. Kasparov [17] pour la classe des groupes discrets a-T-moyennables (ayant la propriété de Haagerup). Remarquons que J.-L. Tu a démontré que les groupes a-T-moyennables sont aussi K-moyennables [26]. La classe des groupes a-T-moyennables étant relativement grande (groupes libres, groupes moyennables, groupes de surface, groupes de Coxeter,...) et la conjecture étant démontrée pour la classe des groupes à un relateur [4], il était naturel de se demander si la famille des groupes à un relateur était une sous-classe des groupes a-T-moyennables. On observe que l'intersection des deux classes est clairement non-vide, puisque l'on y trouve entre autres les groupes à un relateur moyennables, les groupes de surfaces ainsi que les groupes libres. Seule une réponse partielle à la question sera apportée : les groupes à un relateur à centre non-trivial sont a-T-moyennables. De la preuve de ce résultat, on obtient aussi le corollaire suivant : les groupes à un relateur non-moyennables à centre non-trivial sont à croissance exponentielle uniforme. On donnera également une preuve directe et purement algébrique de l'a-T-moyennabilité des groupes de surface.

Il est clair que n'importe quel groupe à centre non-trivial est intérieurement moyennable. Dans ce contexte, on conjecture que tous les groupes à un relateur non-moyennables à centre trivial ne sont pas intérieurement moyennables ; cependant ce résultat ne sera démontré que pour les groupes à un relateur à au moins trois générateurs, et pour les groupes non-hopfiens de Baumslag-Solitar. Les techniques utilisées étant celles de Bédos et de la Harpe dans [3], techniques déjà utilisée par le second de ces auteurs dans [10] pour étudier la simplicité de la C*-algèbre réduite, on obtient aussi le résultat suivant : la C*-algèbre réduite associée à un groupe à un relateur avec au moins 3 générateurs est simple à trace unique. Les résultats sur les groupes à un relateur à au moins 3 générateurs ont déjà été observés par Bédos et de la Harpe, sans preuve détaillée directe.

Ces divers résultats permettent de situer plus précisément la famille des groupes à un relateur dans le paysage des formes faibles de moyennabilité : la partie hachurée situe la famille des groupes à un relateur, les lettres de **A** à **D** désignant dans cette famille les groupes possédant les diverses formes faibles de moyennabilité (**A** est l'ensemble des groupes à un relateur moyennables, **B** l'ensemble des groupes à un relateur a-T-moyennables et intérieurement moyennables mais pas moyennables, etc...)

$$\begin{array}{lll} \text{avec} \ \langle a,b|aba^{-1}b^{-1}\rangle \cong \mathbb{Z}^2 & \in & \mathbf{A} \\ \langle a,b|ab^2a^{-1}b^{-2}\rangle & \in & \mathbf{B} \\ \langle a,b,c|c\rangle \cong \mathbb{F}_2 & \in & \mathbf{C} \\ \langle a,b,c|ab^3ca^5bc^2\rangle & \in & \mathbf{C} \text{ ou } \mathbf{D} \end{array}$$

Le groupe $\langle a,b|ab^2a^{-1}b^{-2}\rangle$ est à centre non-trivial et est non-moyennable. Le groupe $\langle a,b,c|ab^3ca^5bc^2\rangle$ comme tous les groupes à au moins trois générateurs est soit dans




**C** soit dans **D**. L'étude ci-dessous ne permet pas de résoudre l'incertitude concernant **D** et **E**.

Les auteurs aimeraient remercier Alain Valette pour sa disponibilité et ses nombreuses suggestions, Pierre de la Harpe pour ses multiples remarques et pour son aide précieuse dans la conception de la section consacrée à la fidélité forte et Eric Bédos pour ses envois de références. T.C.-S. aimerait également remercier le personnel de l'Institut de mathématiques de l'Université de Neuchâtel pour avoir rendu son séjour Neuchâtelois très agréable.

## 2 A-T-moyennabilité

### 2.1 Définitions et observations pour les groupes à un relateur

Parmi les nombreuses définitions équivalentes de l' a-T-moyennabilité (terminologie due à M. Gromov, voir [16]) nous utilisons la suivante. Un groupe discret $G$ est a-T-moyennable s'il satisfait la condition suivante, dite aussi *condition de Haagerup* :

> Il existe une suite $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de type positif sur $G$, normalisées (i.e. $\phi_n(e) = 1$), tendant vers 0 à l'infini de $G$, et convergeant ponctuellement vers la fonction constante 1.

La classe des groupes a-T-moyennables est remarquablement large comme les exemples suivants le montrent.

**Exemples :**

Les groupes suivants sont a-T-moyennables.

1) Les groupes libres [14] ou plus généralement les produits libres de groupes a-T-moyennables [15] ;

2) les groupes moyennables [5] et [15] ;

3) les sous-groupes discrets des groupes de Lie $SO(n, 1)$ et $SU(m, 1)$ [13] et [11] ;

4) les groupes de Coxeter [6] et [11] ;

5) les groupes agissant proprement isométriquement sur un complexe cubique CAT(0) [23].

Par contre un groupe infini ayant la propriété $(T)$ de Kazhdan ne peut pas être a-T-moyennable : c'est le cas de $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 3$ (voir [11]). Les deux lemmes suivants [16] sont des critères pour détecter l'a-T-moyennabilité.

**Lemme 2.1** *Si $N$ est réunion croissante de sous-groupes a-T-moyennables, alors $N$ est a-T-moyennable.*

**Lemme 2.2** *Soit $N$ un sous groupe normal d'un groupe $G$ ; si $N$ est a-T-moyennable et si le quotient $G/N$ est moyennable alors $G$ est a-T-moyennable.*

Comme souligné dans l'introduction, il serait intéressant de montrer ou d'infirmer l'a-T-moyennabilité des groupes à un relateur.

La première observation à faire est que l'on peut se restreindre au cas des groupes à un relateur et deux générateurs. Soit un groupe à un relateur $G = \langle x_1, \ldots, x_n | R(x_1, \ldots, x_m) \rangle$, on peut toujours supposer $m = n$ car sinon $G$ est un produit libre d'un tel groupe et d'un groupe libre et, grâce à l'exemple 1), on se ramène au cas précité. Enfin, comme un groupe à un relateur $G = \langle x_1, \ldots, x_n | R(x_1, \ldots, x_n) \rangle$ s'injecte dans un groupe à un relateur et deux générateurs (corollaire 4.10.1. de [21]) et comme l'a-T-moyennabilité est héritée par les sous-groupes, on a la restriction désirée.

## 2.2 Quelques rappels sur les groupes à un relateur et deux générateurs

Soit donc $G = \langle a, b | R(a, b) \rangle$ un groupe à un relateur et deux générateurs ; on sait que l'on peut toujours supposer (lemme 11.8, chapitre V de [19]) que la somme des exposants des occurrences de $a$ dans $R$ est nulle (notation $\sigma_a(R) = 0$). Le sous-groupe normal $N$ engendré par $b$ possède alors la structure suivante (preuve du Freiheitssatz de [21]) :

$$N = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_k, \qquad K_k = N_{-k} \underset{J_{-k}}{*} N_{-k+1} \underset{J_{-k+1}}{*} \cdots \underset{J_{k-2}}{*} N_{k-1} \underset{J_{k-1}}{*} N_k$$

où $N_k = \langle b_{\lambda+k}, \ldots, b_{\mu+k} | R_k \rangle$, $J_k = \langle b_{\lambda+k+1}, \ldots, b_{\mu+k} \rangle$, $\lambda$ et $\mu$ étant respectivement les indices minimum et maximum apparaissant dans $R_0$ obtenu en réécrivant $R$ en termes des $b_i = a^i b a^{-i}$ ($R_k$ est alors simplement $a^k R a^{-k}$ réécrit avec $b_{\lambda+k}, \ldots, b_{\mu+k}$). On notera $\psi_{k-1}$ et $\phi_k$ les inclusions de $J_{k-1}$ et $J_k$ dans $N_k$.

Dans [7], les auteurs, motivés par l'étude du problème de la croissance des groupes à un relateur, distinguent trois classes de présentations de groupes à un relateur et deux générateurs. Leur approche utilise le formalisme des extensions HNN que l'on traduira ici dans le langage de la théorie de Magnus :

I) $J_0$ et $J_{-1}$ sont deux sous-groupes propres de $N_0$ ($J_{-1} \neq N_0 \neq J_0$) ;

II) Seul un des deux sous-groupes $J_0$ et $J_{-1}$ de $N_0$ est propre ($J_{-1} \neq N_0 = J_0$ ou $J_{-1} = N_0 \neq J_0$) ;

III) $J_0$ et $J_{-1}$ coïncident avec $N_0$ ($J_{-1} = N_0 = J_0$).

Notons que le lemme 2.1 de [7] donne une méthode pour distinguer ces cas sur la présentation du groupe.

Dans le deuxième cas, $N$ est une réunion croissante de groupes libres de même rang ($\mu - \lambda + 1$). Le troisième cas correspond à la situation où $N$ est libre sur $\mu - \lambda + 1$ générateurs. Remarquons que ce dernier cas se produit si et seulement si $N$ est de génération finie. En effet si $N$ est de génération finie, cela implique qu'il existe deux entiers $k_0$ et $k_1$ pour lesquels $N_{k_0} = \psi_{k_0-1}(J_{k_0-1})$ et $N_{k_1} = \phi_{k_1}(J_{k_1})$. Mais par construction on obtient donc que $\psi_{k-1}(J_{k-1}) = N_k = \phi_k(J_k)$ pour tout $k$, c'est-à-dire $N = N_k$ pour tout $k$, $N$ est donc libre sur $b_\lambda, \ldots, b_{\mu-1}$. L'autre sens de l'implication est trivial.

## 2.3 A-T-moyennabilité des groupes à un relateur à centre non-trivial

**Lemme 2.3** *Un groupe à un relateur et 2 générateurs possédant une présentation appartenant à la classe II ou III est a-T-moyennable.*

*Démonstration.* Sous nos hypothèses on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\sigma_a} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

avec $N$ a-T-moyennable (par l'exemple 1 et le lemme 2.1 dans le second cas) ; $\mathbb{Z}$ étant moyennable, on conclut par le lemme 2.2. ∎

On va montrer que les groupes à un relateur, à centre non-trivial, ont une présentation appartenant à la classe III (i.e. $N$ est de type fini).

Rappelons tout d'abord les résultats de Murasugi [22] sur le centre d'un groupe à un relateur $G$ : si $G$ possède plus de deux générateurs, alors son centre est trivial ; si d'autre part $G$ a un centre $Z(G)$ non-trivial, alors soit $Z(G) = G = \mathbf{Z}^2$ soit $Z(G)$ est cyclique infini.

**Proposition 2.4** *Quitte à permuter les rôles des deux générateurs, un groupe à un relateur et à centre non-trivial possède une présentation de type III.*

*Démonstration.* Si $G$ est abélien, en particulier moyennable, on a nécessairement soit $G = \langle a | a^n \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, soit $G = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ ; la présentation est alors bien de type III. Soit donc $G = \langle a, b | R(a, b) \rangle$ non-abélien, à centre non-trivial. Comme $Z(G)$ est cyclique infini, notons $z$ un générateur, distinguons alors deux cas :

$z \notin N$ : En particulier $Z(G) \cap N = \{1\}$ car $G/N \simeq \mathbb{Z}$. Comme $z \notin N$, on a $z = na^r$ avec $n \in N$ et $r \neq 0$. Comme $nan^{-1}a^{-1} = (na^r)a^{1-r}n^{-1}a^{-1} = a^{1-r}n^{-1}(na^r)a^{-1} = 1$, les éléments $a$ et $n$ commutent et donc $z^p = n^p a^{rp}$. On a alors les égalités : $n^p a n^{-p} a^{-1} = 1$ et $n^p a^{rp} b a^{-rp} n^{-p} b^{-1} = 1$ $\forall p \in \mathbb{Z}$. Ce qui signifie dans $N$ : $n_0^p n_1^{-p} = 1$ et $n_0^p b_{rp} n_0^{-p} b_0^{-1} = 1$ ou encore, pour n'importe quel entier $t$, $n_t^p n_{t+1}^{-p} = 1$ et $n_t^p b_{t+rp} n_t^{-p} b_t^{-1} = 1$ où $n_0$ représente $n$ réécrit en termes des $b_i$, $n_k$ en termes des $b_{i+k}$. Soient alors $\beta$ et $\gamma$ les indices minimum et maximum des occurrences des $b_i$ dans $n_0$, prenons un entier $p$ tel que $-rp < \beta$ et $rp > \gamma$. Les relations ci-dessus nous prouvent alors que, pour $|i| \geqslant rp$, les $b_i$ sont des mots en les $b_{-rp+1}, \ldots, b_{rp-1}$. Le groupe $N$ est donc de type fini.

$z \in N$ : Comme $Z(G) \subseteq Z(N) = \cap_{k \in \mathbf{Z}} [Z(N_k) \cap \phi_k(J_k)]$ (voir [18]) et $J_k \cong \mathbb{F}_{\mu-\lambda}$, on en tire que $J_k \cong \mathbb{Z}$ $\forall k$ et $\mu = \lambda + 1$. On a $J_{-\lambda-1} =< b_0 >$, il existe donc un entier $m$ tel que $z = \phi_{-\lambda-1}(b_0^m)$, d'où la relation $1 = aza^{-1}z^{-1} = ab_0^m a^{-1} b_0^{-m} = b_1^m b_0^{-m}$, c'est-à-dire $[a, b^m] = 1$ dans $G$. Cette observation montre qu'on a aussi $\sigma_b(R) = 0$ ; en permutant alors les rôles de $a$ et $b$, on remarque que le sous groupe normal engendré par $a$ est finiment engendré (par $a_0, \ldots, a_{m-1}$). ∎

En combinant le lemme et la proposition précédente on obtient :

**Corollaire 2.5** *Les groupes à un relateur et à centre non-trivial sont a-T-moyennables.*

En appliquant la proposition 2.7 de [7] on a également :

**Corollaire 2.6** *Les groupes à un relateur non-abéliens et à centre non-trivial sont à croissance exponentielle uniforme .*

### 2.4 A-T-moyennabilités des groupes de surface

Dans [16], les trois auteurs énoncent un théorème combinatoire (théorème 2) impliquant l'a-T-moyennabilité des groupes de surface (résultat original dans [13]). Il est cependant possible de donner une preuve plus directe de ce résultat comme corollaire de la proposition suivante :

**Proposition 2.7** *Soit $G = \langle a, b, c, d, ...|R\rangle$ un groupe à un relateur de rang (nombre de générateurs) $n$, avec une relation du type $R = a^{\pm l}b^{\epsilon_1}a^{\mp l}b^{\epsilon_2}w(c, d, ...)$ avec $l \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et $\epsilon_i = \pm 1$. Alors le sous groupe normal $N$ engendré par b, c, d,... est libre de rang infini et on a la suite exacte :*

$$1 \to \mathbb{F}_\infty \to G \overset{\sigma_a}{\to} \mathbb{Z} \to 1.$$

*En particulier $G$ est a-T-moyennable.*

*Démonstration.* Avec les notations du paragraphe 2.2, comme $b_\lambda$ et $b_\mu$ n'apparaissent qu'une seule fois dans $R_0$, les groupes $N_k$ sont libres de rang $l + n - 2$. Il est facile de voir que $N_k *_{J_k} N_{k+1}$ est libre de rang $l + 2(n - 2)$ et plus généralement $K_k$ est libre de rang $l + (2k + 1)(n - 2)$. $N = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_k$ est donc libre de rang infini. L'a-T-moyennabilité résulte des lemmes 2.1 et 2.2. ∎

**Corollaire 2.8** *Les groupes de surfaces sont a-T-moyennables.*

*Démonstration.* Pour une surface orientable, la présentation classique du groupe est du type de la proposition précédente. Dans le cas d'une surface non-orientable on peut s'y ramener par un simple changement de système de générateurs ($< a_1, ..., a_n| \prod_{i=1}^n a_i^2 >\cong< b_1, ..., b_n|b_1b_2b_1^{-1}b_2 \prod_{i=3}^n b_i^2 >$, l'isomorphisme étant donné par $a_i \mapsto b_i$ pour $i \neq 2$ et $a_2 \mapsto b_1^{-1}b_2$). ∎

## 3 K-moyennabilité

D'après Cuntz [9], un groupe discret $G$ est dit K-moyennable si l'application $\lambda_G^* : K^0(C_r^*(\Gamma)) \to K^0(C^*(\Gamma))$ est un isomorphisme en K-homologie. Si $G$ est K-moyennable, il suit du théorème 2.1. de [9] que, pour tout C*-système dynamique $(A, G, \alpha)$, l'application canonique $\lambda_{A,G} : A \rtimes_\alpha G \to A \rtimes_{\alpha,r} G$ du produit croisé maximal dans le produit croisé réduit induit un isomorphisme en K-théorie : c'est-à-dire pour $i = 0, 1$ le morphisme $(\lambda_{A,G})_* : K_i(A \rtimes_\alpha G) \to K_i(A \rtimes_{\alpha,r} G)$ est un isomorphisme. Dans [4], les auteurs prouvent le résultat suivant :

**Théorème 3.1** *Tout groupe à un relateur est K-moyennable.*

La preuve étant relativement courte, par souci de complétude on se permettra de la reprendre ici :

*Démonstration.* La preuve suit une démonstration par récurrence sur la longueur $|r|$ du générateur $r$ similaire à celle du Freiheitssatz de [19]. Si la relation $r$ est une puissance d'un générateur, alors $G$ est soit un groupe libre, soit un produit libre d'un groupe libre avec un groupe cyclique fini, donc $G$ est K-moyennable par les résultats de Cuntz [9]. Pour un $|r|$ quelconque, on considère les deux cas suivants :

1. $\sigma_t(r) = 0$ pour un certain $t \in X$, donc $G = HNN(H, A, \theta)$, où $H$ est un groupe à un relateur avec une relation plus courte que $r$. Par la théorie de Bass-Serre pour les extensions HNN [25], $G$ admet une action sur un arbre, transitive sur les sommets et les arêtes, avec des stabilisateurs d'arêtes conjugués à $H$ et des stabilisateurs d'arêtes conjugués à $A$. Par l'hypothèse de récurrence $H$ et $A$ sont K-moyennables, le résultat suivant de Pimsner [24] s'applique alors : un groupe agissant sur un arbre avec stabilisateurs K-moyennables est K-moyennable.
2. $\sigma_x(r) \neq 0$ pour tout $x \in X$. Dans ce cas, $G$ se plonge dans un groupe à un relateur $\tilde{G}$ auquel le premier cas s'applique impliquant la K-moyennabilité de $\tilde{G}$. La conclusion provient alors du fait que la K-moyennabilité est héritée par passage à un sous-groupe ([9], 2.4). ∎

## 4 Moyennabilité intérieure

La notion de moyennabilité intérieure, introduite par E. Effros [12] dans un contexte d'algèbres d'opérateurs, est une variante de celle de moyennabilité : on regarde l'action d'un groupe $G$ sur lui même par conjugaison plutôt que par multiplication à gauche. Plus précisement, un groupe $G$ est *intérieurement moyennable* s'il existe une application $\mu : \mathcal{P}(G \setminus \{1\}) \to [0, 1]$ définie sur l'ensemble de tous les sous-ensembles de $G \setminus \{1\}$ telle que

$$\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{(additivité finie)}$$
$$\mu(gAg^{-1}) = \mu(A) \quad \text{(invariance par conjugaison)}$$
$$\mu(G \setminus \{1\}) = 1 \quad \text{(normalisation)}$$

pour tout $A, B \subseteq G \setminus \{1\}$ et $g \in G$.

La proposition cruciale pour l'étude de la (non-)moyennabilité intérieure a été obtenue par Bédos et de la Harpe dans [3] (proposition 7) :

**Proposition 4.1** *Soit $\Omega$ un espace topologique séparé infini et $G$ un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de $\Omega$ contenant deux homéomorphismes hyperboliques transverses. S'il existe une application $G$-équivariante $\delta : G\setminus\{1\} \longrightarrow \Omega$ (action de $G$ sur lui-même par conjugaison), alors $G$ n'est pas intérieurement moyennable.*

La notion d'éléments hyperboliques transverses étant fondamentale, rappelons quelques définitions :

- Un homéomorphisme $\phi$ d'un espace topologique séparé $\Omega$ est dit hyperbolique s'il existe deux points fixes distincts $s_\phi$ et $r_\phi$ de $\phi$ dans $\Omega$ avec les propriétés suivantes : pour tout voisinage $S$ de $s_\phi$ et pour tout voisinage $R$ de $r_\phi$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^n(\Omega \setminus S) \subset R \ \forall n \geqslant n_0$.
- $s_\phi$ est appelé la source de $\phi$ et $r_\phi$ son but. Ce sont les seuls points fixes de $\phi$.

– Deux homéomorphismes hyperboliques $\phi$ et $\psi$ sont dits transverses si $\{s_\phi, r_\phi\} \cap \{s_\psi, r_\psi\} = \emptyset$.

L'espace $\Omega$ utilisé pour l'étude de la moyennabilité intérieure des groupes à un relateur sera l'arbre de groupe associé à une extension HNN et son bord. On ne rappellera ici que les éléments essentiels de ces constructions classiques de Bass-Serre [25] pour les extensions HNN.

Soit $G = HNN(H, A, B, \theta) =< H, s|\theta(a) = sas^{-1},\ \forall a \in A >$ une extension HNN ; le groupe $G$ agit sans inversion sur un arbre $X$ défini par : $Som(X) = G/H$, $Ar(X) = G/A$ ; l'orientation de $gA \in G/A$ étant donnée par $o(gA) = gH$, $t(gA) = gs^{-1}H$. Le degré des sommets est égal à $|H/A| + |H/B|$ (plus précisement $|H/B|$ arêtes entrantes et $|H/A|$ arêtes sortantes). L'espace des bouts est infini dès que $H/A$ ou $H/B$ est d'ordre supérieur ou égal à 2. Le groupe $G$ agit sur $X$ par translation à gauche ($\gamma \cdot gH = (\gamma g)H$).

Rappelons encore, par la proposition 25 de [25], d'une part qu'un automorphisme d'un arbre $X$ est soit hyperbolique soit elliptique (possède au moins un point fixe dans $X$) et d'autre part qu'un tel automorphisme se pronlonge au bord de l'arbre $\partial X$.

Examinons alors les conditions que doit satisfaire $G$ pour que la réunion de l'arbre $X$ et de son bord $\partial X$ puisse jouer le rôle de l'espace $\Omega$ :

1. $G$ devant être un sous groupe des homéomorphismes de $\Omega$, l'action doit être fidèle. Si $\gamma \in G$ fixe $\Omega$, il fixe toutes les arêtes (c'est même une équivalence), c'est-à-dire :

$$\begin{array}{cll} & \gamma \cdot gA = gA & \forall g \in G \\ \Leftrightarrow & \gamma \in gAg^{-1} & \forall g \in G \\ \Leftrightarrow & \gamma \in \bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1}. & \end{array}$$

   On obtient donc la condition :

$$\text{action fidèle } \Leftrightarrow \bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1} = \{1\}.$$

2. $G$ doit posséder au moins deux éléments hyperboliques transverses. Il est facile de se convaincre que la non-finitude de l'espace des bouts n'est pas une condition suffisante, les cas où $H = A$ ou $H = B$ étant à exclure ; il faut en fait supposer $A \neq H \neq B$ pour assurer l'existence de deux éléments hyperboliques transverses.

3. Enfin, on doit avoir l'existence d'une application $G$-équivariante $\delta : G\backslash\{1\} \longrightarrow \Omega$. Pour tout $\gamma \in G$, notons $\tilde{\gamma} = g\gamma g^{-1}$ l'écriture cycliquement réduite de $\gamma$, que l'on prendra toujours de la forme $h_1 s^{\epsilon_1} h_2 s^{\epsilon_2} \cdots h_n s^{\epsilon_n}$, avec $\epsilon_i = \pm 1$ ($\epsilon_1 = 0$ possible si $n = 1$). L'application $\delta$ sera donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \delta \,:\, G\backslash\{1\} & \longrightarrow & X \coprod \partial X \\ \gamma & \mapsto & \begin{cases} gH \text{ point fixe dans } X & \text{si } \tilde{\gamma} \in H \ (\gamma \text{ elliptique}) \\ r_\gamma \text{ point fixe dans } \partial X & \text{si } \tilde{\gamma} \notin H \ (\gamma \text{ hyperbolique}). \end{cases} \end{array}$$

On est alors en mesure de montrer la non-moyennabilité intérieure des groupes à un relateur à au moins 3 générateurs :

**Proposition 4.2** *Un groupe à un relateur et au moins trois générateurs n'est pas intérieurement moyennable.*

*Démonstration.* Soit $G = \langle a, b, c, d, ...|r = r(a, b, c, d, ...)\rangle$, si un des générateurs n'apparaît pas dans la relation, on est dans un cas de produit libre et on peut appliquer la proposition 4.1 à l'arbre de groupe d'un produit libre (c.f. [3]). Rappelons qu'on peut toujours supposer $\sigma_a(r) = 0$, donc $G = HNN(H, A, B, \theta)$ avec

$$\begin{array}{l} H = \langle b_{\lambda(b)}, ..., b_{\mu(b)}, c_{\lambda(c)}, ..., c_{\mu(c)}, d_{\lambda(d)}, ..., d_{\mu(d)}, ...|s = s(b_i, c_i, d_i, ...)\rangle \\ A = \langle b_{\lambda(b)}, ..., b_{\mu(b)-1}, c_{\lambda(c)}, ..., c_{\mu(c)-1}, d_{\lambda(d)}, ..., d_{\mu(d)-1}, ...\rangle \\ B = \langle b_{\lambda(b)+1}, ..., b_{\mu(b)}, c_{\lambda(c)+1}, ..., c_{\mu(c)}, d_{\lambda(d)+1}, ..., d_{\mu(d)}, ...\rangle \\ \theta : A \to B,\ b_i \mapsto b_{i+1},\ c_i \mapsto c_{i+1},\ d_i \mapsto d_{i+1}, ... \end{array}$$

où $b_i = a^i b a^{-i}$, $c_i = a^i c a^{-i}$, ... , $s$ est la réécriture de $r$ en les $b_i$, $c_i$, ... , et $\lambda(x)$, $\mu(x)$ sont les indices minimaux et maximaux des occurences des $x_i$ apparaissant dans $s$, $x \in \{b, c, ...\}$.
Remarquons que si $\lambda(x) = \mu(x)$ pour chaque générateur $x$, alors en prenant comme nouveau système de générateurs

$$\{a,\ b' = a^{\lambda(b)} b a^{-\lambda(b)},\ c' = a^{\lambda(c)} b a^{-\lambda(c)}, ...\}$$

on obtient une présentation du groupe

$$G = \langle a, b', c', d', ...|r' = r'(b', c', d', ...)\rangle$$

où $a$ n'apparaît plus dans la relation et on se retrouve dans le cas du produit libre. On peut donc encore supposer $\lambda(b) < \mu(b)$ ($A$ n'est pas trivial), on a alors, $\forall x_1, x_2 \in A$, $c_{\mu(c)} x_1 c_{\mu(c)}^{-1} x_2 \in \langle A, c_{\mu(c)}\rangle$ qui est libre par le Freiheitssatz et donc $c_{\mu(c)} x_1 c_{\mu(c)}^{-1} x_2 \neq 1$ sauf si $x_1 = x_2 = 1$. On en tire $c_{\mu(c)} A c_{\mu(c)}^{-1} \cap A = \{1\}$, ce qui garantit la condition 1. Comme l'existence d'au moins trois générateurs implique $A \neq H \neq B$ et donc la condition 2, on peut appliquer 4.1. ∎

Les hypothèses sur $G$ nécessaires à l'application de la proposition 4.1 montrent cependant que ces techniques ne pouront en aucun cas traiter tous les groupes à un relateur et à 2 générateurs. En effet dans les cas où $A = H = B$ (parmi lesquels on trouve les groupes dont le centre est non-trivial, mais aussi d'autres groupes comme par exemple $G = \langle a, b|bab^2aba^{-2}\rangle$), $A$ est alors un sous-groupe normal et l'hypothèse de fidélité n'est pas vérifiée ($\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1} = A$). De même dans les cas où soit $A = H$ soit $B = H$, on ne pourra trouver deux éléments hyperboliques transverses. Seuls les cas $A \neq H \neq B$ ont une chance d'être traités avec ces techniques, comme par exemple :

**Proposition 4.3** *Les groupes non-hopfiens de Baumslag-Solitar ne sont pas intérieurement moyennables.*

*Démonstration.* Un groupe non-Hopfien de Baumslag-Solitar est de la forme $G = \langle x, y|xy^p x^{-1} = y^q\rangle$ où $p > 1$ et $q > 1$ n'ont pas le même ensemble de facteurs premiers [1]. On a $G = HNN(H, A, B, \theta)$ avec $H = \langle y_0, y_1|y_1^p = y_0^q\rangle$, $A = \langle y_0\rangle$ et $B = \langle y_1\rangle$. Si $\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1}$ n'est pas trivial, comme $xAx^{-1} \cap A = B \cap A = \langle y^q\rangle$ et $x^{-1}Ax \cap A = x^{-1}(A \cap B)x = \langle y^p\rangle$, on en tire $\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1} = \langle y^{mpq}\rangle$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On a les égalités $xy^{mpq}x^{-1} = (xy^p x^{-1})^{mq} = y^{mq^2}$ et $x^{-1}y^{mpq}x =$

$(x^{-1}y^qx)^{mp} = y^{mp^2}$. Comme $\bigcap_{\gamma\in G} gAg^{-1}$ est stable par conjugaison, on obtient que $y^{mq^2} = y^{rmpq}$ et $y^{mp^2} = y^{smpq}$ avec $r, s \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $q = rp$ et $p = sq$. Mais ces deux égalités ne sont possibles que si $p$ et $q$ ont même ensemble de facteurs premiers. On conclut donc que $\bigcap_{\gamma\in G} gAg^{-1}$ est trivial et on peut appliquer 4.1. ∎

**Remarque :** Dans [3], pour appliquer la proposition 4.1 aux extensions HNN, les auteurs utilisent une propriété de fidélité forte sur le bord de l'arbre, propriété plus restrictive que celle de fidélité utilisée ci-dessus. Dans le cas des groupes à un relateur à au moins 3 générateurs, si la propriété démontrée ci-dessus ($\exists h \in H$ tel que $hAh^{-1} \cap A = \{1\}$) implique la fidélité de l'action, elle implique en fait également la fidélité forte sur le bord de l'arbre. Ceci résulte d'une discussion plus générale à laquelle on consacrera le paragraphe suivant.

## 5 Fidélité et fidélité forte

Soit $\Omega$ un espace topologique séparé et soit $G$ agissant sur $\Omega$ par homéomorphismes, on dit que *l'action est fortement fidèle* si $\forall F \subset G\backslash\{1\}$ fini, $\exists \omega \in \Omega$ tel que $f\omega \neq \omega\ \forall f \in F$.

Dans la suite $X$ désignera un arbre dénombrable, on appellera *chaîne pendante* de longueur $k$ une géodésique $[x_1, ..., x_k]$ de $X$ de longueur $k$ dont tous les sommets intérieurs $\{x_2, ...x_{k-1}\}$ sont de degré 2. On définit les deux propriétés suivantes :

1. $X$ satisfait la propriété (L) si aucun sommet de $X$ n'est de degré 1 et la longeur des chaînes pendantes de $X$ est uniformément bornée[1].
2. Soit $G$ un sous-groupe des automorphismes de $X$ ; le groupe $G$ satisfait la propriété (A) si $k(G) = \sup_{g\in G\backslash\{1\}} \{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \{B(n) \subseteq X^g\}\} < \infty$ où $B(n)$ est la boule ouverte $B(n) = \{x \in Som(X) | d(x, x_0) < n\}$ pour un $x_0 \in X^g$.

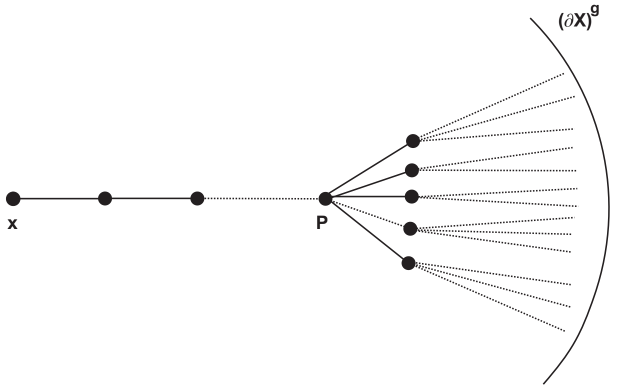
**Remarques :**
– La propriété (L) implique que les points de $\partial X$ ne sont pas ouverts.
– $k(G) = 0$ signifie que tous les éléments de $G$ sont hyperboliques.
– $k(G) = 1$ équivaut à dire que tout point fixe $x \in X^g$ possède une arête adjacente non-fixe par $g$.

**Lemme 5.1** *Soit $X$ satisfaisant (L) et $G$ satisfaisant (A), alors l'intérieur de $(\partial X)^g$ est vide pour tout $g \in G\backslash\{1\}$.*

*Démonstration.* On distingue deux cas :

1. Si $g$ est hyperbolique alors $(\partial X)^g = \{s_g, r_g\}$, et comme les points ne sont pas ouverts, on a l'assertion.
2. Si $g$ est elliptique, prenons $x \in X^g$ et regardons $\partial X$ comme l'espace des demi-géodésiques infinies issues de $x$. Supposons alors par l'absurde que $(\partial X)^g$ contient un ouvert donné par une géodésique reliant $x$ à un sommet $P$ :

[1] Dans le cas localement fini cela revient à dire que $X$ est un graphe non-moyennable [8], i.e. la constante isopérimétrique $\iota(X)$ est strictement positive (ici $\iota(X) = \inf_F \frac{|\partial F|}{|F|}$ où $F$ varie parmi les sous-ensembles finis de sommets de $X$ et $\partial F = \{x \in X : \exists y \in F, y \sim x\}$ est la frontière de $F$).




Tous les sommets du cône issu de $P$ représenté ci-dessus doivent être fixes. On peut alors trouver dans ce cône des boules de rayon aussi grand que désiré ; ce qui contredit (A). ■

Ce lemme permet alors d'obtenir facilement la proposition suivante :

**Proposition 5.2** *Soit $X$ un arbre satisfaisant (L) et $G$ un sous-groupe des automorphismes de $X$ satisfaisant (A), alors l'action de $G$ sur $(\partial X)$ est fortement fidèle.*

*Démonstration.* Soit $F \subset G \backslash \{1\}$ fini, alors $\bigcup_{g \in F} (\partial X)^g \neq \partial X$ car $\partial X$ ne peut pas être une réunion finie de parties d'intérieur vide ($\partial X$ est un espace métrique complet et on peut appliquer le théorème de Baire). Donc il existe $\omega \in \partial X$ tel que $f\omega \neq \omega$ pour tout $f \in F$. ■

**Corollaire 5.3** *Soit $G$ un groupe à un relateur et au moins trois générateurs ; l'action de $G$ vu comme extension HNN sur l'arbre associé est fortement fidèle sur le bord.*

*Démonstration.* Soit $g \neq 1$ elliptique ; montrons que chaque point fixe de $g$ possède une arête adjacente non fixe par $g$. Comme les arêtes entrantes dans un sommet sont indexées par $H/B$ et les sortantes par $H/A$ on peut se convaincre aisément que si un élément fixe toutes les arêtes adjacentes à un sommet alors $\exists k \in H$ tel que $khA = hA$ et $khB = hB$ $\forall h \in H$, c'est à dire $k \in (\bigcap_{h \in H} hAh^{-1}) \bigcap (\bigcap_{h \in H} hBh^{-1})$. Donc si $\bigcap_{h \in H} hAh^{-1} = \{1\}$ aucun sommet n'aura toutes ses arêtes fixées par un élément différent du neutre. Comme dans la preuve de la non-moyennabilité intérieure des groupes à un relateur et à au moins trois générateurs, on a exhibé un $h \in H$ tel que $hAh^{-1} \cap A = \{1\}$, on a la conclusion désirée. On a donc que $k(G) = 1$ donc que (A) est vérifiée et, comme dans ce cas tous les sommets sont de degré plus grand que 2, (L) l'est également. ■

**Remarque :** Dans le cas d'une extension HNN, si on note (F) la fidélité de l'action sur l'arbre (ou sur le bord), (SF) la fidélité forte sur le bord, et (SA) la propriété $\bigcap_{h \in H} hAh^{-1} = \{1\}$ ou $\bigcap_{h \in H} hBh^{-1} = \{1\}$, on a prouvé les implications :

$$\begin{tikzcd} (SA) \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (SF) \arrow[dl, Rightarrow] \\ & (F) & \end{tikzcd}$$

Si (SA) est vraie pour les groupes à un relateur à au moins trois générateurs, on remarque que dans le cas des groupes de Baumslag étudiés plus haut on a (F), mais pas (SA), car $H$ a un centre contenu dans $A$.

## 6 Simplicité de la C*-algèbre réduite et unicité de la trace

Dans [10], de la Harpe donne une liste de groupes discrets $G$ pour lesquels la C*-algèbre réduite est simple et à trace unique. Le résultat crucial est la proposition 3, où l'auteur montre que les *groupes de Powers* ont ces propriétés. Rappelons la définition de ces groupes :

> Un groupe de Powers est un groupe $G$ tel que pour tout ensemble fini $F \subset G\backslash\{1\}$ et tout entier $N \geqslant 1$ il existe une partition $G = A \amalg B$ et des éléments $g_1, ...g_N \in G$ tels que
>
> (i) $fA \cap A = \emptyset \ \forall f \in F$ ;
>
> (ii) $g_jB \cap g_kB = \emptyset$ pour $j, k = 1, ..., N$ avec $j \neq k$.

Dans son lemme 4, de la Harpe montre alors que si un groupe G agit par homéomorphismes sur un espace $\Omega$, si l'action est minimale (c'est-à-dire pour tout $\omega \in \Omega$, l'orbite $G\omega$ est dense dans $\Omega$), fortement fidèle et si $G$ contient deux éléments hyperboliques transverses, alors $G$ est un groupe de Powers. En appliquant ce résultat aux groupes à un relateur et à au moins trois générateurs, en prenant pour $\Omega$ le bord de l'arbre de groupe, on obtient immédiatement :

**Proposition 6.1** *Les groupes à un relateur et à au moins trois générateurs sont des groupes de Powers.*

*Démonstration.* C'est un fait bien connu de la théorie de Bass-Serre que l'action d'une extension HNN sur le bord de son arbre associé est toujours minimale. La fidélité forte découle du corollaire 5.3. Enfin dans le cas des groupes à un relateur et à au moins 3 générateurs on a toujours $A \neq H \neq B$ ce qui assure l'existence de deux éléments hyperboliques transverses. ■

La proposition 3 de [10] entraîne :

**Corollaire 6.2** *Les groupes à un relateur et à au moins trois générateurs ont une C*-algèbre simple à trace unique.*

Une autre preuve de ce résultat pour les extensions HNN se trouve dans [2].

## Références


[1] G. Baumslag and D. Solitar, *Some two-generator one-relator non-Hopfian groups*, Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), pp. 199–201.

[2] E. Bédos, *Operator algebras associated with HNN-extensions.* Non-publié, 1984.

[3] E. Bédos and P. de la Harpe, *Moyennabilité intérieure des groupes : définitions et exemples*, Enseign. Math., 32 (1986), pp. 139–157.

[4] C. Béguin, H. Bettaieb, and A. Valette, *K-theory for C*-algebras of one-relator groups*, K-theory, 16 (1999), pp. 277–298.

[5] M. Bekka, P. Cherix, and A. Valette, *Proper affine isometric actions of amenable groups*, in Novikov Conjecture, Index Theorems and Rigidity, London Math. Soc. Lecture Note Series 227, Cambridge Univ. Press, 1995.

[6] M. Bozejko, T. Januszkiewicz, and R. Spatzier, *Infinite Coxeter groups do not have Kazhdan property (T)*, J. Operator Theory, 19 (1988), pp. 63–67.

[7] T. Ceccherini-Silberstein and R. Grigorchuk, *Amenability and growth of one-relator groups*, Enseign. Math., 43 (1997), pp. 337–353.

[8] T. Ceccherini-Silberstein, R. Grigorchuk, and P. de la Harpe, *Amenability and paradoxical decompositions for pseudogroups and for discrete metric spaces*, Proc. Steklov Math. Inst., 224 (1999), pp. 57–95.

[9] J. Cuntz, *K-theoretic amenability for discrete groups*, J. Reine Angew. Math, 344 (1983), pp. 180–195.

[10] P. de la Harpe, *Reduced C*-algebras of discrete groups which are simple with a unique trace*, Lecture Notes in Math., 1132 (1985), pp. 230–253.

[11] P. de la Harpe and A. Valette, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Société mathématique de France, 1989.

[12] E. Effros, *Property* $\Gamma$ *and inner amenability*, Proc. Amer. Math. Soc., 47 (1975), pp. 483–486.

[13] J. Faraut and K. Harzallah, *Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 24 (1974), pp. 171–217.

[14] U. Haagerup, *An example of a non-nuclear C*-algebra which has the metric approximation property*, Invent. Math., 50 (1979), pp. 279–293.

[15] P. Jolissaint, *Borel cocycles, approximation properties and relative property T.* Preprint de l'Institut de math. de l'Université de Neuchâtel, 1997.

[16] P. Jolissaint, P. Julg, and A. Valette, *The case of discrete groups : Chap. 3 de "Locally compact groups with the Haagerup property".* Ouvrage collectif en préparation, 1998.

[17] P. Julg, *Travaux de Higson et Kasparov sur la conjecture de Baum-Connes*, Séminaire Bourbaki, (1998).

[18] A. Kurosh, *The theory of groups II*, Chelsea, 1956.

[19] R. Lyndon and P. Schupp, *Combinatorial group theory*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 89, Springer-Verlag, 1977.

[20] W. Magnus, *Uber discontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz)*, J. f. d. reine u. angew. Math., 163 (1930), pp. 141–165.

[21] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Interscience Publishers, 1966.

[22] K. Murasugi, *The center of a group with a single defining relation*, Math. Ann., 155 (1964), pp. 246–251.

[23] G. Niblo and L. Reeves, *Groups acting on CAT(0) cube complexes*, Geometry and Topology, 1 (1997), pp. 1–7.

[24] M. Pimsner, *KK-groups of crossed products by groups acting on trees.*, Invent. Math., 86 (1986), pp. 603–634.

[25] J.-P. Serre, *Arbres, Amalgames, $SL_2$*, Astérisque 46, Société mathématique de France, 1977.

[26] J.-L. Tu, *La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables.* Preprint, 1997.

[27] A. Valette, *Weak forms of amenability for split rank 1 p-adic groups*, Oxford Science Publ., Clarendon Press, 1992, pp. 143–165.

Cédric Béguin et Tullio Ceccherini-Silberstein
Institut de mathématiques
Université de Neuchâtel
Rue Emile-Argand 13
CH-2007 Neuchâtel
cedric.beguin@maths.unine.ch

Tullio Ceccherini-Silberstein
Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi del Sannio
Palazzo dell'Aquila-Bosco-Lucarelli
Corso Garibaldi, 82100 Benevento, Italy
tceccher@mat.uniroma1.it