Ensembles invariants associés aux feuilletages holomorphes singuliers dans $\mathbb{C}^2$

Eduardo Fierro*

Résumé

Dans cet article nous considérons des germes de feuilletages holomorphes dans le plan complexe à singularité isolée à l'origine dont la désingularisation possède des diviseurs avec des groupes d'holonomie projective non résolubles possédant des séparatrices au sens de Nakai. Nous étudions les ensembles invariants fermés construits, au voisinage de chaque diviseur, par saturation des séparatrices et nous établissons des conditions pour recoller et préserver ces ensembles après passage des coins.

Abstract

In this paper we consider germs of holomorphic foliations in the complex plain with an isolated singularity at the origin whose desingularization has divisors with non solvable projective holonomy groups with separatrices. We study closed invariant sets obtained, in neighborhoods of each divisor, by saturation of the separatrices and we give conditions in order to preserve and glue those sets after go through the corners.

*L'auteur a été financé par la DGICT-Universidad Católica del Norte, Chile.

Received by the editors May 2003 - In revised form in June 2003.

Communicated by J. Mawhin.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 32S65, 32A10, 34C20, 37F75, 53A60, 53C65, 57S.

Key words and phrases : Feuilletages holomorphes singuliers, Holonomie projective, Ensembles invariants, Groupes de difféomorphismes, Séparatrices, Tissus.

1 Introduction

Dans cet travail on considère des germes de feuilletages holomorphes $\mathcal{F}_\omega$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ définis par une équation de Pfaff $\omega = 0$, où ω est un germe d'une 1-forme holomorphe défini dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^2$ dont la seule singularité sur U est $(0,0)$. Dans ce cas [10] (voir aussi [1] et [7]) le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ se désingularise après un nombre fini d'éclatements ponctuels en un feuilletage holomorphe singulier n'ayant que des singularités réduites. Ceci signifie, qu'il existe une surface complexe $\widetilde{U}$ et une application holomorphe propre $\pi : \widetilde{U} \to U$ obtenue par compositions d'un nombre fini d'éclatements ponctuels telles que :
i) La restriction de π à $\widetilde{U} - \pi^{-1}(0,0)$ est un biholomorphisme sur $U - \{(0,0)\}$ et $\pi^{-1}(0,0) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ est une réunion de courbes projectives complexes D_i à croisements normaux.
ii) Le feuilletage régulier $\pi^*\mathcal{F}_\omega$ sur $\widetilde{U} - \pi^{-1}(0,0)$ se prolonge en un feuilletage holomorphe $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ sur $\widetilde{U}$ tel que $sing(\widetilde{\mathcal{F}_\omega})$ est un sous-ensemble fini de $\pi^{-1}(0,0)$ ne contenant que des singularités réduites.

On rappelle qu'une singularité m de $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ est *réduite*, s'il existe un système des coordonnées (x,y), $x(m) = y(m) = 0$ et une 1-forme ω_m tels que le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ est donné par $\omega_m = 0$ et le 1-jet de ω_m est de l'un des types suivants :

$(\star)$ $\lambda_1 xdy + \lambda_2 ydx$, avec $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^-$
$(\star\star)$ xdy

On note par $sing(\widetilde{\mathcal{F}_\omega})$ l'ensemble des singularités de $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ et on appelle coin l'intersection de deux composantes irréductibles distinctes de $\pi^{-1}(0,0)$.

Soit D_i une composante irréductible (ou diviseur) non dicritique du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0,0)$, i.e., $D_i - sing(\widetilde{\mathcal{F}_\omega})$ est une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$. Nous notons par $G_i \subset Diff(\mathbb{C},0)$ le groupe d'holonomie projective de $\mathcal{F}_\omega$ associé à D_i [7], où $Diff(\mathbb{C},0)$ désigne le groupe des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C},0)$.

Lorsque l' un des G_i est non résoluble on a, d'après un théorème de Nakai [8], deux dynamiques possibles pour G_i. Les orbites de G_i sont denses dans $(\mathbb{C},0)$ ou il existe un germe $\gamma_i \subset (\mathbb{C},0)$ d'ensemble analytique réel contenant $0 \in \mathbb{C}$ invariant par G_i (i.e., $g(\gamma_i) \subset \gamma_i$, pour tout $g \in G_i$), appelée séparatrice de Nakai, telle que les orbites de G_i sont denses dans $\gamma_i - \{0\}$ et denses sur chaque secteur de $(\mathbb{C},0) - \gamma_i$. Il est facile de voir que, dans la première situation, le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ ne possède pas d'ensembles fermés et invariants (non triviaux) au voisinage de D_i. Par contre, dans la deuxième situation le saturé de γ_i par $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$, que l'on note K_i, est un ensemble fermé et invariant par $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ au voisinage de D_i.

Nous supposons dans toute la suite de ce texte que les coins définis par des diviseurs D_i à holonomie non résolubles avec des séparatrices ne sont pas des singularités selles nœuds, c'est a dire, du type $(\star\star)$.

Nous nous intéressons aux conditions de préservation et de recollement des ensembles K_i après le passage d'un coin, au sens suivant : si $m \in sing(\widetilde{\mathcal{F}_\omega})$ est un coin du type $(\star)$ défini par deux composantes irréductibles D_i et D_{i+1} non dicritiques de $\pi^{-1}(0,0)$ et G_i est non résoluble avec séparatrice γ_i, nous étudions l'existence d'ensembles fermés $K \subset \widetilde{U}$ définis au voisinage de $D_i \cup D_{i+1}$ invariants par $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ dans les deux cas suivants :

- *Condition de préservation de l'ensemble invariant* K_i. Le germe de K le long D_i, que l'on note $K_{|D_i}$, est précisément l'ensemble invariant K_i.

-*Condition de recollement des ensembles invariants* K_i *et* K_{i+1}. Si G_{i+1} est non résoluble avec séparatrice γ_{i+1}, alors $K_{|D_i} = K_i$ et $K_{|D_{j+1}}{=}K_{j+1}$.

L'étude que nous devons réaliser est de caractère local. La description du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ au voisinage de m, et en particulier des ensembles K_i et K_{i+1}, nous permettra de donner des conditions pour l'existence de l'ensemble K. La correspondance de Dulac (pour une définition voir le début du paragraphe 2) associée au coin m, que l'on note D^m, joue un rôle important dans cet étude. En d'autres termes, l'existence de K est liée à l'étude de l'ensemble $D^m(\gamma_i)$ (l'image de γ_i par D^m) et à son invariance par G_{i+1}. Quand le coin m est linéarisable non résonnant, on montre que la densité des orbites dans les secteurs de $(\mathbb{C},0)-\gamma_i$ et $(\mathbb{C},0)-\gamma_{i+1}$ et la description des ensembles $D^m(\gamma_i)$ et $D^m(\gamma_{i+1})$ sont suffisants pour assurer que le recollement n'est pas possible et que la préservation sera possible dès que G_{i+1} est abélien. Pour aborder le cas où le coin est résonnant holomorphiquement normalisable, on utilise les formes normales [6] associées aux équations différentielles résonnantes et aux champs de vecteurs holomorphes dans $(\mathbb{C},0)$. Dans ce cas, il est bien connu [6] que, dans un bon système de coordonnées centrées en m, les deux difféomorphismes d'holonomie sont, quitte à multiplier par une constante, plongés (séparément) dans des groupes à un paramètre de formes normales de champs de vecteurs dans $(\mathbb{C},0)$. En utilisant l'invariance des séparatrices de Nakai par les flots réels de ces champs de vecteurs et la correspondance entre les courbes intégrales de ces champs des vecteurs par la transformation de Dulac, on montre que la condition de recollement n'est pas possible et que la condition de préservation de l'ensemble invariant est possible dès que le groupe G_{i+1} est abélien.

On peut résumer les résultats obtenus dans les théorèmes suivants :

Théorème 1.- *Supposons que G_i et G_{i+1} sont non résolubles avec séparatrices γ_i et γ_{i+1}, respectivement. S'il existe un ensemble K au voisinage de $D_i \cup D_{i+1}$ invariant par $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ tel que $K_{|D_i} = K_i$ et $K_{|D_{i+1}} = K_{i+1}$, alors le coin m est résonnant linéarisable.*

Théorème 2.- *Supposons que G_i est non résoluble avec séparatrice de Nakai γ_i. S'il existe un ensemble K au voisinage de $D_i \cup D_{i+1}$ invariant par $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ tel que $K_{|D_i} = K_i$, alors le groupe d'holonomie projective G_{i+1} est abélien ou bien le coin m est résonnant linéarisable.*

Remarque.- L'existence de séparatrices pour un sous-groupe de $Diff(\mathbb{C},0)$ peut aussi se présenter dans le cas résoluble. Par exemple, un sous-groupe de $Diff(\mathbb{C},0)$ dont tous les éléments sont a coefficients réels possède toujours une séparatrice (voir [5] et [9] pour des autres exemples). Alors, l'existence des ensembles invariants fermés est possible pour des feuilletages holomorphes singuliers portant des diviseurs à holonomie résoluble. En particulier, dans le cas où $\mathcal{F}_\omega$ se désingularise au bout d'un éclatement avec trois singularités $m_j, j = 1,2,3$, linéarisables et tel que le groupe d'holonomie G soit à coefficients réels, l'ensemble invariant produit par la saturation de l'axe réel est, au voisinage de chaque singularité m_j, une feuille d'un unique feuilletage singulier réel (de codimension réelle 1) $\widetilde{\mathcal{F}_j}$ contenant les feuilles locales de $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$, $j = 1,2,3$. De plus, si G n'est pas abélien, ces feuilletages définissent, sur une transversale au diviseur $\pi^{-1}(0,0)$ où on calcule G, un 3-tissu W analytique réel singulier le long l'axe réel. D'après [4] (voir [3]), la résolubilité du groupe G est caractérisée par l'hexagonalité du 3-tissu W.

Cet travail comporte trois parties. Dans les paragraphes 2 et 3 nous donnons, respectivement, les démonstrations des théorèmes 1 et 2.

Je remercie le professeur Dominique Cerveau pour avoir dirigé mon travail de recherche sur ce sujet. Je remercie le referee pour toutes les remarques et suggestions à la redaction de l'article.

2 Démonstration du théorème 1

Il s'agit d'étudier le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ au voisinage de la singularité m. Soient Σ_i et Σ_{i+1} des sections transversales à $D_i - Sing(\widetilde{\mathcal{F}_\omega})$ et $D_{i+1} - Sing(\widetilde{\mathcal{F}_\omega})$, où on calcule G_i et G_{i+1}, respectivement. Soit U_m un voisinage adapté de m, c'est à dire, un voisinage simplement connexe de m contenant Σ_i et Σ_{i+1} mais ne contenant pas d'autres singularités de $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$. On note par $D^m : \Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_{i+1}$ la correspondance de Dulac associée au coin m. Nous rappelons que deux points p et q, $p \in \Sigma_i$ et $q \in \Sigma_{i+1}$, sont en correspondance par D^m, s'il existe une feuille $\mathcal{L}$ de $\widetilde{\mathcal{F}_\omega} \mid U_m$ telle que $p, q \in \mathcal{L}$; où $\widetilde{\mathcal{F}_\omega} \mid U_m$ denote la restriction du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ au voisinage U_m.

Soient $\gamma_i \subset \Sigma_i$ et $\gamma_{i+1} \subset \Sigma_{i+1}$ les séparatrices de Nakaï de G_i et G_{i+1}, respectivement. De la densité des orbites dans les secteurs de $\Sigma_i - \gamma_i$ et $\Sigma_{i+1} - \gamma_{i+1}$, on déduit qu' une condition nécessaire et suffisante pour le recollement de K_i et K_{i+1} est : γ_i et γ_{i+1} sont en correspondance par D^m. On procédera cas par cas suivant la nature de la singularité m :

2.1 Le cas où m est une singularité linéarisable non résonnante

Comme m est linéarisable, il existe des coordonnées (x, y), au voisinage de m, telles que $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ est donné localement et à unité près par l'équation différentielle

$$\omega_m = xdy - \lambda ydx = 0$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Sur la transversale Σ_i le difféomorphisme d'holonomie est donné par l'homothétie $h(y) = e^{2\pi i\lambda}y$. Puisque γ_i est une séparatrice de G_i on a nécessairement : $\lambda = \frac{p}{q} + i\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p.g.c.d(p, q) = 1$. Considérons γ une branche de γ_i, avec $0 \in \gamma$. Alors $h^q(\gamma) \subset \gamma$, car $h^q(\gamma) \subset \gamma_i$ et $\alpha^q \in \mathbb{R}$. Donc γ **est** contenu dans une droite réelle.

Maintenant, il est facile de vérifier [3] que le saturé de γ par $\widetilde{\mathcal{F}_\omega} \mid U_m$ (quitte à rétrécir U_m on peut supposer que $(x, y) \in U_m$) coupe la transversale Σ_{i+1}, soit en un nombre fini de spirales, soit en une infinité de cercles s'accumulant à l'origine de Σ_{i+1}. Donc $D^m(\gamma)$ n'est pas une courbe lisse en $0 \in \Sigma_{i+1}$. Notamment, le saturé de γ rencontre les secteurs de Nakaï de G_{i+1}, i.e., le passage du coin m transforme l'ensemble invariant K_i (resp. K_{i+1}) en un ensemble plus "gros" invariant par $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$. Ceci montre que le recollement des ensembles invariants K_i et K_{i+1} avec la propriété souhaitée est impossible.

2.2 Le cas où m est une singularité résonnante linéarisable

Alors, il existe des coordonnées (x, y) telles que $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ s'exprime localement et à unité près par l'équation de Pfaff

$$\omega_m = qxdy + pydx = 0$$

où $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p.g.c.d(p, q) = 1$. Dans ces coordonnées $f(x, y) = x^p y^q$ est une intégrale première locale. Les difféomorphismes d'holonomie projective sur Σ_i et Σ_{i+1} sont , respectivement, les rotations périodiques :

$$h(y) = e^{-2\pi i \frac{p}{q}} y \ , \ g(x) = e^{-2\pi i \frac{q}{p}} x$$

D'après le théorème de Nakaï, il existe des coordonnées z et w dans Σ_i et Σ_{i+1}, respectivement, et des entiers k_1, $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\gamma_i = \{z : \ z^{k_1} \in \mathbb{R}\} \text{ et } \gamma_{i+1} = \{w : \ w^{k_2} \in \mathbb{R}\}$$

En particulier, q divise k_1 et p divise k_2. Soit φ le difféomorphisme qui redresse les branches de γ_{i+1}. Il résulte donc du théorème de Nakaï que φ est de la forme $\varphi(x) = x\varphi_1(x^p)$, où $\varphi_1 \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ est à coefficients réels (i.e., φ commute avec h). Alors quitte à faire agir le difféomorphisme global $\psi(x, y) = (\varphi(x), y(\varphi_1(x^p))^{-p/q})$, on peut supposer que l'intégrale première est $x^p y^q$ et $\gamma_{i+1} = \{x : x^{pr} \in \mathbb{R}\}$ sur Σ_{i+1}, avec $r \in \mathbb{N}^*$. On peut maintenant faire transiter γ_{i+1} par D^m. Il est facile de voir que $D^m(\gamma_{i+1})$ est constitué d'un nombre fini de droites dans Σ_i. Le recollement de K_i et K_{i+1} sera possible si les branches de γ_i sont précisément les droites définies par $D^m(\gamma_{i+1})$ sur Σ_i.

2.3 Le cas où m est une singularité résonnante holomorphiquement normalisable non linéarisable.

Nous devons montrer que la désingularisation de $\mathcal{F}_\omega$ ne peut pas comporter deux diviseurs consécutifs dont les groupes d'holonomie projectives sont non résolubles avec des séparatrices au sens de Nakaï et le passage de coin holomorphiquement normalisable. Pour cela, nous aurons besoin des lemmes suivants concernant les difféomorphismes tangents à l'identité de $(\mathbb{C}, 0)$ et les champs de vecteurs de $(\mathbb{C}, 0)$.

Soit $\widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ le groupe des difféomorphismes formels de $(\mathbb{C}, 0)$. On note par $\widehat{D}$ le sous-groupe de $\widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ des difféomorphismes formels tangents à l'identité et $\widehat{\Lambda}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels de $(\mathbb{C}, 0)$ 1-plat à l'origine :

$$\widehat{D} = \{f \in \widehat{Diff}(\mathbb{C}, 0)/f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\}$$

$$\widehat{\Lambda} = \{X/X = \eta(z)\frac{\partial}{\partial z}, \ \eta \in \mathbb{C}[[z]] \text{ et } \eta(0) = \eta'(0) = 0\}$$

Soit $X \in \widehat{\Lambda}$. On note $\exp(t.X)$ le groupe à 1-paramètre formel associé à l'équation différentielle $z' = X(z)$, avec condition initiale $z(0) = z$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on note par $X_{k,\lambda}$ le champ de vecteurs dans $\widehat{\Lambda}$ défini par $X_{k,\lambda} = 2\pi i \frac{z^{k+1}}{1+\lambda z^k} \frac{\partial}{\partial z}$, appelée *forme normale* (voir [6]) et par $g_{k,\lambda}$ le difféomorphisme de $\widehat{D}$ donné par $g_{k,\lambda}$=exp$(X_{k,\lambda})$=exp$(1.X_{k,\lambda})$.

Lemme 1.

(i) Soient $f \in \widehat{D}$ *et* $X \in \widehat{\Lambda}$ *tels que* $f = \exp(X) = \exp(1.X)$. *Si* γ *est une courbe analytique réelle lisse invariante par* f *alors,* $\exp(t.X)(\gamma) \subset \gamma$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $p, q, k \in \mathbb{N}$ *et p.g.c.d(p,q)=1. Si* $g = e^{2\pi i \frac{p}{q}} g_{qk,\lambda\frac{q}{p}}$ *et* η *est une courbe analytique réelle lisse invariante par* g^q, *alors* η *est invariante par* $g_{qk,\lambda\frac{q}{p}}$.

La démonstration du lemme 1 est facile. On pourra en trouver les détails dans [3].

Maintenant considérons le champ de vecteurs $X_{1,\lambda}$ et notons F le feuilletage réel défini par le champ de vecteurs $Re(X_{1,\lambda})$, où $Re(X_{1,\lambda})$ est le champ réel dont le flot coïncide avec le flot réel de $X_{1,\lambda}$. Dans ces conditions on a le

Lemme 2.- Le feuilletage F *vérifie l'une des conditions suivantes :*

(i) Si $Re\lambda = 0$, *le feuilletage* F *a une infinité des séparatrices analytiques lisses.*

(ii) Si $Re\lambda \neq 0$, *le feuilletage* F *n'a pas de séparatrice analytique lisse.*

Preuve du lemme 2.- On pose $z = x + yi$ et $\lambda = a + bi$. Alors, le champ $Re(X_{1,\lambda})$ s'écrit, à unité près :

$$((x^2-y^2)(ax+by)-2xy(1+ax-by))\frac{\partial}{\partial x}+((x^2-y^2)(1+ax-by)+2xy(ax+by))\frac{\partial}{\partial y}$$

Soit ϖ la forme différentielle duale du champ $Re(X_{1,\lambda})$. Le cône tangent C_ϖ réel de ϖ s' écrit :

$$C_\varpi = \{(x, y) : x(x^2 + y^2) = 0\} = (x = 0)$$

Éclatons $\mathbb{R}^2$ à l'origine et notons E le morphisme d'éclatement. Dans la carte $x = sy$, sur $(y = 0)$, le point $(0, 0)$ est la seule singularité de l'éclaté divisé $\frac{E^*\varpi}{y^2}$ de ϖ, i.e.,

$$\frac{E^*\varpi}{y^2} = yds - (ay + s)dy + ...$$

D'après le théorème de linéarisation de Poincaré, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la 1-forme $\frac{E^*\varpi}{y^2}$ est analytiquement conjugué à sa partie linéaire, d'où les conditions du lemme.

Retournons à notre problème. Puisque la singularité m est holomorphiquement normalisable, il existe des coordonnées analytiques (x, y) telles que $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ s'exprime, dans une voisinage adaptée U_m de m, par sa forme normale (voir [6]) :

$$\omega_{\frac{p}{q},k,\lambda} = p(1 + (\lambda - 1)\mu^k)ydx + q(1 + \lambda\mu^k)xdy = 0$$

où $\mu = x^p y^q$ et $p.g.c.d(p, q) = 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Les holonomies des variétés invariantes $(y = 0)$ et $(x = 0)$ sont, respectivement, les difféomorphismes analytiques résonnants à l'origine :

$$g = e^{-2\pi i\frac{p}{q}} g_{qk,\lambda\frac{q}{p}} \;\text{ et }\; h = e^{-2\pi i\frac{q}{p}} g_{pk,(\lambda-1)\frac{p}{q}}$$

Tout d'abord nous allons traiter le cas où $k = \ p = q = 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Le cas général résultera de celui-ci en prenant des revêtements ramifies et des homothéties adéquates :

(i) $k = 1,\ p = q = 1,\ \lambda \in \mathbb{C}$. Dans ce cas les holonomies sont données par :

$$g(y) = g_{1,\lambda}(y) = \exp(X_{1,\lambda}).y \ \text{ et } \ h(x) = g_{1,\lambda-1}(x) = \exp(X_{1,\lambda-1}).x$$

où $X_{1,\lambda} = 2\pi i \frac{y^2}{1+\lambda y}\frac{\partial}{\partial y}$ et $X_{1,\lambda-1} = 2\pi i \frac{y^2}{1+(\lambda-1)y}\frac{\partial}{\partial x}$. Donc d'après les lemmes 1 et 2, l'existence de séparatrices de Nakaï pour G_i et G_{i+1} impliquent nécessairement que $Re\lambda = Re(\lambda - 1) = 0$. Cette relation qui est évidemment impossible. Autrement dit, le recollement des ensembles K_i et K_{i+1} ne se pose pas.

(ii) $k, p, q \in \mathbb{N}^*$, $p.g.c.d(p, q) = 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme les homothéties $y \to e^{-2\pi i \frac{p}{q}} y$ et $x \to e^{-2\pi i \frac{q}{p}} x$ commutent avec $g_{kq,\lambda\frac{q}{p}}$ et $g_{kp,(\lambda-1)\frac{p}{q}}$, respectivement, on obtient

$$g^q = g^q_{kq,\lambda\frac{q}{p}} = \exp(q.X_{kq,\lambda\frac{q}{p}}) = \exp(1.qX_{kq,\lambda\frac{q}{p}})$$

et

$$h^q = g^p_{kp,(\lambda-1)\frac{p}{q}} = \exp(p.X_{kp,(\lambda-1)\frac{p}{q}}) = \exp(1.pX_{kp,(\lambda-1)\frac{p}{q}})$$

Considérons les champs de vecteurs $\overline{X} = qX_{kq,\lambda\frac{q}{p}}$ et $\overline{Y} = pX_{kp,(\lambda-1)\frac{p}{q}}$. On constate que le champ $\overline{X}$ se projette par le revêtement ramifié $y \to y^{kq}$ en le champ $kq^2.X_{1,\lambda\frac{q}{p}} = 2\pi i k q^2 \frac{y^2}{1+\lambda\frac{q}{p}y}\frac{\partial}{\partial y}$ et puis en la forme normale $X_{1,\frac{\lambda}{pqk}}$ via l'homothétie $y \to kq^2 y$. Le même argument montre que le champ $\overline{Y}$ se transforme en la forme normale $X_{1,\frac{\lambda-1}{pqk}}$ en appliquant successivement le revêtement ramifié $x \to x^{kp}$ et l'homothétie $x \to kp^2 x$. Or, il est facile de se convaincre que les champs $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ possèdent des séparatrices analytiques réelles lisses (i.e., invariantes par le flot réel) si et seulement si les champs $X_{1,\frac{\lambda}{pqk}}$ et $X_{1,\frac{\lambda-1}{pqk}}$ en possèdent. D'après les lemmes 1 et 2, la condition d'existence de séparatrices pour les groupes G_i et G_{i+1} implique nécessairement que $Re(\lambda) = Re(\lambda - 1) = 0$, ce qui n'est pas possible. C'est-à-dire, le recollement des ensembles K_i et K_{i+1} n'a pas lieu.

Il nous reste à prouver le théorème dans le cas où la singularité m est formellement normalisable. Dans ce cas on déduit, de l'incompatibilité de la relation $Re(\lambda) = Re(\lambda - 1) = 0$, que l'un des deux difféomorphismes d'holonomie n'a pas de séparatrice formelle. En particulier, l'une de deux holonomie ne possède pas de séparatrice convergente. Sous ces conditions, le recollement des ensembles invariants associés à deux projectifs consécutifs n'est pas possible.

3 Démonstration du théorème 2

On reprend les notations introduites dans la section 2. La démonstration se fait cas par cas suivant la nature de la singularité m :

3.1 Le cas où m est une singularité linéarisable non résonnante

Soit K_i l'ensemble invariant au voisinage de D_i défini par la séparatrice γ_i. D'abord nous allons considérer le cas : $\gamma_i \subset \Sigma_i$ possède une seule branche γ. Quitte à choisir correctement les coordonnées, on peut supposer que γ est précisément l'axe réel dans Σ_i. Ainsi, dans un voisinage U_m adaptée de m contenant les transversales Σ_i et Σ_{i+1}, $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ est donné par l'équation différentielle

$$\omega_m = xdy - \lambda ydx = 0$$

avec $\lambda = k + \mu i,\ k \in \mathbb{Z} \cup \left\{\frac{2q+1}{2}/q \in \mathbb{Z}\right\}$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$. Ici deux cas se présentent selon la valeur de k :

i) $k = 0$: On sait que $D^m(\gamma) = K_i \cap \Sigma_{i+1}$ est constitué par une infinité de cercles dans Σ_{i+1}. Pour que l'ensemble invariant soit préservé après le passage du coin, il faut et il suffit que $D^m(\gamma)$ soit invariant par G_{i+1}. Autrement dit, chaque $g \in G_{i+1}$ doit laisser invariant $K_i \cap \Sigma_{i+1}$. D'après le principe du maximum, pour chaque g il existe des nombres réels ρ, θ avec $\rho > 0$ tels que $g(y) = \rho e^{i\theta} y$. Ce qui montre que G_{i+1} est nécessairement linéarisable.

ii) $k \neq 0$: Dans ce cas $D^m(\gamma)$ est constitué par un nombre fini de spirales qui s'accumulent à l'origine de Σ_{i+1}. Or, la condition de préservation de l'ensemble invariant signifie que chaque $g \in G_{i+1}$ doit laisser invariant $D^m(\gamma)$. Par ailleurs, toute spirale de $D^m(\gamma)$ dans Σ_{i+1} se paramétrise par $s \to \alpha e^{2\pi n(\mu+ik)} \beta^s$, où $s \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$(fixes) et les $n \in \mathbb{N}$ sont bien déterminés (voir [3]). Les lemmes élémentaires suivants, dont on pourra trouver les demonstrations dans [3], montrent que le groupe G_{i+1} est abélien :

Lemme 3.- Si $f \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ est tangent à l'identité et S est une spirale paramétrée par $s \to z_0 \beta^s$, où $z_0, \beta \in \mathbb{C}^*$sont fixés, $s \in \mathbb{R}$, tels que $f(S) \subset S$, alors $f \equiv id$.

Lemme 4.- Soient $g \in Diff(\mathbb{C}, 0)$, $g(z) = az + ...$, $a \in \mathbb{C}^*$ et S une spirale s'accumulant à l'origine paramétrée par $s \to z_0 \beta^s$ avec $z_0, \beta \in \mathbb{C}^*$ fixés, $s \in \mathbb{R}$, tels que $g(S) \subset S$. Alors il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(z) = \beta^{s_0} z$.

Remarque.- Le lemme 4 est vrai aussi dans le cas où g laisse invariantes un nombre fini de spirales. En effet, si g envoie une spirale S_1 dans une spirale S_2, alors la partie linéaire $\phi(z) = \alpha z$ de g envoie aussi S_1 dans S_2 (c'est le même raisonnement que précédemment). Par suite, le difféomorphisme tangent à l'identité $\phi^{-1} g$ envoie S_1 dans S_2 et est pourtant linéaire.

Maintenant on considère le cas où γ_i a plus d' une séparatrice, i.e., $\lambda = \frac{p}{q} + i\mu$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p.g.c.d(p, q) = 1$. Ce cas présente le même phénomène que le cas particulier $k \neq 0$ traité ci-dessus. En effet, d'après 2.1, dans les coordonnées linéarisantes les séparatrices de G_i sont des droites sur Σ_i. Soit $L \subset \Sigma_i$ l'une de ces droites. Alors $D^m(L)$ est constitué par un nombre fini de spirales. Comme chaque $g \in G_{i+1}$ doit laisser invariant $D^m(L)$ on a, d'après les lemmes 3 et 4 et la remarque, que G_{i+1} est un groupe linéarisable.

3.2 Le cas où m est une singularité résonnante

Dans ce cas on a $\lambda = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, avec $p.g.c.d(p,q) = 1$. La situation ici est un peu différent ; les coordonnées qui linéarisent le coin ne redressent pas nécessairement les séparatrices de G_i. Néanmoins, choisissons les coordonnées de façon que sur Σ_i les séparatrices de G_i soient des droites : donc $D^m(\gamma_i) \cap \Sigma_{i+1}$ est formé par un nombre fini de droites. Ainsi, la condition de préservation de l'ensemble invariant au voisinage de D_i produit par γ_i demande que G_{i+1} doit laisser invariant $D^m(\gamma_i) \cap \Sigma_{i+1}$: cette situation peut arriver par un groupe G_{i+1} (abélien ou non abélien, résoluble ou non résoluble) qui laisse invariants un nombre fini de droites. On sait que dans ce cas G_{i+1} est une ramification d'un groupe $\widetilde{G}_{i+1}$ dont les éléments sont à coefficients réels [8].

3.3 Le cas où m est une singularité résonnante holomorphiquement normalisable non linéarisable

Les notations et définitions sont celles de la section 2.3. Soient (x, y) les coordonnées au voisinage de m telles que $\widetilde{\mathcal{F}_\omega}$ est donné par :

$$\omega_{p/q,k,\lambda} = p(1 + (\lambda - 1)\mu^k)ydx + q(1 + \lambda\mu^k)xdy = 0$$

avec $\mu = x^p y^q$. Sur les transversales $(x = 1)$ et $(y = 1)$, les difféomorphismes d'holonomie s'expriment, respectivement, par :

$$g = e^{-2\pi i \frac{p}{q}} g_{qk,\lambda\frac{q}{p}} \;\text{ et }\; h = e^{-2\pi i \frac{q}{p}} g_{pk,(\lambda-1)\frac{p}{q}}$$

On distingue deux cas :

(i) $p = q = k = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Les difféomorphismes g et h prennent la forme

$$g(y) = \exp(X_{1,\lambda}).y \;\text{ et }\; h(x) = \exp(X_{1,\lambda-1}).x$$

où $X_{1,\lambda} = 2\pi i \frac{y^2}{1+\lambda y}\frac{\partial}{\partial y}$ et $X_{1,\lambda-1} = 2\pi i \frac{x^2}{1+(\lambda-1)x}\frac{\partial}{\partial x}$, respectivement. La 1-forme $\omega_{1,1,\lambda}$ admet l'intégrale première $f(x, y) = x^{1-\lambda}y^{-\lambda}e^{1/xy}$. Soient E_y et E_x les équations différentielles associées aux champs de vecteurs $X_{1,\lambda}$ et $X_{1,\lambda-1}$, respectivement :

$$y' = 2\pi i \frac{y^2}{1 + \lambda y} \;\text{ et }\; x' = 2\pi i \frac{x^2}{1 + (\lambda - 1)x}$$

On note $\alpha(x) = x^{1-\lambda}e^{1/x}$ et $\beta(y) = y^{-\lambda}e^{1/y}$ les restrictions de f sur las transversales $(y = 1)$ et $(x = 1)$, respectivement. En particulier, si $(x, 1)$ et $(1, y)$ sont en correspondance par D^m, alors $\alpha(x) = \beta(y)$. Nous aurons besoin du suivant

Lemme 5.- Soient $(x_0, 1)$ et $(1, y_0)$ deux points en correspondance par D^m. Supposons que $x_0(t)$ et $y_0(t)$ sont les courbes intégrales des champs $X_{1,\lambda-1}$ et $X_{1,\lambda}$ passant par x_0 et y_0, respectivement. Alors :

$$\alpha(x_0(t)) = \beta(y_0(t))$$

pour tout $t \in \mathbb{C}$. Autrement dit, D^m échange les courbes intégrales du champ $X_{1,\lambda}$ avec celles du champ $X_{1,\lambda-1}$ en préservant le temp t.

Démonstration du lemme 5.- En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\frac{d}{dt}((x(t)^{1-\lambda}e^{1/x(t)}) = e^{1/x(t)}x(t)^{1-\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{x(t)} - \frac{1}{(x(t))^2}\right)\frac{dx(t)}{dt}$$

Comme $x(t)$ est solution de l'équation différentielle E_x, il vient :

$$\frac{d}{dt}((x(t)^{1-\lambda}e^{1/x(t)}) = -2\pi i x(t)^{1-\lambda}e^{1/x(t)}$$

C'est à dire, $\frac{d}{dt}(\alpha \circ x)(t) = -2\pi i(\alpha \circ x)(t)$. On a ainsi $\alpha(x(t)) = e^{-2\pi i t}\alpha(x)$. Un calcul analogue montre que $\beta(y(t)) = e^{-2\pi i t}\beta(y)$. Comme les points $(x_0, 1)$ et $(1, y_0)$ sont en correspondance par D^m, on a $\alpha(x_0) = \beta(y_0)$ et ainsi

$$\alpha(x_0(t)) = e^{-2\pi i t}\alpha(x_0) = e^{-2\pi i t}\beta(y_0) = \beta(y_0(t))$$

ce qui démontre le lemme.

Considérons maintenant un élément quelconque $\psi \in G_{i+1}$: la condition de préservation de l'ensemble invariant K_i produit par γ_i au voisinage de D_i implique que $\psi(D^m(\gamma_i) \cap \Sigma_i) \subset D^m(\gamma_i) \cap \Sigma_i$. On sait que les séparatrices de G_i sont données par le flot réel du champ $X_{1,\lambda}$. D'après le lemme précédent sont échangées par l'application de Dulac D^m en un nombre fini de courbes intégrales paramétrées par le flot réel du champ $X_{1,\lambda-1}$. La condition de préservation de K_i signifie que ψ laisse invariant ce nombre fini de courbes intégrales de $X_{1,\lambda-1}$ (i.e., ψ envoie une courbe intégrale de $X_{1,\lambda-1}$ dans une courbe intégrale de $X_{1,\lambda-1}$). Alors, les champs $Re(\psi_* X_{1,\lambda-1})$ et $Re(X_{1,\lambda-1})$ ont une courbe intégrale commune S. Comme S n'est pas analytique (d'après le lemme 2), il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\psi_*\, X_{1,\lambda-1} = \alpha.X_{1,\lambda-1}$. D'après [2], il suffit de considérer les deux cas suivants :

Premier cas : $\alpha \neq 1$. On a $\lambda = 1$. Mais d'après le lemme 2 ce cas ne se présentera pas.
Deuxième cas : $\alpha = 1$. Dans ce cas, on a $\psi_*\, X_{1,\lambda-1} = X_{1,\lambda-1}$. Alors, il existe $t_\psi \in \mathbb{C}$ tel que $\psi(x) = \exp(\, t_\psi.X_{1,\lambda-1})$. Ceci montre que G_{i+1} est un groupe abélien.

(ii) $k, p, q \in \mathbb{N}$, $p.g.c.d(p, q) = 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. En appliquant la technique développée dans la section 2.3(i) et 2.3(ii) on montre que le groupe G_{i+1} est abélien.

3.4 Le cas où m est une singularité résonnante non linéarisable générale

Ce cas se déduit en fait du cas précédent 3.3. En effet, pour montrer que G_{i+1} est abélien il suffit de le montrer formellement. Or, la correspondance de Dulac formelle vérifie aussi le lemme 5, c'est à dire, D^m transporte les champs de vecteurs (ici formels) d'une transversale à l'autre. Cet argument permet de démontrer l'abélianité de G_{i+1}.

Références

[1] C. Camacho, P. Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. of Math. 115(1982), 579-595.

[2] D. Cerveau, R. Moussu, *Groupes d'automorphismes de* ($\mathbb{C}$,0) *et équations différentielles* $ydy + ... = 0$, Bull. Soc. Math. France, 116(1998), 459-488.

[3] E. Fierro, *Ensembles invariants et tissus associés aux feuilletages holomorphes singuliers dans* $\mathbb{C}^2$, Thèse Université de Rennes 1, 1996

[4] E. Fierro,*Tissus et holonomie*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330(2000), 1065-1068

[5] F. Loray, *Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble*, Thèse Université de Rennes 1, 1994.

[6] J. Martinet, P. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 16(1983), 571-621.

[7] J.-F. Mattei, R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 13(1980), 469-523.

[8] I. Nakai, *Separatrices for non solvable dynamics on* $\mathbb{C}$,0, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 44,2(1994), 569-599.

[9] E. Paul, *Formes Abéliennes, formes résolubles*, Actas del Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Singularidades, Universidad de Valladolid, 1995, 353-382.

[10] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differentiable equation Ady=Bdx*, Amer. J. Math., 1968, 248-269.

Eduardo Fierro
Universidad Católica del Norte
Departamento de Matemática
Casilla 1280, Antofagasta
Chile
e-mail : efierro@ucn.cl