

Exemples de suites de complexité inférieure à $2n$

Ali Aberkane

Résumé Dans ce travail, on étudie l'existence d'une classe de suites infinies de complexité comprise entre $n + 1$ et $2n$.

Dans un premier temps, on s'intéresse à regarder l'évolution des graphes de Rauzy de ce genre de suites, où on démontre que si on a une suite récurrente u de complexité $p(n) \leq \frac{4}{3}n + 1$, alors $s(n) = p(n+1) - p(n) \leq 2$, ce qui empêche d'avoir une évolution compliquée des graphes de Rauzy. Dans un deuxième temps, on donne quelques exemples de suites de complexité entre $n + 1$ et $2n$. À la fin, on démontre qu'on peut toujours construire des suites qui vérifient $\underline{\lim} \frac{p(n)}{n} < \overline{\lim} \frac{p(n)}{n} \leq a$ ($1 < a \in \mathbb{R}$). C'est-à-dire qu'on peut toujours construire une suite de complexité très proche de $n + 1$ à partir d'un certain rang.

1 Introduction

Pour étudier un mot infini u défini sur un alphabet fini \mathcal{A} , on lui associe la fonction p_u , dite fonction de complexité de u , en notant $p_u(n)$ le nombre de facteurs de longueur n du mot u . Cette notion a été intensivement étudiée dans ces dernières années [2]. On associe aussi au mot u une famille de graphes (Γ_n) , où Γ_n (le graphe de Rauzy d'ordre n) est le graphe orienté dont les sommets sont les facteurs de longueur n de u et où il existe un arc entre deux sommets s'ils se succèdent dans le mot infini u (voir la définition plus loin).

Morse et Hedlund [12] ont montré que s'il existe un entier n_0 tel que $p_u(n_0) \leq n_0$, alors le mot infini u est ultimement périodique. Les mots intéressants sont donc ceux dont la complexité est telle que $p(n) \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les plus simples parmi ceux-ci sont les mots infinis de complexité $p(n) = n + 1$ pour tout n (un tel mot est appelé suite sturmienne). Ces mots sont donc les mots infinis de complexité minimale parmi les mots infinis non ultimement périodiques (voir [8], [13]). Les mots tels que $p(n) = n + k$ pour $n \geq n_0$ sont également été étudiés (suites quasi-sturmiennes).

Récemment, Rote [15] a étudié une classe de mots infinis de complexité exactement $2n$, et il a présenté une méthode de construction de tels mots infinis inspirée de l'article d'Arnoux et Rauzy [3], basée sur les graphes de Rauzy et leurs évolutions.

Dans cet article, on considère un cas intermédiaire : les mots infinis de complexité comprise entre $n + 1$ et $2n$.

Dans un premier temps, on présente d'une façon générale les graphes de Rauzy (chapitre 3) et leurs évolutions, et en particulier, les graphes de Rauzy des suites sturmiennes, qui n'admettent que deux types d'évolutions possibles. Cette étude nous permet dans un deuxième temps de regarder les graphes de Rauzy des suites notées u_s , dont la complexité est telle que $p(n) \leq an + 1$ pour une certaine constante $a < 2$ (chapitre 4). On démontre que si u est une suite de type u_s avec $a \leq \frac{4}{3}$, alors $s(n) = p(n+1) - p(n) \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui nous évite de rencontrer certains graphes dont l'évolution serait assez compliquée à étudier.

Pour finir, on présente une méthode qui permet de construire des suites de complexité assez faible et très proche de celle des suites sturmiennes (chapitre 5). On démontre que pour tout $a > 1$, on peut toujours construire une suite non quasi-sturmienne de complexité $n + 1 \leq p(n) \leq an + 1$.

2 Préliminaires

2.1 Définitions

1. Une suite finie sur un alphabet fini \mathcal{A} est appelée un **mot**.
2. La **longueur** d'un mot est le nombre des lettres qui composent ce mot.
3. On appelle **mot infini**, ou simplement **suite**, une suite indexée par \mathbb{N} à valeurs dans \mathcal{A} , et on la note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = u_0 u_1 u_2 \dots$.
4. Un mot w de longueur n est un **facteur** d'une suite u s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $w = u_{n_0} u_{n_0+1} \dots u_{n_0+n-1}$. On note $\mathcal{L}(u)$ l'ensemble de tous les facteurs de u .
5. Soit u une suite. On note $\mathcal{L}_n(u)$ l'ensemble des facteurs de longueur n de la suite u et $p_u(n)$ le cardinal de $\mathcal{L}_n(u)$. En particulier $p_u(0) = 1$, car le seul facteur de longueur 0 est le mot vide.

La fonction p_u définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto p_u(n) \end{aligned}$$

est appelée fonction de **complexité** de la suite u .

6. Soit u une suite sur un alphabet \mathcal{A} , w un facteur de u et x une lettre de \mathcal{A} .
 x est une **extension gauche** de w si xw appartient à $\mathcal{L}(u)$.
 w est un facteur **spécial à gauche** s'il admet plusieurs extensions gauches.
 x est une **extension droite** de w si wx appartient à $\mathcal{L}(u)$.
 w est un facteur **spécial à droite** s'il admet plusieurs extensions droites.
 w est un facteur **bispécial** s'il est spécial à la fois à gauche et à droite.

7. Une suite u est dite **récurrente** si chaque facteur de son langage apparaît une infinité de fois.
8. Une suite u est dite **binaire** si elle est à valeurs dans un alphabet à deux éléments, c'est-à-dire si $p_u(1) \leq 2$.

2.2 Quelques propriétés classiques

Soit u une suite binaire. Alors le nombre de facteurs spéciaux à droite pour u de longueur n est égal à $s(n) = p(n+1) - p(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si de plus u est récurrente, le nombre de facteurs spéciaux à gauche est aussi égal à $s(n)$ [11].

3 Les graphes de Rauzy

Dans tout l'article, on va avoir besoin d'un outil très utile, les graphes de Rauzy [3, 14]. On va utiliser une méthode constructive due à Rote [15] pour décrire ces graphes, qui nous permettra de donner quelques exemples de suites ayant une complexité comprise entre $n+1$ et $2n$.

3.1 Définition

Soit u une suite sur un alphabet \mathcal{A} .

Son **graphe de Rauzy d'ordre n** ou graphe des mots de longueur n , noté Γ_n , est le graphe orienté tel que :

- Ses sommets sont les mots de longueur n de u .
- Il existe un arc du mot w vers le mot v si et seulement s'il existe a et b , éléments de \mathcal{A} , vérifiant $wa = bv$ et wa facteur de longueur $n+1$ de u . On dit que les deux mots w et v se succèdent dans la suite u .

On appelle a l'**étiquette** de cet arc.

Soit $\mathcal{B} = (w_0, w_1, w_2, \dots, w_k)$ un chemin orienté du graphe Γ_n . Pour tout $i \in [1, k]$, il existe donc a_i et b_i dans \mathcal{A} telles que $w_{i-1}a_i = b_iw_i$.

Le mot étiquetant du chemin \mathcal{B} est le mot $a_1a_2 \dots a_k$.

La longueur du chemin \mathcal{B} est $|a_1a_2 \dots a_k| = k$.

Prenons par exemple la suite u définie comme ceci :

$$\sigma : \begin{cases} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases}$$

$$u = \sigma^\infty(0) = 010010100100101001 \dots$$

Regardons ses premiers graphes de Rauzy (figure 1). Cette suite est appelée mot de Fibonacci.

Soit u une suite récurrente et Γ_n son graphe de Rauzy d'ordre n . Le graphe orienté Γ_n est **strictement connexe** : étant donnés deux sommets quelconques x et y , il existe toujours un chemin orienté de Γ_n joignant x à y .

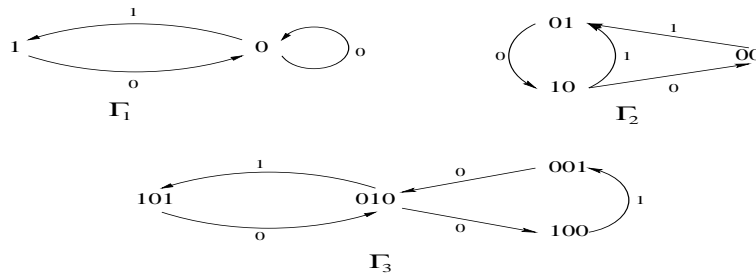


FIG. 1 – Les premiers graphes de Rauzy du mot de Fibonacci

3.2 L'évolution des graphes de Rauzy

Définitions

- Soit G un graphe orienté, le **graphe dérivé** de G , noté $D(G)$, est le graphe orienté tel que :
 - Ses sommets sont les arcs de G .
 - Il admet un arc du sommet x vers le sommet y lorsque dans G , le sommet d'arrivée de l'arc x est le sommet de départ de l'arc y (on dit alors que les arcs x et y sont consécutifs).

Soit u une suite récurrente sur un alphabet \mathcal{A} et Γ_n son graphe de Rauzy d'ordre n .

Comme Γ_n a un arc pour chaque élément de $\mathcal{L}_{n+1}(u)$, $D(\Gamma_n)$ a les mêmes sommets que Γ_{n+1} . Tout arc de Γ_{n+1} relie deux sommets associés à deux facteurs w et v de u tels que $wa = bv$. Ces deux sommets correspondent à deux arcs consécutifs de Γ_n , donc ils sont reliés par un arc dans $D(\Gamma_n)$. Par conséquent, $D(\Gamma_n)$ contient Γ_{n+1} . Mais $D(\Gamma_n)$ peut contenir des arcs qui ne sont pas dans Γ_{n+1} . Cela se produit quand $wa = bv$ avec w, v facteurs de u et a, b éléments de \mathcal{A} , mais wa n'est pas un facteur de u . Dans ce cas, le mot t tel que $w = bt$ et $v = ta$ est un facteur bispécial de u . Le graphe de Rauzy Γ_{n+1} est donc obtenu à partir de $D(\Gamma_n)$ par retrait éventuel de certains arcs. Quand Γ_n comporte un facteur bispécial w , ce facteur donne naissance dans $D(\Gamma_n)$ à plusieurs arcs (au moins 4) correspondant à tous les couples d'arcs (x, y) dans Γ_n tel que w est le sommet d'arrivée de x et de départ de y . Certains de ces arcs peuvent ne pas figurer dans Γ_{n+1} . Ce phénomène est appelé **éclatement** du facteur bispécial w . Quand il n'y a pas d'éclatement, $\Gamma_{n+1} = D(\Gamma_n)$.

Si on revient à l'exemple de la suite de Fibonacci, on trouve que $D(\Gamma_2) = \Gamma_3$, par contre $D(\Gamma_1) \neq \Gamma_2$ après l'éclatement du facteur bispécial 0 (il manque l'arc qui relie le facteur 00 à lui-même).

- L'**évolution** d'un graphe de Rauzy Γ_n est l'ensemble ordonné $\{\Gamma_{n+1}, \Gamma_{n+2}, \Gamma_{n+3}, \dots\}$. L'évolution finie entre Γ_n et Γ_m ($m > n$) est l'ensemble ordonné $\{\Gamma_{n+1}, \Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_m\}$.
- La **durée** de l'évolution finie entre Γ_n et Γ_m ($m > n$) est

$$T = \text{card}\{\Gamma_{n+1}, \Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_m\} = m - n.$$

On dit aussi que l'évolution du graphe Γ_n donne le graphe Γ_{n+T} après un temps T .

3.3 Les graphes de Rauzy des suites sturmiennes

Définition Une suite u est dite **sturmiennes** si $p_u(n) = n + 1 \forall n \in \mathbb{N}$ (voir [4], [5], [11] pour des résultats récents sur ces suites). Ce sont des suites binaires et, comme $s(n) = p(n + 1) - p(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, elles ont exactement un facteur spécial de chaque longueur. C'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un seul facteur w de taille n qui admet deux extensions droites.

Cette remarque et la récurrence des suites sturmiennes impliquent que les graphes de Rauzy d'une suite sturmiennes u ne peuvent avoir qu'une des deux formes représentées à la figure 2 (voir [3] et plus précisément [5], [7]).



FIG. 2 – Les deux formes possibles des graphes de Rauzy d'une suite sturmiennes

La forme F_1 correspond au cas où l'unique facteur spécial à droite w est bispécial ; la forme F_2 correspond au cas où ce facteur n'est pas bispécial.

Notation On note $G_s(x, y)$ le graphe de la forme F_1 où x et y sont les mots étiquetant les deux boucles. On suppose toujours que $|x| \geq |y|$ (figure 3).

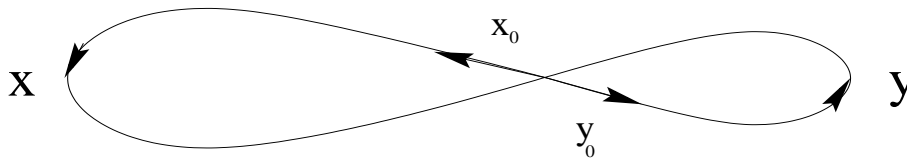


FIG. 3 – Le graphe $G_s(x, y)$

On note $x = x_0x_1\dots x_{|x|-1}$ et $y = y_0y_1\dots y_{|y|-1}$.

On remarque que $G_s(x, y)$ a $|xy| - 1$ sommets, $|xy|$ arêtes et un unique facteur bispécial w . x_0 et y_0 sont les deux extensions droites de w , donc $x_0 \neq y_0$.

Soit Γ_n un graphe de Rauzy de la suite sturmiennes u . Supposons que $\Gamma_n = G_s(x, y)$ est un graphe de la forme F_1 . $D(\Gamma_n)$ est représenté à la figure 4. C'est un graphe à $n + 2$ sommets et $n + 4$ arcs.

On sait que Γ_{n+1} est un sous graphe de $D(\Gamma_n)$ et qu'il a $n + 3$ arcs, donc on doit enlever l'un des arcs de $D(\Gamma_n)$. Les seuls arcs qui peuvent être enlevés sont les deux arcs verticaux (sur la figure 4) étiquetés par x_0 et y_0 (on ne peut pas toucher aux autres arcs, sinon le graphe devient non strictement connexe, ce qui contredit la récurrence des suites sturmiennes).

Supposons avoir enlevé l'arc x_0 , alors l'évolution du graphe Γ_n commence comme indiqué à la figure 5.

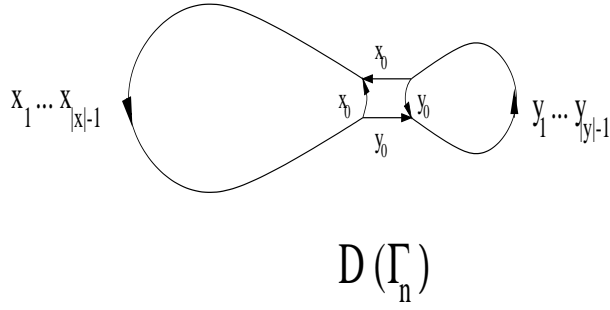


FIG. 4 – Le graphe $D(G_s(x, y))$

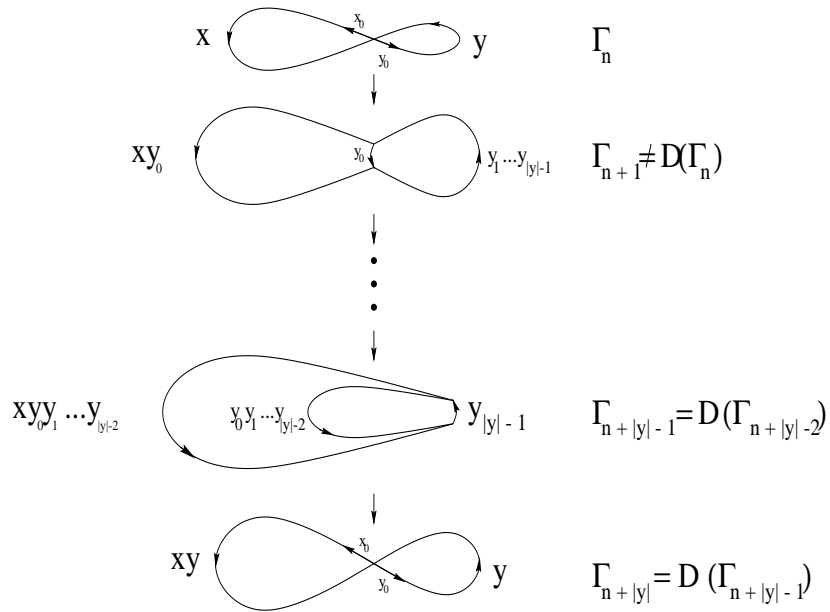


FIG. 5 – L'évolution du graphe Γ_n jusqu'à $\Gamma_{n+|y|}$

On a donc $\Gamma_{n+|y|} = G_s(xy, y)$. On appelle l'évolution entre Γ_n et $\Gamma_{n+|y|}$ évolution de type $O_{1,y}$.

On aura une évolution similaire dans le cas où on enlève l'arc vertical y_0 en échangeant juste le rôle des deux boucles x et y , ce qui donnera $\Gamma_{n+|x|} = G_s(yx, x)$. On appelle une telle évolution : évolution de type $O_{1,x}$.

Lemme 1. *Soit Γ_n le graphe de Rauzy d'ordre n d'une suite récurrente u . Supposons que $\Gamma_n = G_s(x, y)$, alors :*

$$\begin{aligned} O_{1,y}(\Gamma_n) &= \Gamma_{n+|y|} = G_s(xy, y) \\ &\quad \text{et} \\ O_{1,x}(\Gamma_n) &= \Gamma_{n+|x|} = G_s(yx, x) \end{aligned}$$

Cela veut dire que tout graphe $G_s(x, y)$ qui subit une évolution de type $O_{1,x}$ (resp. $O_{1,y}$) donne le graphe $G_s(yx, x)$ (resp. $G_s(xy, y)$). Si $G_s(x, y)$ est le graphe d'ordre n , alors $G_s(yx, x)$ est le graphe d'ordre $n + |y|$.

Définition Une suite u est dite **quasi-sturmienne** s'il existe des entiers $n_0 \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$, tels que $\forall n \geq n_0$, $p_u(n) = n + k$.

Les graphes de Rauzy d'une suite quasi-sturmienne, à partir du rang n_0 , ont les mêmes formes F_1 et F_2 que ceux des suites sturmiennes, et suivent des évolutions de mêmes types $O_{1,x}$ et $O_{1,y}$.

Soit u une suite récurrente, et n un entier tel que $p(n+1) - p(n) = 1$. Comme pour une suite sturmienne, le graphe Γ_n est de l'une des formes F_1 ou F_2 . Un tel graphe est appelé **graphe sturmien**.

4 Les graphes de mots des suites notées u_s

Définition

1. Appelons suite de type u_s toute suite binaire u qui vérifie :

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n + 1 \leq p(n) \leq an + 1$ où $1 < a < 2$.
- (b) $\forall k$, $\exists n$, $p(n) \geq n + k$.
- (c) u est récurrente.

La condition (b) sert à exclure les suites sturmiennes et quasi-sturmiennes.

Lemme 2. *Soit u une suite de type u_s , il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que Γ_n est de type G_s (i.e, de la forme F_1).*

Preuve La preuve est divisée en deux étapes : dans une première étape, on montre que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n > m$ tel que $s(n) = p(n+1) - p(n) = 1$ et dans une seconde étape, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $s(n) = 1$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que Γ_{n+k} est de type G_s .

1. Par contradiction, supposons qu'il existe m tel que $s(n) \geq 2 \forall n \geq m$. Alors $p(n) \geq p(m) + 2(n - m) \forall n \geq m$.

On peut toujours trouver un nombre entier N suffisamment grand et qui satisfait à l'inégalité $N > \frac{2m+1-p(m)}{2-a}$, et on a alors $p(N) \geq p(m) + 2(N - m) > aN + 1$, ce qui contredit les hypothèses.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $s(n) = 1$, donc le graphe de Rauzy Γ_n contient un seul facteur spécial à droite. Si ce dernier est un facteur bispécial, alors Γ_n est de type G_s , sinon Γ_n est de la forme F_2 . Soit k la longueur du chemin orienté reliant le facteur spécial à gauche et le facteur spécial à droite du graphe Γ_n . $D^k(\Gamma_n)$ est un graphe de la forme F_1 , et comme Γ_{n+k} est un sous graphe du $D^k(\Gamma_n)$, alors $\Gamma_{n+k} = D^k(\Gamma_n)$ (car on ne peut enlever aucun arc du graphe $D^k(\Gamma_n)$), donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que Γ_{n+k} est de type G_s . ■

Remarque Soit Γ_n un graphe de la forme F_2 d'une suite récurrente u , alors $\Gamma_{n+1} = D(\Gamma_n)$.

Dans ce qui suit, on va étudier l'évolution des graphes de mots entre deux graphes de type G_s consécutifs.

Soit $\Gamma_n = G_s(x, y)$ un graphe de mots de type G_s d'une suite infinie u , le facteur bispécial de ce graphe va subir un éclatement. $D(\Gamma_n)$ est le graphe représenté à la figure 4. Pour obtenir Γ_{n+1} , on peut enlever zéro, un ou deux arcs parmi les deux arcs verticaux étiquetés par x_0 et y_0 . Si on enlève les deux arcs, Γ_{n+1} est un cycle donc u est une suite périodique, ce qui est exclu. Il reste donc les trois possibilités représentées à la figure 6.

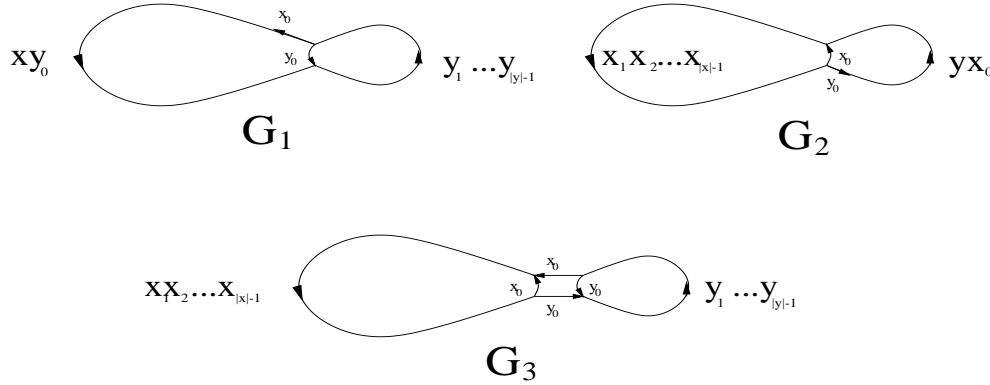


FIG. 6 – Γ_{n+1}

Les deux cas $\{G_1, G_2\}$ ont été étudiés précédemment (chapitre 3.3), et on a vu que G_1 (resp. G_2) correspond au début d'une évolution de type $O_{1,y}$ (resp. $O_{1,x}$).

Dans le cas de G_3 , le graphe Γ_n évolue de l'une des quatre manières représentées à la figure 7. Étudions les quatre cas :

- Dans le cas de G'_1 , $\Gamma_{n+|y|+1} = D(\Gamma_{n+|y|})$ contient 3 facteurs spéciaux à droite, son évolution va devenir de plus en plus compliquée. En particulier, tous les graphes entre Γ_{n+1} et $\Gamma_{n+|x|}$ contiendront au moins deux facteurs spéciaux à droite. Cela entraîne $p(n+|x|+1) \geq p(n+1) + 2|x|$, ce qui ne sera possible que si la constante a est suffisamment grande (rappelons que $\forall n, p(n) \leq an + 1$).

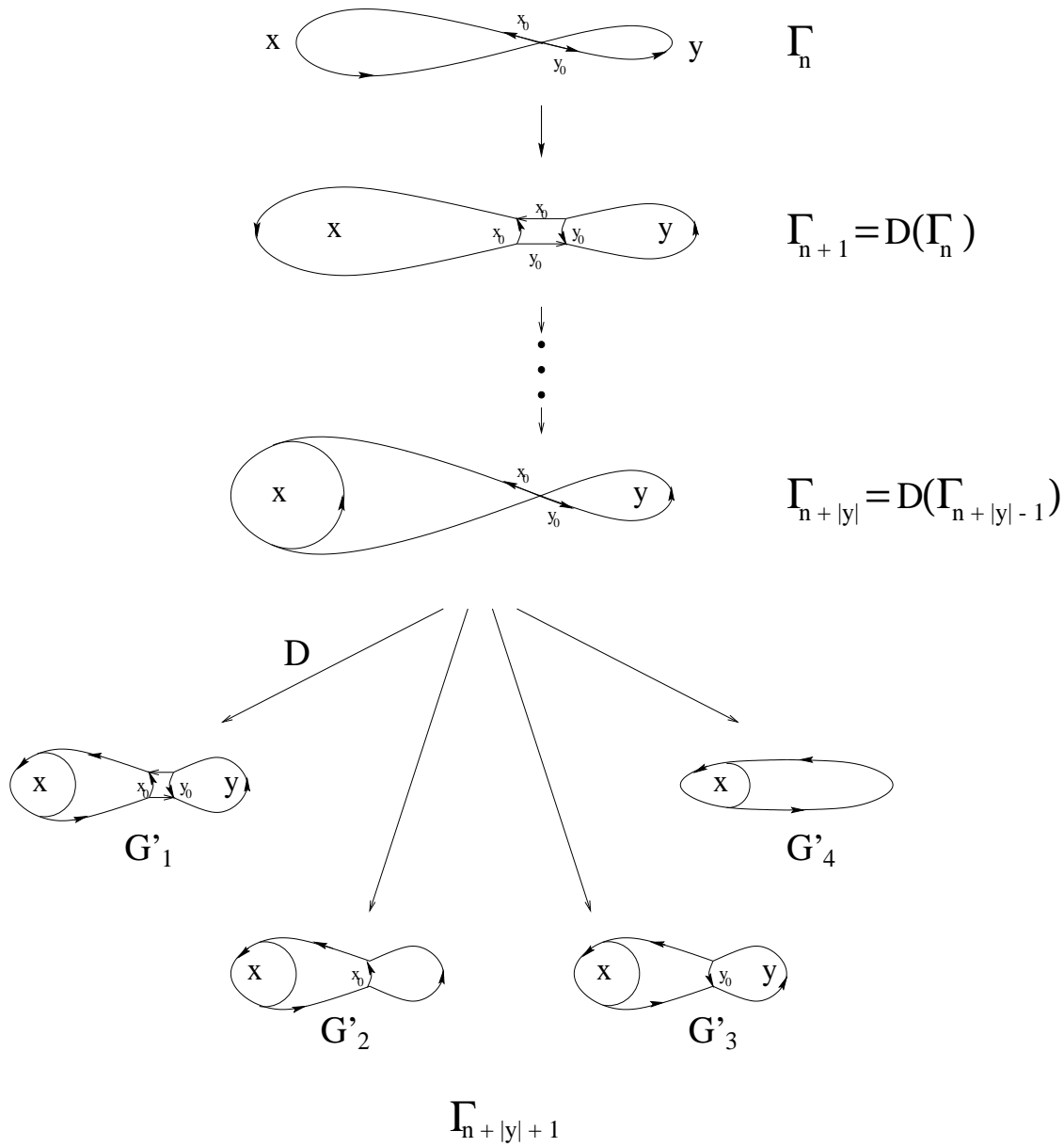


FIG. 7 – Évolutions possibles du graphe G_3 jusqu'à $\Gamma_{n+|y|+1}$

Pour ne pas avoir à considérer une évolution de ce type, on va supposer a suffisamment petit (voir la proposition 3), de sorte que toute évolution de durée $T \geq |x| - 1$ contiendra un graphe sturmien, ce qui exclut le cas G'_1 .

- L'évolution de G'_2 jusqu'à $\Gamma_{n+|x|}$ se déroule sans éclatement, donc $\Gamma_{n+k+1} = D(\Gamma_{n+k})$ pour tout k compris entre $|y| + 1$ et $|x| - 1$. Les graphes de Γ_{n+1} à $\Gamma_{n+|x|}$ ont tous exactement deux facteurs spéciaux à droite, donc le cas G'_2 est éliminé comme le cas précédent.
- Dans le cas de G'_4 , on tombe sur un graphe sturmien, qui va donc subir une évolution de durée $|x| - |y| - 1$ jusqu'au graphe $\Gamma_{n+|x|} = G_s(y^2x, x)$ (nous appellerons plus loin cette évolution : évolution de type O_2).
- Dans le cas de G'_3 , si $|x| \leq 2|y|$, alors le cas sera exclu, pour la même raison que le cas G'_2 .

Supposons que $|x| = k|y| + k'$ avec $k > 1$ et $k' \in \mathbb{N}$, alors l'évolution du graphe G'_3 donnera après un temps $|y| - 1$ le graphe de la figure 8.

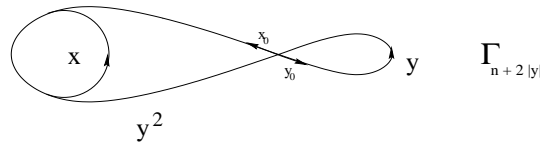


FIG. 8 – L'évolution du graphe G'_3 après un temps $|y| - 1$

Le graphe $\Gamma_{n+2|y|}$ est de la même forme que $\Gamma_{n+|y|}$, donc on va revenir à l'étude précédente, ce qui veut dire que $\Gamma_{n+2|y|+1}$ ne va pas être d'une des deux formes G'_1 et G'_2 . Si $\Gamma_{n+2|y|+1}$ est de la forme G'_4 , l'évolution va se poursuivre sans éclatement jusqu'à $\Gamma_{n+|x|}$. Si $\Gamma_{n+2|y|+1}$ est de la forme G'_3 , alors $k > 2$ et $\Gamma_{n+3|y|}$ est de la même forme que $\Gamma_{n+|y|}$, donc on recommence la même discussion. Puisque k est borné, alors l'évolution va donner obligatoirement un graphe de la forme G'_4 après une certaine durée. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma_{n+m|y|+1}$ est sturmien, alors $\Gamma_{n+|x|} = G_s(y^{m+1}x, x)$. On peut voir cela à partir de la figure 8, le chemin reliant le début de la boucle x et le facteur bispécial a pour étiquette y^2 , donc si on fait cette opération $m - 1$ fois, on tombe sur un graphe de la forme de la figure 8, mais le chemin reliant le début de la boucle x et le facteur bispécial aura pour étiquette y^m . Le prochain graphe (c'est-à-dire $\Gamma_{n+m|y|+1}$) sera de la forme G'_4 , d'où $\Gamma_{n+|x|} = G_s(y^{m+1}x, x)$.

Définition Soit $m \geq 1$, l'évolution de $\Gamma_n = G_s(x, y)$ à $\Gamma_{n+|x|} = G_s(y^{m+1}x, x)$ passant $m - 1$ fois par un graphe de la forme G'_3 pour revenir à un graphe de la même forme que $\Gamma_{n+|y|}$ de la figure 7, puis par un graphe de la forme G'_4 est appelée : évolution de type O_{m+1} .

Lemme 3. *Tout graphe $G_s(x, y)$ qui subit une évolution de type O_{m+1} donne le graphe $O_{m+1}(G_s(x, y)) = G_s(y^{m+1}x, x)$. Si $G_s(x, y)$ est le graphe d'ordre n , alors $O_{m+1}(G_s(x, y))$ est le graphe d'ordre $n + |x|$.*

Cette évolution a également un sens pour $m = 0$, si on pose

$$O_1(G_s(x, y)) = G_s(yx, x) = O_{1,x}(G_s(x, y)).$$

Proposition 1. *Soit u une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 \leq p(n) \leq an + 1$, avec $1 < a < 2$.*

Si $s(n) \geq 2$ pour tout $n \in [n_1, n_2[$, alors $T = n_2 - n_1 \leq \frac{a-1}{2-a}n_1$.

Preuve

$$\begin{aligned}
s(n) \geq 2 \quad \forall n \in [n_1, n_2[&\implies p(n_2) - p(n_1) \geq 2(n_2 - n_1) \\
&\implies an_2 + 1 \geq p(n_2) \geq 2(n_2 - n_1) + p(n_1) \\
&\implies an_2 + 1 \geq 2(n_2 - n_1) + p(n_1) \geq 2n_2 - 2n_1 + n_1 + 1 \\
&\implies an_2 \geq 2n_2 - n_1 \\
&\implies n_1 \geq (2 - a)n_2 \\
&\implies n_2 \leq \frac{1}{2 - a}n_1
\end{aligned}$$

Alors $T = n_2 - n_1 \leq (\frac{1}{2-a} - 1)n_1 = \frac{a-1}{2-a}n_1$ ■

Si en outre, la complexité de la suite est minorée par $bn + 1$, la proposition 1 se transforme en la proposition suivante :

Proposition 2. *Soit u une suite telle que $bn + 1 \leq p(n) \leq an + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $1 \leq b < a < 2$.*

Si $s(n) \geq 2$ pour tout $n \in [n_1, n_2[$, alors $T = n_2 - n_1 \leq \frac{a-b}{2-a}n_1$.

Proposition 3. *Soit u une suite de type u_s , et soit $\Gamma_n = G_s(x, y)$ graphe de Rauzy de u de type G_s . Soit T la durée d'une évolution finie de Γ_n dont tous les graphes $\Gamma_{n+1}, \Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_{n+T}$ ont plus d'un facteur spécial à droite.*

Si $a \leq \frac{4}{3}$ alors $T \leq |x| - 1$.

Preuve D'après la proposition 1, on a $T \leq \frac{a-1}{2-a}(n+1)$. D'autre part, $p(n+1) = |x| + |y|$ et $n+2 \leq p(n+1)$ donc $n \leq |x| + |y| - 2$, d'où $T \leq \frac{a-1}{2-a}(|x| + |y| - 1)$.

On a supposé que $a \leq \frac{4}{3}$, donc $\frac{a-1}{2-a} \leq \frac{1}{2}$, ce qui nous donne l'inégalité $T \leq \frac{1}{2}(|x| + |y| - 1) \leq |x| - \frac{1}{2}$ (car $|x| \geq |y|$), et puisque T est entier alors $T \leq |x| - 1$. ■

Lemme 4. *Soit u une suite de type u_s .*

Si $a \leq \frac{4}{3}$ alors $s(n) = p(n+1) - p(n) \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve On va montrer que, dans l'évolution entre deux graphes de type G_s consécutifs, aucun graphe n'a plus de deux facteurs spéciaux à droite.

Soit $\Gamma_n = G_s(x, y)$. Si Γ_{n+1} est un graphe sturmien, on a vu que Γ_n subit une évolution de type $O_{1,x}$ ou $O_{1,y}$ jusqu'au prochain graphe de type G_s , et tous les graphes d'une telle évolution n'ont qu'un seul facteur spécial à droite.

Si Γ_{n+1} n'est pas un graphe sturmien, a priori les quatre cas de la figure 7 sont possibles. Mais les cas G'_1 et G'_2 sont exclus par la proposition 3, et les cas G'_3 et G'_4 donnent des évolutions de type O_{m+1} , dont tous les facteurs ont au plus deux facteurs spéciaux à droite, ce qui achève la preuve. ■

Notons $G_s(x_i, y_i)$ les graphes de type G_s non triviaux d'une suite u de type u_s , de sorte que $G_s(x_1, y_1)$ est le premier graphe de type G_s non trivial et $G_s(x_{i+1}, y_{i+1})$ est le graphe de type G_s qui succède au graphe $G_s(x_i, y_i)$.

Théorème 1. *Soit u une suite de type u_s .*

Si $a \leq \frac{4}{3}$ alors le graphe $G_s(x_{i+1}, y_{i+1})$ ($i \geq 1$) vérifie l'une des deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n y_n \\ y_{n+1} = y_n \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_{n+1} = y_n^{m+1} x_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

où $m \geq 0$.

Preuve La preuve est immédiate à partir du lemme 4. Le fait que $s(n) \leq 2$ interdit l'apparition des graphes G'_1 et G'_2 , et toutes les évolutions entre deux graphes de type G_s consécutifs sont donc de type $O_{1,x}(= O_1)$, $O_{1,y}$ ou O_{m+1} . ■

Proposition 4. *Le seul graphe de type $G_s(x, y)$ avec $|x| = |y|$ d'une suite u (définie sur $\{0, 1\}$) de complexité $p(n) \leq 2n$ pour tout $n \geq 1$ est le graphe trivial $G_s(1, 0)$.*

Preuve Par contradiction, on suppose qu'il existe un graphe $\Gamma_n = G_s(x, y)$ avec $|x| = |y|$; soit w le facteur bispécial de ce graphe. Il est clair que le mot w est un suffixe des deux mots wx et wy . Si $|x| = |y| \leq |w|$, on conclut immédiatement que $x = y$, ce qui est exclu car leurs premières lettres sont différentes (cf. 3.3). Sinon $|x| = |y| \geq |w| + 1 = n + 1$, et comme $p(n) = |x| + |y| - 1$ alors $p(n) \geq (n + 1) + (n + 1) - 1 = 2n + 1$. Par hypothèse, cela n'est possible que si $n = 0$, et alors le graphe $G_s(x, y)$ n'est autre que $G_s(1, 0)$. ■

5 Construction de suites u_s

Dans ce chapitre, on va essayer de construire quelques suites u_s et regarder s'il est possible de les exprimer comme un point fixe d'une substitution.

5.1 Exemple I

Soit le graphe Γ_{n_i} (n_i est la longueur correspondante) défini comme ceci : $\Gamma_{n_i} = (O_{1,x}.O_2)^i(\Gamma_{n_0})$, où Γ_{n_0} est le graphe :

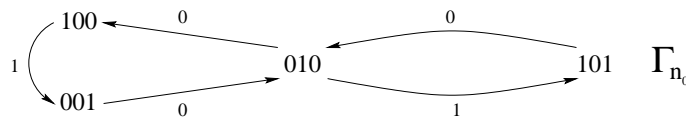
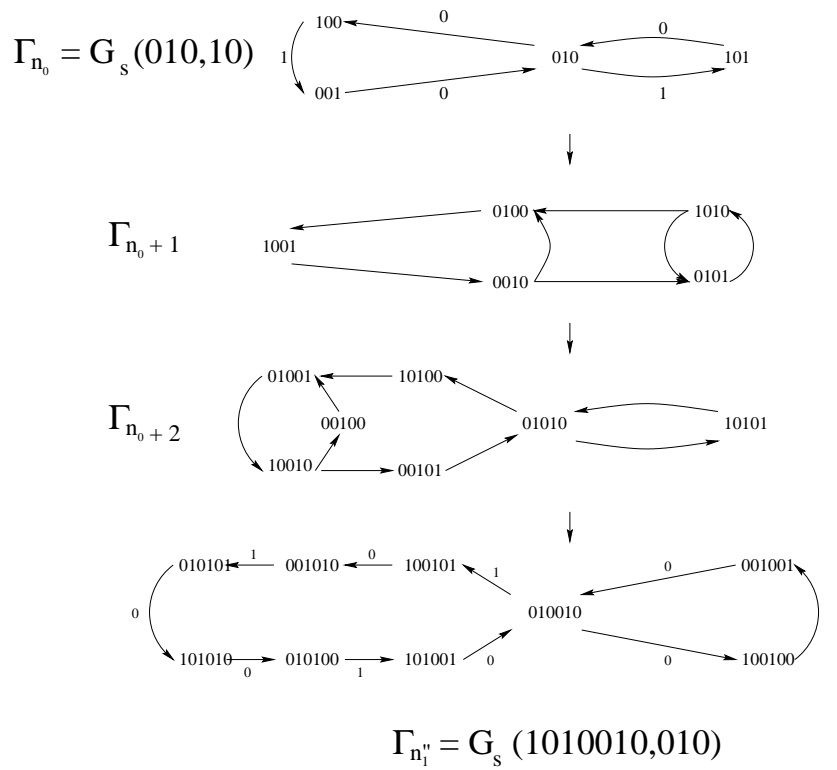


FIG. 9 – Le graphe Γ_{n_0}

Remarquons que $n_0 = 3$.

Notons $\Gamma''_{n_{i+1}} = O_2(\Gamma_{n_i})$ et $\Gamma''_{n_0} = G_s(10, 0)$. On a donc $\Gamma_{n_i} = O_{1,x}(\Gamma''_{n_i})$ pour tout i . La figure 10 montre l'évolution de type O_2 entre Γ_{n_0} et Γ''_{n_1} .

FIG. 10 – L'évolution de type O_2 entre Γ_{n_0} et Γ_{n_1}''

Notons u_{s1} toute suite dont les graphes de mots de type G_s sont les Γ_{n_i} et Γ_{n_i}'' .

On va décrire la complexité des suites u_{s1} , et en déduire les limites inférieure et supérieure de $\frac{p(n)}{n}$. L'idée ici est de calculer la durée des évolutions entre Γ_{n_i} et Γ_{n_i}'' et entre Γ_{n_i}'' et $\Gamma_{n_{i+1}}$.

Notons $\Gamma_{n_i} = G_s(x_i, y_i)$ et $\Gamma_{n_i}'' = G_s(x_i'', y_i'')$. $\Gamma_{n_{i+1}}'' = O_2(\Gamma_{n_i})$, donc, d'après le lemme 3 :

$$\begin{cases} x_{i+1}'' = y_i^2 x_i \\ y_{i+1}'' = x_i \\ n_{i+1}'' = n_i + |x_i| \end{cases}$$

et $\Gamma_{i+1} = O_{1,x}(\Gamma_{i+1}'')$ donc, d'après le lemme 1 :

$$\begin{cases} x_{i+1} = y_{i+1}'' x_{i+1}'' = x_i y_i^2 x_i \\ y_{i+1} = x_{i+1}'' = y_i^2 x_i \\ n_{i+1} = n_{i+1}'' + |x_{i+1}''| \end{cases}$$

On peut en déduire que :

$$\begin{cases} |x_{i+1}| = 2|x_i| + 2|y_i| \\ |y_{i+1}| = |x_i| + 2|y_i| \\ n_{i+1} = n_i + 2|x_i| + 2|y_i| \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} |x_i| \\ |y_i| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} |x_0| \\ |y_0| \end{pmatrix} = A^i \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} |x_i| = \alpha(2 + \sqrt{2})^i + \beta(2 - \sqrt{2})^i \\ |y_i| = \alpha'(2 + \sqrt{2})^i + \beta'(2 - \sqrt{2})^i \end{cases}$$

où $\lambda_1 = (2 + \sqrt{2})$ et $\lambda_2 = (2 - \sqrt{2})$ sont les deux valeurs propres de la matrice A et $\alpha = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, $\beta = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, $\alpha' = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $\beta' = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Puisqu'on applique l'évolution O_2 sur le graphe $\Gamma_{n_i} = G_s(x_i, y_i)$, alors ce dernier subit un éclatement fort et l'évolution entre Γ_{n_i} et $\Gamma_{n_i+|y_i|}$ ne contient que des graphes ayant deux facteurs spéciaux à droite. Après, on tombe sur des graphes ayant juste un seul facteur spécial à droite jusqu'à $\Gamma_{n_{i+1}}$, et l'évolution entre $\Gamma_{n_i+|y_i|}$ et $\Gamma_{n_{i+1}}$ dure un temps $n_{i+1} - (n_i + |y_i|) = 2|x_i| + |y_i|$.

Notons $n'_i = n_i + |y_i|$ (si $i \geq 1$, $n_i < n'_i < n''_{i+1}$). Le schéma de la figure 11 donne l'allure de la fonction de complexité des suites u_{s1} .

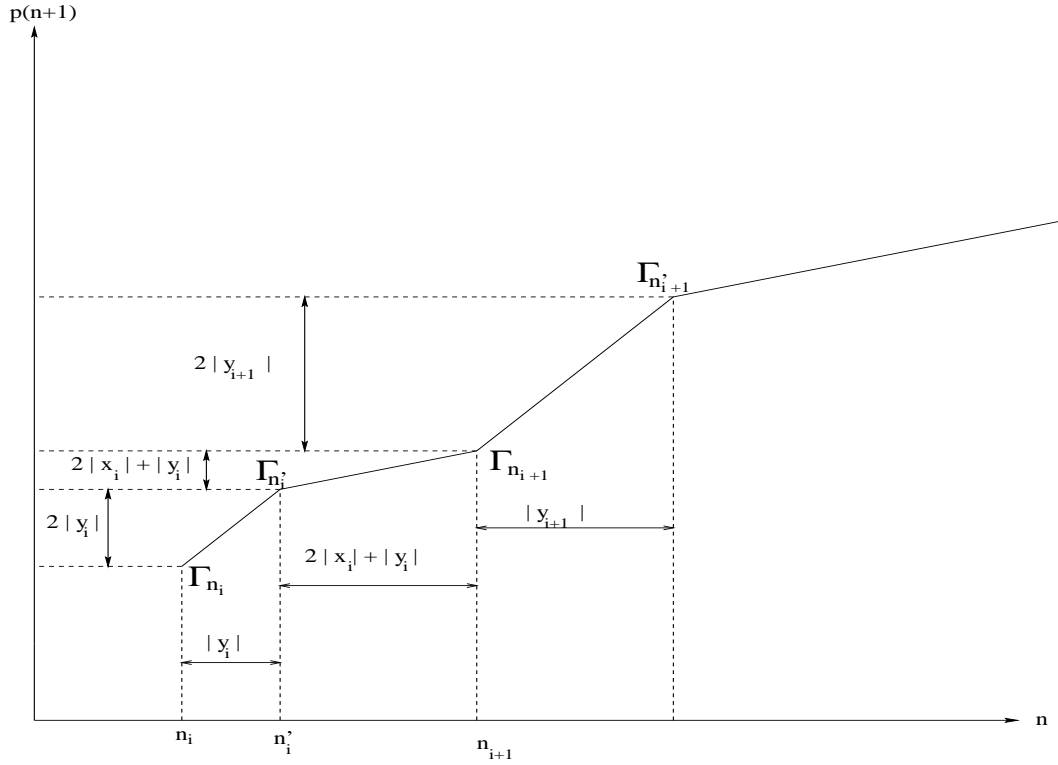


FIG. 11 – La complexité des suites u_{s1}

Nous utilisons le résultat d'analyse suivant :

Proposition 5. Si (u_n) et (v_n) ($n \geq 1$) sont deux suites numériques telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \alpha \geq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n u_j}{\sum_{j=1}^n v_j} = \alpha$.

La limite inférieure (resp. supérieure) de $\frac{p(n)}{n}$ est $\underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{p(n_{i+1})}{n_{i+1}}$ (resp. $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{p(n'_{i+1})}{n'_{i+1}}$). Comme indiqué sur le schéma (figure 11), on a :

$$\begin{aligned} n'_{i+1} - n'_i &= 2|x_i| + |y_i| + |y_{i+1}| \\ p(n'_{i+1} + 1) - p(n'_i + 1) &= 2|x_i| + |y_i| + 2|y_{i+1}| \\ n_{i+1} - n_i &= 2|x_i| + 2|y_i| \\ p(n_{i+1} + 1) - p(n_i + 1) &= 2|x_i| + 3|y_i| \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \overline{\lim}_n \frac{p(n)}{n} = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{p(n'_i+1)}{n'_i+1} = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{p(n'_i+1)-p(n'_0+1)}{n'_i-n'_0} = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{i-1} (p(n'_{j+1}+1)-p(n'_j+1))}{\sum_{j=0}^{i-1} (n'_{j+1}-n'_j)}$$

D'autre part

$$\lim_{j \rightarrow \infty} n'_{j+1} - n'_j = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p(n'_{j+1})-p(n'_j)}{n'_{j+1}-n'_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2|x_j|+|y_j|+2|y_{j+1}|}{2|x_j|+|y_j|+|y_{j+1}|} = 1 + \frac{\alpha' \lambda_1}{2\alpha + \alpha' + \alpha' \lambda_1} = l_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \simeq 1,47.$$

Alors d'après la proposition 3

$$\overline{\lim}_n \frac{p(n)}{n} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2|x_j| + |y_j| + 2|y_{j+1}|}{2|x_j| + |y_j| + |y_{j+1}|} = l_1 \simeq 1,47$$

On peut en déduire que $\forall c > l_1$, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, $p(n) \leq cn$.

De la même manière, on trouve

$$\underline{\lim}_n \frac{p(n)}{n} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p(n_{i+1})}{n_{i+1}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2|x_j|+3|y_j|}{2|x_j|+2|y_j|} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'} \right) = l_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \simeq 1,21.$$

Soit u la suite définie par $u = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} y''_{i+1}$. Cette limite existe pour les deux motifs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{i \rightarrow \infty} |x_i| = +\infty \\ \forall i \in \mathbb{N}, x_i \text{ est un préfixe de } x_{i+1} \end{array} \right.$$

Définissons le morphisme σ par $\sigma(0) = 010$ et $\sigma(1) = 1010$. En utilisant les deux relations de récurrence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x''_{i+1} = x''_i y''_i x''_i \\ y''_{i+1} = y''_i x''_i \\ y''_0 = 0, x''_0 = 10 \end{array} \right.$$

on peut démontrer que $y''_{i+1} = \sigma(y''_i)$ et $x''_{i+1} = \sigma(x''_i) \forall i \in \mathbb{N}$, et ainsi u est l'unique point fixe de σ commençant par 0, ce qu'on note $u = \sigma^w(0)$. Donc la suite u est un exemple de suite de type u_{s1} qui peut être obtenue comme point fixe d'une substitution.

Remarque Pour les suites de type u_{s1} , on a $\overline{\lim}_n \frac{p(n)}{n} > \frac{4}{3}$, bien que les seules évolutions entre graphes de type G_s soient de type $O_{1,x}$ ou O_2 . La réciproque du théorème 1 est donc fausse.

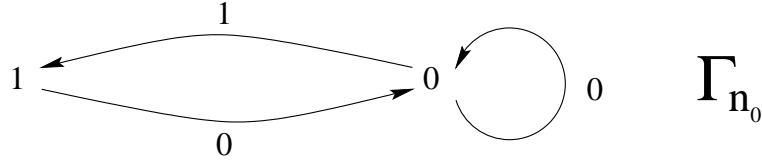
5.2 Exemple II

(Cet exemple est indépendant de l'exemple I)

Soit $l \in \mathbb{N}$ fixé.

Soit le graphe Γ_{n_i} défini comme ceci : $\Gamma_{n_i} = G_s(x_i, y_i) = (O_{1,y}^l \cdot O_2)^i(\Gamma_{n_0})$ et $\Gamma_{n_0} = G_s(10, 0)$ le graphe représenté à la figure 12.

Notation Notons u_{s2} toute suite dont les graphes de mots de type G_s sont les $\Gamma_{n_i}, O_2(\Gamma_{n_i}), O_{1,y}(O_2(\Gamma_{n_i})), \dots, O_{1,y}^{l-1}(O_2(\Gamma_{n_i}))$.

FIG. 12 – Le graphe Γ_{n_0}

Comme on a fait pour le premier exemple, on va chercher les limites inférieure et supérieure de $\frac{p(n)}{n}$ pour les suites u_{s2} . Le graphe Γ_{n_i} vérifie :

$$\begin{cases} x_{i+1} = y_i^2 x_i^{l+1} \\ y_{i+1} = x_i \\ n_{i+1} = n_i + (l+1)|x_i| \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} |x_i| \\ |y_i| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l+1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} |x_0| \\ |y_0| \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} |x_i| = \alpha \left(\frac{l+1+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^i + \beta \left(\frac{l+1-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^i \\ |y_i| = \alpha' \left(\frac{l+1+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^i + \beta' \left(\frac{l+1-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^i \end{cases}$$

Avec $\lambda_1 = \left(\frac{l+1+\sqrt{\Delta}}{2}\right)$, $\lambda_2 = \left(\frac{l+1-\sqrt{\Delta}}{2}\right)$ les deux valeurs propres de la matrice ($\Delta = l^2 + 2l + 9$ est le discriminant de la matrice) et $\alpha = 1 + \frac{l+3}{\sqrt{\Delta}}$, $\beta = 1 - \frac{l+3}{\sqrt{\Delta}}$, $\alpha' = \frac{1}{2} + \frac{3-l}{2\sqrt{\Delta}}$, $\beta' = \frac{1}{2} + \frac{l-3}{2\sqrt{\Delta}}$.

L'évolution entre Γ_{n_i} et $\Gamma_{n_i+|y_i|}$ ne contient que des graphes ayant deux facteurs spéciaux à droite, tandis que l'évolution entre $\Gamma_{n_i+|y_i|}$ et $\Gamma_{n_{i+1}}$ ne contient que des graphes sturmiens.

Notons $n'_i = n_i + |y_i|$. Le schéma de la figure 13 nous donne l'allure de la complexité des suites u_{s2} .

$$\overline{\lim} \frac{p(n)}{n} = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{p(n'_i+1)}{n'_i+1} = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{i-1} (p(n'_{j+1}+1) - p(n'_j+1))}{\sum_{j=0}^{i-1} (n'_{j+1} - n'_j)} =$$

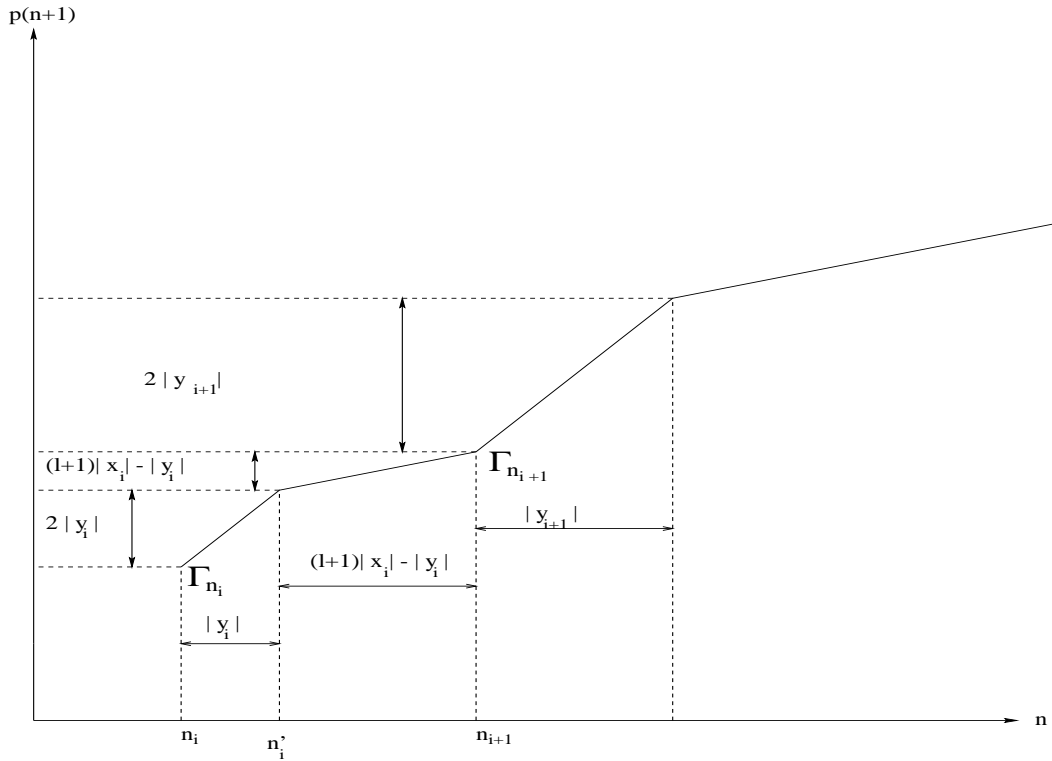
$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(l+1)|x_j| - |y_j| + 2|y_{j+1}|}{(l+1)|x_j| - |y_j| + |y_{j+1}|} = 1 + \frac{\alpha}{(l+2)\alpha - \alpha'} = 1 + \frac{5l + \sqrt{\Delta} + 9}{6l^2 + 22l + 18}.$$

$$\underline{\lim} \frac{p(n)}{n} = \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{p(n_i+1)}{n_i+1} = \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{i-1} (p(n_{j+1}+1) - p(n_j+1))}{\sum_{j=0}^{i-1} (n_{j+1} - n_j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(l+1)|x_j| + |y_j|}{(l+1)|x_j|} =$$

$$1 + \frac{\alpha'}{(l+1)\alpha} = 1 + \frac{2}{(l+1)(\sqrt{\Delta} + l + 1)}.$$

On remarque que $\overline{\lim} \frac{p(n)}{n} - 1 \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l}$ et $\underline{\lim} \frac{p(n)}{n} - 1 \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l^2}$. On en déduit que si l est très grand alors la complexité $p(n)$ est très proche de $n + 1$.

En définissant le morphisme δ par $\delta(0) = 10$ et $\delta(1) = 00(10)^l$, on trouve que $y_{i+1} = \delta(y_i)$ et $x_{i+1} = \delta(x_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. La différence entre cet exemple et l'exemple précédent est que y_i n'est pas un préfixe de y_{i+1} dans l'exemple II, ce qui va empêcher l'existence de la limite $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i$. Par contre, on peut démontrer par récurrence que y_i est un préfixe de y_{i+2} . Définissons maintenant la suite v comme ceci : $v = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{2i}$.

FIG. 13 – La complexité des suites u_{s2}

Cette limite existe pour les deux raisons suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{i \rightarrow \infty} |y_{2i}| = +\infty \\ \forall i \in \mathbb{N}, y_{2i} \text{ est un préfixe de } y_{2i+2} \end{cases}$$

On a $y_{2i+2} = \delta^2(y_{2i})$, $x_{2i+2} = \delta^2(x_{2i})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $v = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{2i}$. Ainsi $v = (\delta^2)^w(0)$. Donc la suite v est un exemple de suite de type u_{s2} qui peut être obtenue comme un point fixe d'une substitution.

Remarque Pour $l = 0$, $\delta^2(0) = 0010$ et $\delta^2(1) = 1010$, et on retrouve l'exemple présenté par G. Rauzy dans l'article [14].

Théorème 2. Pour tout nombre réel a , $a > 1$ il existe une suite u telle que :

$$1 < \underline{\lim} \frac{p(n)}{n} < \overline{\lim} \frac{p(n)}{n} \leq a$$

Preuve On prend l'exemple ci-dessus avec l suffisamment grand pour que $1 + \frac{\alpha}{(l+2)\alpha - \alpha'} \leq a$.

Il nous reste à démontrer que $\underline{\lim} \frac{p(n)}{n} < \overline{\lim} \frac{p(n)}{n}$. On a

$$\begin{aligned} \underline{\lim} \frac{p(n)}{n} < \overline{\lim} \frac{p(n)}{n} &\iff \frac{\alpha'}{(l+1)\alpha} < \frac{\alpha}{(l+2)\alpha - \alpha'} \\ &\iff (l+1)\alpha^2 - (l+2)\alpha\alpha' + \alpha'^2 > 0 \end{aligned}$$

car $(l + 2)\alpha - \alpha' \geq 0$).

Considérons le polynôme $X(\alpha) = (l + 1)\alpha^2 - (l + 2)\alpha\alpha' + \alpha'^2$

$$X(\alpha) = 0 \iff \alpha = \alpha' \text{ ou } \alpha = \frac{\alpha'}{l + 1}$$

Pour arriver au résultat désiré, on va démontrer que $\alpha > \alpha' \geq 0$, c'est-à-dire que α est hors de l'intervalle délimité par les deux racines α' et $\frac{\alpha'}{l+1}$.

1. Il est immédiat que $\alpha > \alpha'$ car $\alpha - \alpha' = \frac{1}{2} + \frac{3(l+1)}{2\sqrt{\Delta}} > 0 \forall l \in \mathbb{N}$
2. On démontre que $\alpha' \geq 0$:

$$\begin{aligned} \alpha' \geq 0 &\iff \frac{1}{2} + \frac{3-l}{2\sqrt{\Delta}} \geq 0 \\ &\iff \sqrt{\Delta} \geq l - 3 \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Si $l \leq 3$ alors l'inégalité (1) est satisfaite.

(b) Si $l > 3$ alors :

$$\begin{aligned} (1) &\iff \Delta \geq (l - 3)^2 \\ &\iff l^2 + 2l + 9 \geq l^2 - 6l + 9 \\ &\iff 0 \geq -4l \end{aligned}$$

et comme $l > 3$ alors l'inégalité (1) est satisfaite, donc $\alpha' \geq 0$.

À partir de ce qu'on vient de démontrer, on déduit que $\alpha \notin [\frac{\alpha'}{l+1}, \alpha'] \forall l \in \mathbb{N}$ ce qui signifie que le polynôme $X(\alpha)$ est strictement positif car son coefficient dominant $l + 1$ est positif, ce qui achève la preuve. ■

Remarque La propriété $\underline{\lim} \frac{p(n)}{n} < \overline{\lim} \frac{p(n)}{n}$ est en fait une conséquence d'un résultat récent d'Alex HEINIS [10] : il n'existe pas de suite telle que $\lim \frac{p(n)}{n}$ existe est $1 < \lim \frac{p(n)}{n} < 2$.

Conclusion Dans cet article, nous avons présenté une méthode générale pour étudier les suites dont la complexité est majorée par une fonction de la forme $an + 1$: elle consiste à décrire tous les types de graphes de Rauzy possibles pour une telle suite, et toutes les évolutions entre ces graphes. Ainsi, pour $a = \frac{4}{3}$, on a vu que les seules évolutions possibles sont de type O_{m+1} et $O_{1,x}$. Il serait intéressant d'étudier les évolutions, plus complexes, qui deviennent possibles pour des valeurs de a plus élevées.

Cette étude nous a notamment permis de construire des suites dont la fonction de complexité est aussi proche que l'on veut de $n + 1$, tout en ayant $\overline{\lim} \frac{p(n)}{n} > 1$. Mais on peut modifier la construction de l'exemple II pour obtenir une suite dont la complexité est encore plus proche de $n + 1$, de sorte que $\lim \frac{p(n)}{n} = 1$, avec toutefois

$\lim p(n) - n = +\infty$. L'étude générale des suites de ce type fera l'objet d'un prochain article.

La réciproque du théorème 1 est fausse, comme le montre le contre-exemple construit au chapitre 5 (exemple I). Un nouveau problème qui pourrait être étudié est : quelles conditions faut-il ajouter au théorème 1 pour en faire une équivalence ?

Références

- [1] P. ALESSANDRI, Codages de rotations et basses complexités, Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille II, 1996.
- [2] J. -P. ALLOUCHE, Sur la complexité des suites infinies, Bull. Belg. Math. Soc. **1** (1994) 133-143.
- [3] P. ARNOUX, G. RAUZY, Représentation géométrique des suites de complexité $2n + 1$, Bull. Soc. Math. France **119** (1991), 199-215.
- [4] J. BERSTEL, Recent results in Sturmian words, Developments in language theory II (Magdeburg, 1995), 13–24, World Sci. Publishing, Singapour, 1996.
- [5] V. BERTHÉ, Fréquences des facteurs des suites sturmiennes, Theoret. Comput. Sci. **165** (1996) 295-309.
- [6] J. CASSAIGNE, Complexité et facteurs spéciaux, Bull. Belg. Math. Soc. **4** (1997), 67-88.
- [7] N. CHEKHOVA, Covering numbers of rotations, Theoret. Comput. Sci. **230** (2000), 97–116.
- [8] E. M. COVEN, G. A. HEDLUND, Sequences with minimal block growth, Math. Systems Theory **7** (1973), 138-153.
- [9] A. DESIDERI BRACCO, Vers une construction générale pour les suites de complexité $2n$, mémoire de DEA, Université Aix-Marseille II, 1997.
- [10] A. HEINIS, Thèse de Doctorat, Université de Leiden, 2001.
- [11] M. LOTHAIRE, Algebraic combinatorics on words, à paraître.
- [12] M. MORSE, G. A. HEDLUND, Symbolic dynamics, Amer. J. Math. **60** (1938), 815-866.
- [13] M. MORSE, G. A. HEDLUND, Symbolic dynamics II : Sturmian trajectories, Amer. J. Math. **62** (1940), 1-42.
- [14] G. RAUZY, Suites à termes dans un alphabet fini, Sémin. Théor. Nombres Bordeaux (1982-1983) 25.01-25.16.
- [15] G. ROTE, Sequences with subword complexity $2n$, J. Number Theory **46**, 196-213 (1994).
- [16] M. -L. SANTINI, Échanges de trois intervalles, Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille II (1994).

Institut de Mathématiques de Luminy
CNRS-UPR 9016, case 907, 163 Avenue de Luminy
13288 Marseille Cedex 9, France.
email : aberkane@iml.univ-mrs.fr