Itération des polynômes dans une algèbre de Banach

A. Attioui A. Azhari M. Aamri

Abstract

Let A be a complex Banach algebra, $f : A \to A$ be a polynomial function with coefficients in A. We define the Julia set of f, denoted by J(f). We give conditions which often determine in which set, $J(f)$ or $A \setminus J(f)$, the periodic point lies. We show that the closure of repelling periodic points is not always equals the Julia set. However, we use the theorem of Gelfand-Mazur to characterize the algebras where it's true.

Introduction

Soit A une algèbre de Banach complexe commutative et unitaire. Etant donné un polynôme f, à coefficients dans A, on s'intéresse à l'étude du comportement de la suite $(f_n(x))_n$, pour un élément x de A, où f_n est la nième itérée de f. Pour cela, nous commençons par définir, dans A, l'ensemble de Julia de f, noté $J(f)$. Cette définition est analogue à celle donnée dans le plan complexe ([4], [1], [2]). Puis, nous étudions l'appartenance ou non des points périodiques attractifs et répulsifs de f à l'ensemble $J(f)$. Ces points sont définis moyennant le rayon spectral. Un contre exemple, d'un polynôme f dans une algèbre A qui n'est pas le plan complexe, montre que la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs de f n'est pas égale à $J(f)$. En fait, cette fermeture n'est à peu près jamais égale à $J(f)$, mais ce fait est plutôt unique à $\mathbb{C}$ (Théorème 5).

Received by the editors October 2001 - In revised form in June 2002.
Communicated by F. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* Primary: 46J99, Secondary: 30D05.
Key words and phrases : Itération, polynôme, point périodique, théorie spectrale.

Dans toute la suite $(A, \| \ \|)$ est une algèbre de Banach complexe commutative et unitaire, d'unité e telle que $\|e\| = 1$. On désigne par $Inv(A)$ le groupe des éléments inversibles de A et par $M(A)$ l'espace des caractères de A. Un caractère χ de $M(A)$ est un morphisme d'algèbre de A sur $\mathbb{C}$ tel que $\chi(e) = 1$. Le rayon spectral, d'un élément a de A, est le nombre $\rho(a) = \sup\{|\lambda|/\lambda \in Sp(a)\}$, où $Sp(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}/(\lambda e - a) \notin Inv(A)\}$ est le spectre de a.

On dit qu'une application f de A dans A est un polynôme de A ou une application polynomiale de A si $f(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$, quel que soit x dans A, avec $a_0, \ldots, a_d$ des constantes dans A et d dans $\mathbb{N}$. Si le nombre $\rho(a_d)$ est non nul, on dit alors que le polynôme f est de degré d et on écrit $deg(f) = d$. Dans ce cas, a_d est appelé le coefficient dominant de f. Pour tout caractère χ de A, on désigne par f^χ le polynôme complexe $f^\chi(z) = \chi(a_d)z^d + \cdots + \chi(a_1)z + \chi(a_0)$. Il est facile de voir que $deg(f) = \sup\{deg(f^\chi)/\ \chi \in M(A)\}$.

1 Ensemble de Julia d'un polynôme

Soit f une application polynomiale de A telle que $deg(f) \geqslant 2$. On définit l'ensemble de Julia de f comme étant l'ensemble $J(f) = \overline{K(f)} \setminus \overset{o}{K}(f)$, où $K(f) = \{x \in A/$ la suite $(f_n(x))_n$ est bornée $\}$.

Dans la proposition suivante, nous montrons que l'ensemble de Julia d'un polynôme ne change pas si ce polynôme est remplacé par l'une de ces itérées. Ceci va permettre de se placer dans des situations plus simples lors de l'étude de l'appartenance des points périodiques à l'ensemble de Julia.

Proposition 1. *Si f est une application polynomiale de A, de degré $d \geqslant 2$, alors $J(f_k) = J(f)$, quel que soit k dans $\mathbb{N}^*$.*

Preuve. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Par définition, pour avoir l'égalité en question, il suffit de montrer l'égalité $K(f_k) = K(f)$. L'inclusion $K(f) \subset K(f_k)$ est immédiate vu que $(f_k)_n = f_{kn}$, pour tout entier $n \geqslant 1$. Montrons que $K(f_k) \subset K(f)$. Soit x dans $K(f_k)$. Il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\|f_{kn}(x)\| \leqslant M$. Pour $n \in \mathbb{N}$, la division euclidienne permet d'écrire $n = kp + r$ avec p dans $\mathbb{N}$ et r dans $\mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant r < k$. Le polynôme f_r est degré d^r. Il s'écrit $f_r(x) = \sum_{i=0}^{d^r} a_{i,r} x^i$ avec, les $a_{i,r}$ sont dans A et indépendants de x. Donc,

$$\|f_n(x)\| = \|f_r\left(f_{kp}(x)\right)\| \leqslant \sum_{i=0}^{d^r} \|a_{i,r}\| \ \| \left(f_{kp}(x)\right)^i \| \leqslant \sum_{i=0}^{d^r} \|a_{i,r}\| M^i$$

Par suite,

$$\|f_n(x)\| \leqslant Max \left\{ \sum_{i=0}^{d^s} \|a_{i,s}\|^i M^i \ /0 \leqslant s < k \right\}$$

Il en découle que la suite $(f_n(x))_n$ est bornée. Ainsi, l'élément x est dans $K(f)$. Ce qui termine la démonstration.

Généralement, il n'est pas facile de déterminer explicitement l'ensemble de Julia d'un polynôme, même en une dimension. Cependant, en utilisant le rayon spectral, on a le résultat suivant pour un monôme.

Proposition 2. *Soit a dans A tel que $\rho(a)$ n'est pas nul. Si $f(x) = ax^d$, avec $d \in \mathbb{N}$ et $d \geqslant 2$, alors l'ensemble de Julia de f est $J(f) = \{x \in A \ / \ \rho(ax^{d-1}) = 1\}$.*

Preuve. Soit n dans $\mathbb{N}^*$, $f_n(x) = a^{\alpha_n} x^{d^n} = (ax^{d-1})^{\alpha_n} x$, où $\alpha_n = \dfrac{d^n - 1}{d-1}$. Alors, on a

$$\{x \in A/\rho(ax^{d-1}) < 1\} \subset K(f) \subset \{x \in A/\rho(ax^{d-1}) \leqslant 1\}$$

Dans cette relation, l'ensemble $K(f)$ est compris entre deux ensembles qui ont la même frontière $\{x \in A \ / \ \rho(ax^{d-1}) = 1\}$, car l'application $x \to \rho(x)$ est une semi-norme d'algèbre de A, d'où le résultat.

Si on munit A d'une autre norme équivalente à la norme $\| \ \|$, les ensembles $K(f)$, $\overline{K(f)}$ et $\overset{o}{K}(f)$ restent inchangés, il en est de même pour $J(f)$. Ceci montre que l'ensemble de Julia d'un polynôme est indépendant de la métrique choisie. Par ailleurs, l'ensemble $J(f)$ est fermé dans A, mais non nécessairement borné comme en dimension 1.

Exemple 1. *Soit (α_n) est une suite de nombres réels vérifiant $\alpha_0 = 1$, $0 < \alpha_{n+m} \leqslant \alpha_n \alpha_m$, quels que soient m et n dans $\mathbb{N}$, et telle que la suite $(\alpha_n^{1/n})$ tend vers 0. Considérons l'espace A des séries formelles*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n X^n \in \mathbb{C}[[X]] \ \textit{telles que} \ \| x \| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n| \alpha_n < +\infty \ ,$$

Alors, $(A, \| \ \|)$ est une algèbre de Banach complexe commutative unitaire qui a un seul caractère χ défini par : $\chi\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n X^n\right) = \xi_0$. D'après la proposition précédente, si $f(x) = x^2$, quel que soit x dans A, l'ensemble de Julia de f est $J(f) = \{\sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n X^n \ / \ |\xi_0| = 1\}$. Cet ensemble n'est pas borné. En effet, on considère la suite $x_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_{n,p} X^n$, où $\xi_{n,p} = \frac{p^n}{\alpha_n n!}$, pour tout p dans $\mathbb{N}$. On a alors, $\|x_p\| = e^p$ et $\rho(x_p) = 1$, quel que soit p dans $\mathbb{N}$. Ainsi, la suite $(x_p)_p$ est une suite de $J(f)$ qui n'est pas bornée.

Dans l'exemple précédent on a montré que l'ensemble de Julia du polynôme $f(x) = x^2$ n'est pas borné. En fait, on a le résultat général suivant.

Proposition 3. *Si $f(x) = x^2$, alors l'ensemble de Julia de f est borné dans A si et seulement si la semi-norme ρ est une norme équivalente à $\| \ \|$.*

Preuve. Supposons que $J(f)$ est borné et montrons que ρ est une norme équivalente à $\| \ \|$. On a toujours $\rho \leqslant \| \ \|$ et puisque A est commutative ρ est une semi-norme d'algèbre de A. Par hypothèse, il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $J(f)$ est contenu dans la boule de centre zéro et de rayon M. D'après la proposition précédente, on a $J(f) = \{x \in A/\rho(x) = 1\}$. Soit $x \in A$. Si $\rho(x) = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\| x + \varepsilon e \| \leqslant \varepsilon M$ car $(\varepsilon^{-1}x + e) \in J(f)$. Par suite, en tendant ε vers zéro, on aura $x = 0$. Si $\rho(x) > 0$, alors $\| x \| \leqslant \rho(x) M$ car $\rho(x)^{-1}x \in J(f)$. Ainsi ρ et $\| \ \|$ sont des normes équivalentes de A. La réciproque est immédiate.

Lorsque le rayon spectral et la norme sont équivalentes, d'après la proposition précédente l'ensemble de Julia du polynôme $f(x) = x^2$ est borné. Qu'en est-il alors pour l'ensemble de Julia d'un polynôme de degré $\geqslant 2$?. La réponse à cette question est donnée dans le théorème suivant. Remarquons que la commutativité est automatique dans ce cas ([3, p.76]).

Théorème 1. *Soit A une algèbre de Banach complexe et unitaire telle que le rayon spectral et la norme de A sont équivalentes. Si f est une application polynomiale de A, de degré $d \geqslant 2$ et dont le coefficient dominant est inversible dans A, alors $J(f)$ est une partie compacte de A.*

Preuve. Soit f une application polynomiale de A, $f(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_0, \ldots, a_d$ dans A, $d \geqslant 2$ et $a_d \in Inv(A)$. On a

$$K(f) = \bigcap_{\chi \in M(A)} \chi^{-1}\left(K(f^\chi)\right) \tag{1}$$

En effet, si $x \in K(f)$, alors la suite $\chi(f_n(x))_n$ est bornée, quel que soit $\chi \in M(A)$. Par ailleurs, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\chi(f_n(x)) = f_n^\chi(\chi(x))$. On en déduit que la suite $(f_n^\chi(\chi(x)))_n$ est aussi bornée. Par conséquent, on a $\chi(x) \in K(f^\chi)$, quel que soit $\chi \in M(A)$. Inversement, soit $x \in A$ tel que la suite $(f_n^\chi(\chi(x))_n$ est bornée, quel que soit $\chi \in M(A)$. Pour tout $\chi \in M(A)$, on a $deg(f^\chi) \geqslant 2$. D'après [4], $K(f^\chi)$ est une partie compacte, du plan complexe, contenue dans le disque fermé de centre zéro et de rayon R_χ, où

$$R_\chi = \sup\left(1, \frac{|\chi(a_{d-1})| + \cdots + |\chi(a_0)|}{|\chi(a_d)|}\right) \tag{2}$$

Soit $m = \inf_{\chi \in M(A)} |\chi(a_d)|$. Alors $m > 0$ car $a_d \in Inv(A)$ et $M(A)$ est faiblement compact. De la formule (2), on a alors $R_\chi \leqslant \sup\left(1, \dfrac{\rho(a_{d-1}) + \cdots + \rho(a_0)}{m}\right)$, pour tout caractére $\chi \in M(A)$. Ainsi, la quantité $R = \sup_{\chi \in M(A)} R_\chi$ est finie. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\chi \in M(A)$, $|\chi(f_n(x))| = |f_n^\chi(\chi(x))| \leqslant R_\chi$. Donc, $\rho(f_n(x)) \leqslant R$, quel que soit n dans $\mathbb{N}$. Par hypothèse, les normes ρ et $\| \ \|$ étant équivalentes, alors la suite $(f_n(x))_n$ est bornée dans A. D'où l'égalité (1). En particulier, on en déduit que $K(f)$ est fermée.

D'après le théorème de Gelfand, on sait qu'une algèbre de Banach, dans laquelle le rayon spectral et la norme sont équivalentes, est, à une norme équivalente près, une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach de fonctions continues complexes sur l'espace compact $M(A)$ ([3]). En regardant A comme un sous-espace de l'espace produit $\mathbb{C}^{M(A)}$, on a

$$K(f) \subset \prod_{\chi \in M(A)} K(f^\chi) \tag{3}$$

D'après le théorème de Tikhonov, le produit $\prod_{\chi \in M(A)} K(f^\chi)$ est un compact, et puisque $K(f)$ est fermé, on déduit de l'inclusion (3) qu'il est compact. Finalement, $J(f)$ est aussi compact.

Soit f un polynôme de A, avec $deg(f) \geqslant 2$, mais $deg(f^\chi) \leqslant 1$, pour un certain $\chi \in M(A)$. Dans ce cas, le coefficient dominant de f n'est pas inversible. Il se peut que $J(f)$ ne soit pas borné comme il peut être vide. On va donner un exemple qui sera utile dans la suite. Ceci montre que le théorème précédent tombe en défaut si cette hypothèse est omise.

Exemple 2. *Soit $A = \mathcal{C}(I)$, avec $I = [0,1]$, l'algèbre de Banach complexe commutative et unitaire des fonctions complexes continues sur I, munie de la norme uniforme. Soit α un réel fixé de $]0,1[$. On considère les éléments a et b de A définis sur I par :*

$$t \mapsto a(t) = \begin{cases} 0 & sur \quad [0,\alpha] \\ \alpha^2(t-\alpha) & sur \quad [\alpha,1] \end{cases} \qquad et \quad t \mapsto b(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha - t}{\alpha^2} & sur \quad [0,\alpha] \\ 0 & sur \quad [\alpha,1] \end{cases}$$

Si $f(x) = ax^2 + bx$, quel que soit $x \in A$, alors f est une application polynomiale de degré 2, car $\rho(a) = \|a\| > 0$. Il est clair que le coefficient dominant de f n'est pas inversible. Montrons que l'ensemble de Julia de f n'est pas borné. Nous allons commencer par déterminer l'ensemble $K(f)$. Du fait que $ab = 0$, on calcul facilement les itérées de f. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in A$, $f_n(x) = a^{2^n-1}x^{2^n} + b^n x$. D'autre part, on a :

$$\|f_n(x)\| = \sup \left(\sup_{t\in[0,\alpha]} |b^n x(t)| \ , \ \sup_{t\in[\alpha,1]} |a^{2^n-1}x^{2^n}(t)| \right) \tag{4}$$

Donc, $x \in K(f)$ si et seulement si les deux suites, de la formule (4), sont bornées. D'après les définitions de a et b, on doit avoir x nulle sur $[0,\alpha(1-\alpha)[$, x quelconque sur $[\alpha(1-\alpha),\alpha]$, $|a(t)x(t)| \leqslant 1$ sur $]\alpha,1]$ et x continue sur $[0,1]$. En d'autres termes, l'application $x \in A$, et $x = (x(t))_{t\in I} \in \{0\}^{[0,\alpha(1-\alpha)[} \times \mathbb{C}^{[\alpha(1-\alpha),\alpha]} \times \prod_{t\in]\alpha,1]} D\left(1/a(t)\right)$, où $D(r) = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leqslant r\}$. Ainsi, on a explicitement l'ensemble $K(f)$. Montrons qu'il n'est pas borné. Pour cela, on considère la suite $(x_p)_p$ de A, telle que pour tout p de $\mathbb{N}$, l'application x_p est nulle sur $[0,\alpha(1-\alpha)[\cup]\alpha,1]$, $x_p\left(\alpha(2-\alpha)/2\right) = p$, et x_p linéaire sur $[\alpha(1-\alpha),\alpha(2-\alpha)/2]$ et sur $[\alpha(2-\alpha)/2,\alpha]$. Alors, la suite $(x_p)_p$ est dans $K(f)$ et $\|x_p\| = p$. Ainsi, l'ensemble $K(f)$ n'est pas borné. Pour $x \in K(f)$, et pour un p entier assez grand, on considère l'élément x_p de A tel que x_p nulle sur $[0,\alpha(1-\alpha)-1/p]$, x_p linéaire sur $[\alpha(1-\alpha)-1/p,\alpha(1-\alpha)-2/p]$ et sur $[\alpha(1-\alpha)-2/p,\alpha(1-\alpha)]$, avec $x_p(\alpha(1-\alpha)-1/2p) = 1/p$ et $x_p = x$ sur $[\alpha(1-\alpha),1]$. Alors, $x_p \notin K(f)$ et $\|x_p - x\| = \frac{1}{p}$. Ainsi, $K(f) \subset \overline{A \setminus K(f)}$. Puisqu'en plus $K(f)$ est fermé par la formule (1). Il en résulte que $J(f) = K(f)$. Donc $J(f)$ est aussi n'est pas borné.

Exemple 3. *Toujours dans l'algèbre $\mathcal{C}(I)$, soit un polynôme $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, de degré $d \geqslant 2$, tel qu'il existe $t \in I$ avec $deg(f^t) = 1$. Alors $K(f)$ peut être vide. C'est le cas, par exemple, si $a_1(t) = 1$ et $a_0(t) \neq 0$. En effet, on a $f^t(z) = z + a_0(t)$, quel que soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, la nième itérée de f^t est le polynôme complexe $f^t_n(z) = z + na_0(t)$. Donc, la suite $(f^t_n((z))_n$ n'est pas bornée quel que soit z dans $\mathbb{C}$. Il s'ensuit que l'ensemble $K(f^t)$ est vide. D'après l'égalité (1), l'ensemble $K(f)$ est vide. Par conséquent, $J(f)$ l'est aussi.*

2 Points périodiques

Soit $x \to f(x) = a_d x^d + \cdots + a_0$ une application polynomiale de A dans A, de degré $d \geqslant 2$. Puisque A est unitaire, la dérivée de f en un point, $x \in A$, s'identifie à l'élément $f'(x) = da_d x^{d-1} + \cdots + a_1$ de A. Un point fixe a, de f, est dit attractif si $\rho(f'(a)) < 1$. Il est dit répulsif si $\rho(f'(a)) > 1$. On dit que a est un point k-périodique, avec k dans $\mathbb{N}^*$, si k est le plus petit entier tel que $f_k(a) = a$. On définit de même les points k-périodique attractifs et répulsifs comme des points fixes de f_k. On dénote par $f_k'(x)$ la dérivée de f_k en x.

Dans le but d'étudier le lien entre les points périodiques et l'ensemble de Julia. Nous allons commencer par le lemme suivant qui sera utile dans la suite.

Lemme 1. *Soit f une application polynomiale de A dans A, de degré $d \geqslant 2$, et soit a un point fixe de f. Si a est un point intérieur à $K(f)$, alors $\chi(a)$ est un point intérieur à $K(f^\chi)$, quel que soit χ dans $M(A)$. En outre, on a $\rho(f'(a)) \leqslant 1$.*

Preuve. Soit χ dans $M(A)$. Si $a \in \overset{o}{K}(f)$, alors, par le théorème de l'application ouverte, le point $\chi(a)$ est intérieur à $\chi\left(K(f)\right)$. Or, on a toujours $\chi\left(K(f)\right) \subset K(f^\chi)$, d'où la première partie du lemme. D'après ([1]), si $deg(f^\chi) \geqslant 2$, $|(f^\chi)'(\chi(a))| \leqslant 1$. Par ailleurs, $\chi(f'(a)) = (f^\chi)'(\chi(a))$. Donc, $|\chi(f'(a))| \leqslant 1$. Si $deg(f^\chi) \leqslant 1$, il y a deux cas, ou bien f^χ est un polynôme constant, ce qui donne $\chi(f'(a)) = 0$, ou bien f^χ est un polynôme de degré un. Dans ce cas, $|\chi(f'(a))| \leqslant 1$. Sinon, $K(f^\chi)$ serait d'intérieur vide. Finalement, $|\chi(f'(a))| \leqslant 1$, quel que soit χ dans $M(A)$, d'où le lemme.

Théorème 2. *Soit f un polynôme de A, avec $deg(f) \geqslant 2$. Si a est un point périodique attractif de f, alors $a \in A \setminus J(f)$.*

Preuve. D'après la proposition 1, on peut supposer que a est un point fixe attractif de f. Quitte à prendre $g(x) = f(x+a)-a$, on peut se ramener à $a = 0$. Par hypothèse, on a $f(0) = 0$ et $\rho(b) < 1$, où $b = f'(0)$. Donc, $0 \in K(f)$. Montrons que 0 est un point intérieur à $K(f)$. Soient α et β deux réels tels que $\rho(b) < \alpha < \beta < 1$. Il existe un entier p tel que $\|b^p\| < \alpha^p$. Par suite, il existe un réel $r > 0$ tel que $\|f_p(x)\| \leqslant \alpha^p \|x\|$, pour $\|x\| < r$. Soit n dans $\mathbb{N}$, $n = qp + m$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant m \leqslant p-1$. Puisque $f_n(x) = f_m(f_{qp}(x))$, on a alors $\|f_n(x)\| \leqslant C\|f_{qp}(x)\| \leqslant \alpha^{qp}\|x\|$, pour $\|x\| < r$, où $C = \sup\left\{\dfrac{\|f_s(x)\|}{\|x\|} / 0 \leqslant s < p \ , \ 0 < \|x\| < r\right\}$. Donc, pour n assez grand, et $\|x\| < r$, on a : $\|f_n(x)\| \leqslant \beta^n\|x\|$. On en déduit que la suite $(f_n(x))$ tend vers 0, pour $\|x\| < r$. Alors, $B(0,r) \subset K(f)$, en d'autres termes le point fixe 0 est intérieur à $K(f)$. Il en résulte que $0 \in A \setminus J(f)$.

Théorème 3. *Soit f un polynôme de A, avec $deg(f) \geqslant 2$, tel que le coefficient dominant soit inversible. Si a est un point fixe de f tel que $Sp(f'(a))$ contient une racine de l'unité, alors $a \in J(f)$.*

Preuve. Puisque a est un point fixe de f, $a \in K(f)$. Par hypothèse, il existe $\chi \in M(A)$ tel que $\chi(f'(a))$ est une racine de l'unité. On a $\chi(f'(a)) = (f^\chi)'(\chi(a))$ et $deg(f^\chi) \geqslant 2$. Alors, d'après [1, th. 6.5.1, p.110], le point fixe $\chi(a)$ de f^χ n'est pas intérieur à $K(f^\chi)$. Il résulte du lemme 1 que $a \in J(f)$.

Théorème 4. *Tout point périodique répulsif d'un polynôme f de degré $\geqslant 2$, est dans $J(f)$.*

Preuve. La proposition 1 permet de se ramener à un point fixe répulsif a. On a donc $a \in K(f)$. L'hypothèse $\rho(f'(a)) > 1$ et le lemme 1 permettent de dire que le point a n'est pas intérieur à $K(f)$. Alors, $a \in J(f)$.

On désigne par $Rp(f)$ l'ensemble des points périodiques répulsifs d'un polynôme f de degré $\geqslant 2$. D'après le théorème 4, puisque $J(f)$ est fermé, on a $\overline{Rp(f)} \subset J(f)$. On va donner un exemple (exemple 4), où cette inclusion est stricte. Ceci montre qu'un résultat de G.Julia ([5]), à savoir $\overline{Rp(f)} = J(f)$ pour tout polynôme de degré supérieur ou égal à 2 n'est plus vrai dans une algèbre de Banach, et on constate ensuite que c'est un fait général (Théorème 5).

Exemple 4. *Dans l'algèbre $\mathcal{C}[0,1]$, on reprend le polynôme de l'exemple 2. On a $f_n(x) = a^{2^n-1}x^{2^n} + b^n x$, quels que soient n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans A. Nous allons chercher les points périodiques de f. Pour cela, nous allons résoudre, dans A, l'équation $f_n(x) = x$, pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$. Cette équation n'admet que la fonction nulle comme solution. En effet, pour $t \in [0, \alpha]$, on a*

$$f_n(x)(t) = b^n(t)x(t) = x(t)$$

Alors, si $b(t) \neq 1$, i.e $t \neq \alpha(1-\alpha)$, $x(t) = 0$ De la continuité de x, on déduit que x est nulle sur $[0, \alpha]$. Pour $t \in [\alpha, 1]$, on a

$$f_n(x)(t) = a^{2^n-1}(t)x^{2^n}(t) = x(t)$$

Si $x(t) \neq 0$, soit $]u, v[$ la composante connexe de $\{s/x(s) \neq 0\}$ contenant t. Alors, on a :

$$x(u) = x(v) = 0 \text{ et } |a(s)x(s)| = 1 \text{ sur }]u, v[$$

Ce qui est absurde avec la continuité de x en u et v, donc x est nulle sur $[\alpha, 1]$. Finalement, $x = 0$ est le seul point périodique qui est un point fixe répulsif car $f(0) = 0$ et $\rho(f'(0)) > 1$. Donc, $Rp(f) = \{0\}$. Mais dans l'exemple 2, on a vu que $J(f)$ n'est pas borné. Donc, l'inclusion de $\overline{Rp(f)}$ dans $J(f)$ est stricte.

Une question naturelle qu'on peut poser c'est quelles sont les algèbres de Banach commutatives complexes A dans lesquelles la propriété suivante est vérifiée :

$$J(f) = \overline{Rp(f)} \text{ , pour tout polynôme } f \text{ de } A \text{, de degré } 2 \text{ .} \qquad (P)$$

La réponse à cette question est donnée dans le théorème 5. Mais d'abord, commençons par le lemme suivant qui sera fort utile pour la démonstration de ce théorème.

Lemme 2. *Soit A une algèbre de Banach complexe commutative et unitaire. Si la propriété (P) est vérifiée dans A, alors a est inversible, quel que soit $a \in A$ tel que $\rho(a)$ est non nul.*

Preuve. Soit $a \in A$ tel que $\rho(a) > 0$. On peut se ramener à $\rho(a) = 1$. Pour cela, il suffit de considérer $b = \dfrac{a}{\rho(a)}$. On a alors b est inversible si et seulement si a l'est.

Si $f(x) = ax^2$, alors f est un polynôme de A de degré 2. D'après la proposition 2, $J(f) = \{x \in A/\rho(ax) = 1\}$. Donc, $e \in J(f)$, où e est l'unité de A. On déduit, de l'hypothèse (P), qu'il existe une suite (x_n) de $Rp(f)$ qui converge vers e. Il existe alors un entier $p \geqslant 1$ tel que $x_p \in Inv(A) \cap Rp(f)$, car $Inv(A)$ est ouvert. Par suite, par définition de $Rp(f)$, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $a^{2^k-1}x_p^{2^k} = x_p$. Puisque x_p est inversible, on a alors a est inversible et $a^{-1} = a^{2^k-2}x_p^{2^k-1}$.

Corollaire 1. *Soit A une algèbre de Banach complexe commutative et unitaire. Si la propriété (P) est vérifiée dans A, alors $M(A)$ est un singleton.*

/it Preuve. D'après le lemme précédent, $A \setminus Inv(A) = Rad(A)$, où $Rad(A) = \{x \in A/\rho(x) = 0\}$ est le radical de A. Mais,

$$Rad(A) = \bigcap_{\chi \in M(A)} \chi^{-1}(0)\ ,\ A \setminus Inv(A) = \bigcup_{\chi \in M(A)} \chi^{-1}(0) \tag{5}$$

puisque, les idéaux maximaux de A sont les $\chi^{-1}(0)$ pour $\chi \in M(A)$. Il s'ensuit de (5) que A a un seul caractère non nul. Donc si (P) est vérifiée dans A, $M(A)$ est un singleton.

La réciproque du ce corollaire n'est pas vraie en général. Il existe une algèbre de Banach complexe commutative et unitaire ayant un seul caractère dans laquelle la propriété (P) n'est pas vérifiée.

Exemple 5. *Il suffit de reprendre l'exemple 1. On a l'algèbre A a un seul caractère mais (P) n'est pas vérifiée dans A pour le polynôme $f(x) = x^2$. En effet, on a*

$$J(f) = \{x \in A/\rho(x) = 1\} = \{\sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n X^n / |\xi_0| = 1\}$$

On détermine les points périodiques répulsifs comme suit. On prend $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n X^n$ dans $Rp(f)$. Ce point est k-périodique et $|\xi_0| = 1$. De l'équation $x^{2^k} = x$, on déduit, en appliquant le caractère de A, que ξ_0 est une racine $2^k - 1$ de l'unité et, par récurrence, que $\xi_n = 0$, quel que soit n dans $\mathbb{N}^*$. Alors, $\overline{Rp(f)} = \mathbb{T}.e$ est borné. Par contre, on a vu que $J(f)$ n'est pas borné.

Voici maintenant une caractérisation des algèbres de Banach complexes commutatives et unitaires dans lesquelles la propriété (P) est vérifiée.

Théorème 5. *Soit A une algèbre de Banach complexe commutative et unitaire. Si la propriété (P) est vérifiée dans A, alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$.*

Preuve. D'après le corollaire précédent, l'algèbre A a un caractère unique χ. D'après la proposition 2, on sait que si $f(x) = x^2$,

$$J(f) = \{x \in A/\rho(x) = 1\} = \{x \in A/|\chi(x)| = 1\} = \overline{Rp(f)}$$

Soit $x \in Rp(f)$, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que :

$$x^{2^k} = x \text{ et } |\chi(x)| = 1 \tag{6}$$

Soit $h = x - \chi(x)e$. On déduit de la relation (6) que :

$$h^{2^k} + C^1_{2^k}\chi(x)h^{2^k-1} + \cdots + C^{2^k-2}_{2^k}\chi^{2^k-2}(x)h^2 + C^{2^k-1}_{2^k}\chi^{2^k-1}(x)h + \chi^{2^k}(x)e = h + \chi(x)e$$

Or $\chi^{2^k}(x) = \chi(x)$ et $|\chi(x)| = 1$, d'où $h^{2^k} + C^1_{2^k}\chi(x)h^{2^k-1} + \cdots + C^{2^k-2}_{2^k}\chi^{2^k-2}(x)h^2 + (2^k-1)h = 0$. Puisque $k \geqslant 1$, alors l'élément $h^{2^k-1} + C^1_{2^k}\chi(x)h^{2^k-2} + \cdots + C^{2^k-2}_{2^k}\chi^{2^k-2}(x)h + (2^k-1)e$ est inversible dans A car son image par χ est $2^k - 1 > 0$, donc $h = 0$. Finalement

$$x \in Rp(f) \text{ si et seulement si } x = \chi(x)e$$

Par continuité de χ, $J(f)$ est la sphère unité de A. De la proposition 3, on déduit que $\rho \sim \|\ \|$. D'après le lemme 2, A est un corps et le théorème de Gelfand-Mazur assure que A est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 1. *Dans le plan complexe, il est bien connu que $J(f)$ est contenu dans la fermeture des points périodiques de f (voir par exemple [2, p.109]). Le résultat correspondant dans les algèbres de Banach n'est pas vrai en général, il suffit de reprendre l'exemple* 2 *où A est l'algèbre des fonctions continues, complexes sur* $[0, 1]$, *on a vu que la fonction nulle et la seule fonction périodique par contre $J(f)$ est non borné.*

Références

[1] F. Beardon, Iteration of Rational functions. Springer Verlag, n°132 (1991).

[2] P. Blanchard, Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere, Bulletin (New series) of the Amer. Math. Soc. Vol.11, N°1, July 1984. p.85-141.

[3] F. Bonsall and J. Duncan, Complete Normed Algebras, Springer Verlag, New York, 1973, MR 54 11013.

[4] A. Douady, Systèmes dynamiques holomorphes. Séminaire Bourbaki, N°599 (1982), Astérisque, 105-106 (1983), 39-63.

[5] G. Julia, Œuvres. Vol. I, Gauthiers-Villars, Paris (1969).

Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques
B.P. 9172 Mers Sultan 20000
Casablanca, Maroc.

Université HASSAN II MOHAMMEDIA
Faculté des Sciences Ben M'Sik
Département de Mathématiques et d'Informatique
B.P.7955 Ben M'Sik
Casablanca, Maroc