Sur le spectre de Fučik avec poids

B. Bentahar A. Massghati

Abstract

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ and m_1, m_2 two functions in $L^\infty(\Omega)$. In the present work, we study a new spectrum constitued by the set of pairs (α, β) of $\mathbb{R}^2$ for which the problem

$$\begin{cases} -\triangle u &= \alpha m_1 u^+ - \beta m_2 u^- \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

has a nontrivial solution, where $u^\pm = \max(0, \pm u)$. We study then the non-resonance with respect to this spectrum in a non autonomous problem.

Résumé

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et m_1, m_2 deux fonctions de $L^\infty(\Omega)$. Dans le présent travail, nous étudions un nouveau spectre constitué par l'ensemble des couples (α, β) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels le problème

$$\begin{cases} -\triangle u &= \alpha m_1 u^+ - \beta m_2 u^- \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution non triviale, où $u^\pm = \max(0, \pm u)$. Comme application, nous étudions la non résonance par rapport à ce spectre d'un problème non autonome.

Received by the editors June 2001 - In revised form in March 2002.
Communicated by J. Mawhin.
2000 *Mathematics Subject Classification :* 35J67.
Key words and phrases : Spectre de Fučik, laplacien, point selle, degré de Leray-Schauder, non résonance.

1 Introduction

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. On considère le problème de Dirichlet

$$(P_1)\begin{cases} -\triangle u &= f(u)+h \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad\quad\quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $h \in L^2(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Dans le cas où $f(s) = \lambda s$, (P_1) admet une solution pour tout $h \in L^2(\Omega)$ si λ n'est pas une valeur propre de $-\Delta$. Par contre si λ est une valeur propre de $-\Delta$, (P_1) admet une solution si et seulement si $h \in (ker(-\Delta - \lambda I))^{\perp}$. Dans le cas général, Fučik ([6]) a constaté que le problème (P_1) est lié au problème

$$(P_2)\begin{cases} -\triangle u &= \alpha u^+ - \beta u^- \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad\quad\quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $u^{\pm} = \max(\pm u, 0)$, α et β sont respectivement les comportements de $\dfrac{f(s)}{s}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Le problème (P_2) a fait l'objet d'études de plusieurs mathématiciens. Nous citons à ce sujet les travaux de Fučik ([6]), Gallouët-Kavian ([8]), Magalhães ([10]), Micheletti ([11]), De Figueiredo-Gossez ([2]), Dràbek ([3]) et d'autres.

Dans ce papier, lorsque $m_1, m_2 \in L^{\infty}(\Omega)$, nous nous intéressons à l'étude de l'ensemble $\Sigma(m_1, m_2)$ constitué par les couples (α, β) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels le problème

$$(\tilde{P}_2)\begin{cases} -\triangle u &= \alpha m_1 u^+ - \beta m_2 u^- \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad\quad\quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution non triviale.
Dans tout ce qui suit, on note par $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ la suite des valeurs propres de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ et pour $k \neq 1$, nous désignons par λ_+ (resp λ_-) la plus petite (resp la plus grande) valeur propre de $-\Delta$ supérieure strictement (resp inférieure strictement) à λ_k . Sous les hypothèses

$$\| m_i - \frac{A+1}{2} \|_{\infty} \leq \frac{A-1}{2}, \ (i = 1, 2) \text{ et } 1 < A < \inf(\frac{\lambda_+}{\lambda_k}, \frac{\lambda_k}{\lambda_-}),$$

nous étudions la trace de $\Sigma(m_1, m_2)$ sur le carré $\Gamma = (]\lambda_-, \frac{\lambda_+}{A}[)^2$.

Lorsque λ_k est une valeur propre multiple, nous démontrons que $\Sigma(m_1, m_2)\cap\Gamma$ est délimité inférieurement et supérieurement par deux courbes continues décroissantes et que pour $m_1 = m_2 = m \in L^{\infty}(\Omega)$, nous montrons que la multiplicité de la $k^{ème}$ valeur propre du problème (P_m) : $-\Delta u = \lambda m u$ dans Ω, $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est inférieure ou égale à celle de λ_k.

Pour λ_k simple, $\Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$ est la réunion de deux courbes continues strictement décroissantes, de plus le problème spectral (P) :$-\Delta u = \lambda(m_1 u^+ - m_2 u^-)$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ admet exactement deux valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) dans $]\lambda_-, \frac{\lambda_+}{A}[$.
La monotonie et la continuité des éléments de $\Sigma(m_1, m_2)\cap\Gamma$ par rapport aux poids seront étudiées dans la sous-section 4.2, alors que dans la sous-section 4.3, (λ_k simple),

nous donnons un résultat de simplicité (au sens de la Définition 4.1) des éléments de $\Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$. Comme application, si $h \in L^2(\Omega)$ et f est une fonction de Carathéodory, nous étudions le problème non résonant, non autonome

$$(\tilde{P}_1)\begin{cases} -\triangle u &= f(x,u) + h \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

sous les hypothèses :

$H_1)$ $\quad \max_{|s|\leq\delta} |f(x,s)| \in L^2(\Omega) \ \ \forall\delta > 0,$

$H_2)$ $\quad \lim_{s\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = \gamma_+(x)$ uniformément en x,

$H_3)$ $\quad \lim_{s\longrightarrow-\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = \gamma_-(x)$ uniformément en x,

où $\gamma_+(x)$ et $\gamma_-(x)$ sont des éléments de $L^\infty(\Omega)$ ne touchant pas $\Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$.

2 Résultats préliminaires

On muni $H^1_0(\Omega)$ du produit scalaire $< u, v >= \int_\Omega \nabla u \nabla v$ et de la norme associée $\| u \|= (\int_\Omega |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$. Soient $\{\phi_i / i \in \mathbb{N}^*\}$ une base orthonormée formée des fonctions propres de $-\Delta$, $(-\Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i)$ et $B(\frac{A+1}{2}, \frac{A-1}{2})$ la boule ouverte dans $L^\infty(\Omega)$ de centre $\frac{A+1}{2}$ et de rayon $\frac{A-1}{2}$. Si l'on pose $B = (B(\frac{A+1}{2}, \frac{A-1}{2}))^2$, nous remarquons que $\bar{B} = (\{m \in L^\infty(\Omega)/1 \leq m(x) \leq A \ p.p \ x \in \Omega\})^2$.
On définit les fonctionnelles F, g, I par :
$F : \Gamma \times \bar{B} \times \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(\alpha, \beta, m_1, m_2, x, s) = \frac{\alpha}{2} m_1(x)(s^+)^2 + \frac{\beta}{2} m_2(x)(s^-)^2$,
$g : \Gamma \times \bar{B} \times \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(\alpha, \beta, m_1, m_2, x, s) = \alpha m_1(x)s^+ - \beta m_2(x)s^-$,
$I : \Gamma \times \bar{B} \times H^1_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, $I(\alpha, \beta, m_1, m_2, u) = \frac{1}{2}\| u \|^2 - \int_\Omega F(\alpha, \beta, m_1, m_2, x, u(x))dx$,
$W_1 =< \phi_1, ...\phi_{k-1} >$, $W_2 =< \phi_{k+p}, ... >$, $V =< \phi_k, ...\phi_{k+p-1} >= Ker(-\Delta - \lambda_k I)$ et $W = W_1 \bigoplus W_2$, où p la multiplicité de λ_k.
Dans toute la suite, s'il n'y a pas de confusion, on note par $\tilde{v}$ l'élément $(\alpha, \beta, m_1, m_2, v)$ de $\Gamma \times B \times V$. Il est clair que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Gamma \times B \times H^1_0(\Omega)$ et le gradient de I en u est $\nabla I(\alpha, \beta, m_1, m_2, u(.)) = u(.) - Kg(\alpha, \beta, m_1, m_2, ., u(.))$, où K est l'application de $L^2(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$ définie par

$$< K(u), v >= \int_\Omega uv, \ \forall (u, v) \in L^2(\Omega) \times H^1_0(\Omega). \tag{2.1}$$

Pour chaque $u \in H^1_0(\Omega)$, $\nabla I(u)$ se décompose de manière unique sous la forme $\nabla I(u) = D_1 I(u) + D_2 I(u) + D_3 I(u)$, où $D_1 I(u) \in W_1$, $D_2 I(u) \in W_2$ et $D_3 I(u) \in V$.

Proposition 2.1. *Il existe une application continue $\theta : \Gamma \times \bar{B} \times V \longrightarrow W$ qui jouit des propriétés suivantes :*
i) Si $(\alpha, \beta, m_1, m_2, v) \in \Gamma \times \bar{B} \times V$, $\theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, v)$ est l'unique solution de l'équation

$$D_1 I(\alpha, \beta, m_1, m_2, v + .) + D_2 I(\alpha, \beta, m_1, m_2, v + .) = 0.$$

ii) Si on pose $J(\alpha, \beta, m_1, m_2, v) = I(\alpha, \beta, m_1, m_2, v + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, v))$ alors J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Gamma \times B \times V$ et nous avons

$$J'(\alpha, \beta, m_1, m_2, v) = \frac{\partial I}{\partial \tilde{v}}(\alpha, \beta, m_1, m_2, v + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, v)).$$

Lemme 2.1. *Pour tout* $(\alpha,\beta,m_1,m_2)\in\Gamma\times\bar{B}$, *il existe* $\mu>0$ *tel que*

$$w_1\longmapsto -D_1I(\alpha,\beta,m_1,m_2,v+w_1+w_2)\ \textit{est}\ \mu-\textit{monotone},\ \forall(v,w_2)\in V\times W_2,$$

$$w_2\longmapsto D_2I(\alpha,\beta,m_1,m_2,v+w_1+w_2)\ \textit{est}\ \mu-\textit{monotone},\ \forall(v,w_1)\in V\times W_1.$$

Preuve. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\beta\leq\alpha$. Comme $\beta(s-t)^2\leq(g(x,s)-g(x,t))(s-t)\leq\alpha A(s-t)^2$ $p.p\ x\in\Omega,\forall(s,t)\in\mathbb{R}^2$, il est facile de voir que

$$< D_2I(v+w_1+w_2)-D_2I(v+w_1+\tilde{w}_2),w_2-\tilde{w}_2>\geq(1-\frac{A\alpha}{\lambda_+})\|\ w_2-\tilde{w}_2\ \|^2,$$

$$< -D_1I(v+w_1+w_2)+D_1I(v+\tilde{w}_1+w_2),w_1-\tilde{w}_1>\geq(\frac{\beta}{\lambda_-}-1)\|\ w_1-\tilde{w}_1\ \|^2,$$

et donc pour $\mu=\min(1-\dfrac{\alpha A}{\lambda_+},\dfrac{\beta}{\lambda_-}-1)$, on obtient le résultat. ∎

Preuve de la Proposition 2.1. i) Montrons d'abord l'existence et l'unicité de θ. Par le Lemme 2.1, l'opérateur $T_{\tilde{v}}:W_1\times W_2\longrightarrow W_1\times W_2$ défini par

$$T_{\tilde{v}}(w_1,w_2)=(-D_1I(\alpha,\beta,m_1,m_2,v+w_1+w_2),D_2I(\alpha,\beta,m_1,m_2,v+w_1+w_2))$$

est μ-monotone continu. Ainsi $T_{\tilde{v}}$ admet un zéro unique $\theta(\alpha,\beta,m_1,m_2,v)$ (cf. [4]). L'application $(\alpha,\beta,m_1,m_2,v)\longmapsto\theta(\alpha,\beta,m_1,m_2,v)$ est continue. En effet, soit $(\tilde{v}_n=(\alpha_n,\beta_n,m_n,\tilde{m}_n,v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\Gamma\times\bar{B}\times V$ qui converge vers un élément $\tilde{v}_0=(\alpha_0,\beta_0,m_0,\tilde{m}_0,v_0)$ de $\Gamma\times\bar{B}\times V$. Pour $\mu(\tilde{v}_n)=\min(\dfrac{\beta_n}{\lambda_-}-1,1-\dfrac{\alpha_nA}{\lambda_+})$, nous avons

$$< T_{\tilde{v}_n}(\theta(\tilde{v}_0)),\theta(\tilde{v}_0)-\theta(\tilde{v}_n)>\geq\mu(\tilde{v}_n)\|\ \theta(\tilde{v}_0)-\theta(\tilde{v}_n)\ \|^2.$$

Soit $r_0>0$. Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq n_0$, on a $|\alpha_n-\alpha_0|\leq r_0$ et $|\beta_n-\beta_0|\leq r_0$. Ainsi $1-\frac{\alpha_nA}{\lambda_+}\geq1-\frac{\alpha_0+r_0}{\lambda_+}A$ et $\frac{\beta_n}{\lambda_-}-1\geq\frac{\beta_0-r_0}{\lambda_-}-1$. Pour $r_0<\min(\beta_0-\lambda_-,\dfrac{\lambda_+}{A}-\alpha_0)$, on obtient $\mu(\tilde{v}_n)\geq\min(\dfrac{\beta_0-r_0}{\lambda_-}-1,1-\dfrac{\alpha_0+r_0}{\lambda_+}A)=\mu_0>0$ et donc

$$\mu_0\ \|\ \theta(\tilde{v}_0)-\theta(\tilde{v}_n)\ \|\leq\|\ T_{\tilde{v}_n}(\theta(\tilde{v}_0))\ \|\ .$$

Comme $\tilde{v}\longmapsto T_{\tilde{v}}(w_1,w_2)$ est continu, alors $T_{\tilde{v}_n}(\theta(\tilde{v}_0))\longrightarrow T_{\tilde{v}_0}(\theta(\tilde{v}_0))=0$. D'où la continuité de θ.

ii) L'application $(\alpha,\beta,m_1,m_2,v)\longmapsto J(\alpha,\beta,m_1,m_2,v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, soient $\tilde{v}_0$ et $\tilde{h}\in\Gamma\times B\times V$, $\tilde{v}_0=(\alpha_0,\beta_0,m_0,\tilde{m}_0,v_0)$, $\tilde{h}=(\alpha,\beta,m_1,m_2,h)$. Puisque l'application $(w_1,w_2)\longmapsto I(v+w_1+w_2)$ est concave-convexe, $\theta(\alpha,\beta,m_1,m_2,v)$ est l'unique point selle de $I(v+.)$. Par la définition du point selle (cf. [1], [10]), nous vérifions facilement que

$$\limsup_{\|\tilde{h}\|_1\longrightarrow0}\frac{J(\tilde{v}_0+\tilde{h})-J(\tilde{v}_0)-\frac{\partial I}{\partial\tilde{v}}(\alpha_0,\beta_0,m_0,\tilde{m}_0,v_0+\theta(\tilde{v}_0)).\tilde{h}}{\|\ \tilde{h}\ \|_1}\leq0$$

et

$$\liminf_{\|\tilde{h}\|_1\longrightarrow0}\frac{J(\tilde{v}_0+\tilde{h})-J(\tilde{v}_0)-\frac{\partial I}{\partial\tilde{v}}(\alpha_0,\beta_0,m_0,\tilde{m}_0,v_0+\theta(\tilde{v}_0)).\tilde{h}}{\|\ \tilde{h}\ \|_1}\geq0,$$

avec $\|\ \tilde{h}\ \|_1=|\alpha|+|\beta|+\|\ m_1\ \|_\infty+\|\ m_2\ \|_\infty+\|\ h\ \|$. Il s'en suit que $J'(\tilde{v}_0)=\frac{\partial I}{\partial\tilde{v}}(\alpha_0,\beta_0,m_0,\tilde{m}_0,v_0+\theta(\tilde{v}_0))$. Par le fait que θ est continue et I de classe $\mathcal{C}^1$, J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Gamma\times B\times V$. ∎

Remarque 2.1 J et θ sont positivement homogènes en v. Si de plus $\alpha = \beta$ et $m_1 = m_2$, alors θ est linéaire en v.

Proposition 2.2. *Si $(\alpha, \beta, m_1, m_2, v, w) \in \Gamma \times \bar{B} \times V \times W$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) $v + w$ est solution de $(\tilde{P}_2)$,
ii) $w = \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, v)$ et $\nabla J(v) = 0$, où $\nabla J(v)$ est le gradient de $J(\alpha, \beta, m_1, m_2, .)$ en v.

Preuve. Découle de la Proposition 2.1 et du fait que $\nabla J(v) = D_3 I(v + \theta(\tilde{v}))$. ■

Proposition 2.3. *Soit $(\alpha_i, \beta_i, \hat{m}_i, \tilde{m}_i) \in \Gamma \times B$, $(i = 1, 2)$.*
i) Si $\hat{m}_i(x) \leq \tilde{m}_i(x)$ p.p, alors pour tout (α, β, v) dans $\Gamma \times V$, nous avons

$$J(\alpha, \beta, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, v) \leq J(\alpha, \beta, \hat{m}_1, \hat{m}_2, v). \tag{2.2}$$

ii) Si $\alpha_1 < \alpha_2$ et $\beta_1 < \beta_2$, alors pour tout (m_1, m_2, v) dans $\bar{B} \times V \backslash \{0\}$, nous avons

$$J(\alpha_2, \beta_2, m_1, m_2, v) < J(\alpha_1, \beta_1, m_1, m_2, v). \tag{2.3}$$

Lemme 2.2. *Pour tout (m_1, m_2, v) dans $\bar{B} \times V \backslash \{0\}$, nous avons*

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, m_1, m_2, v) \leq 0 \ \textit{et} \ \frac{\partial J}{\partial \beta}(\alpha, \beta, m_1, m_2, v) \leq 0.$$

De plus l'une au moins des inégalités précédentes est stricte.

Preuve. Comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, m_1, m_2, v) &= -\frac{1}{2} \int_\Omega m_1 [(v + \theta(\tilde{v}))^+]^2 dx, \\ \frac{\partial J}{\partial \beta}(\alpha, \beta, m_1, m_2, v) &= -\frac{1}{2} \int_\Omega m_2 [(v + \theta(\tilde{v}))^-]^2 dx, \end{aligned} \tag{2.4}$$

alors

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, m_1, m_2, v) \leq 0 \text{ et } \frac{\partial J}{\partial \beta}(\alpha, \beta, m_1, m_2, v) \leq 0.$$

Supposons par l'absurde que $\frac{\partial J}{\partial \beta}(\tilde{v}) = 0$ et $\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\tilde{v}) = 0$. Il en résulte que $m_2[(v + \theta(\tilde{v}))^-]^2 = m_1[(v + \theta(\tilde{v}))^+]^2 = 0$ *p.p.* Puisque $m_i(x) \geq 1$ *p.p*, $(i = 1, 2)$, alors $v = -\theta(\tilde{v})$ et par suite $v \in V \cap W = \{0\}$, ce qui est absurde. ■

Preuve de la Proposition 2.3. i) Si on définit $r : [0, 1] \longrightarrow B$ et $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, par $r(t) = (1 - t)\hat{m}_1 + t\tilde{m}_1$ et $\gamma(t) = J(\alpha, \beta, r(t), \tilde{m}_2, v)$, alors pour tout t dans $]0, 1[$, nous avons

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -\frac{\alpha}{2} \int_\Omega (\tilde{m}_1 - \hat{m}_1)[(v + \theta(\alpha, \beta, r(t), \tilde{m}_2, v))^+]^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi γ est décroissante, donc $\gamma(1) \leq \gamma(0)$ et $J(\alpha, \beta, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, v) \leq J(\alpha, \beta, \hat{m}_1, \tilde{m}_2, v)$. De façon similaire on montre que $J(\alpha, \beta, \hat{m}_1, \tilde{m}_2, v) \leq J(\alpha, \beta, \hat{m}_1, \hat{m}_2, v)$. Il en résulte que $J(\alpha, \beta, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, v) \leq J(\alpha, \beta, \hat{m}_1, \hat{m}_2, v)$.

ii) Soient $(m_1, m_2) \in \bar{B}$ et $v \in V\backslash\{0\}$. Par le Lemme 2.2, on peut supposer que $\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha_2, \beta_2, m_1, m_2, v) < 0$. Comme $\frac{\partial J}{\partial \alpha}(., \beta_2, m_1, m_2, v)$ est continue, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $J(., \beta_2, m_1, m_2, v)$ est strictement décroissante sur $]\alpha_2 - \varepsilon_0, \alpha_2 + \varepsilon_0[$. Pour $0 < \varepsilon < \inf(\varepsilon_0, \alpha_2 - \alpha_1)$, nous avons

$$\begin{aligned} J(\alpha_2, \beta_2, m_1, m_2, v) &< J(\alpha_2 - \varepsilon, \beta_2, m_1, m_2, v) \\ &\leq J(\alpha_1, \beta_1, m_1, m_2, v). \end{aligned}$$

■

3 Etude de $\Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$

On rappelle que si $m \in L^\infty(\Omega)$ et $mes\{x \in \Omega/m(x) > 0\} \neq 0$, le problème (P_m) : $-\Delta u = \lambda m u$ dans Ω, $u = 0$ sur $\partial\Omega$ admet une suite de valeurs propres positives $(\lambda_n(m))_{n\geq 1}$ définie par $\frac{1}{\lambda_n(m)} = \sup_{F\in\mathcal{A}_n} \inf_{u\in F}\{\int mu^2/ \parallel u \parallel = 1\}$, où $\mathcal{A}_n$ est l'ensemble des sous espaces vectoriels de $H_0^1(\Omega)$ de dimension n (cf. [5]). Notons par $(\phi_n(m))_{n\geq 1}$ une base orthonormée formée de fonctions propres associées à (P_m).
Considérons les fonctionnelles :
$J_-(\alpha, \beta, m_1, m_2) := \inf_{\|v\|=1} J(\alpha, \beta, m_1, m_2, v)$, $J_+(\alpha, \beta, m_1, m_2) := \sup_{\|v\|=1} J(\alpha, \beta, m_1, m_2, v)$
et $F^{\pm}_{(m_1,m_2)} := \{(\alpha, \beta) \in \Gamma/J_\pm(\alpha, \beta, m_1, m_2) = 0\}$.

Théorème 3.1. *Si $(m_1, m_2) \in B$, alors*
i) $F^-_{(m_1,m_2)} \cup F^+_{(m_1,m_2)} \subset \Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$.
ii) $\Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma \subset \{(\alpha, \beta) \in \Gamma/J_+(\alpha, \beta, m_1, m_2)J_-(\alpha, \beta, m_1, m_2) \leq 0\}$.

Lemme 3.1. *Les ensembles $F^{\pm}_{(m_1,m_2)}$ sont non vides.*

Preuve. Puisque J est continue sur $\Gamma \times \bar{B} \times V$ et V est de dimension finie, alors J_+ est continue sur $\Gamma \times \bar{B}$. Soit $s :]\lambda_-, \frac{\lambda_+}{A}[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $s(t) = J_+(t, t, m_1, m_2)$. Par la Proposition 2.3, nous avons $J_+(t, t, A, A) \leq s(t) \leq J_+(t, t, 1, 1)$. D'autre part, si on désigne par P la projection orthogonale sur W, alors pour tout v dans V, nous avons $P\left(\nabla I(\lambda_k(A), \lambda_k(A), A, A, v + \theta(\lambda_k(A), \lambda_k(A), A, A, v)\right) = 0$. Ainsi $-\Delta\theta(\lambda_k(A), \lambda_k(A), A, A, v) = \lambda_k\theta(\lambda_k(A), \lambda_k(A), A, A, v)$. D'où $\theta(\lambda_k(A), \lambda_k(A), A, A, v) \in V \cap W = \{0\}$ et donc

$$J(\lambda_k(A), \lambda_k(A), A, A, v) = I(\lambda_k(A), \lambda_k(A), A, A, v) = 0.$$

Il en résulte que $J_+(\lambda_k(A), \lambda_k(A), A, A) = 0$ et par suite $s(\lambda_k(A)) \geq 0$. De façon similaire, nous montrons que $s(\lambda_k) \leq 0$. Il existe alors α_0 dans $[\lambda_k(A), \lambda_k]$ tel que $s(\alpha_0) = 0$ et $(\alpha_0, \alpha_0) \in F^+_{(m_1,m_2)}$. D'une manière analogue, nous montrons que $F^-_{(m_1,m_2)} \neq \emptyset$. ■

Preuve du Théorème 3.1. Si $(\alpha_1, \beta_1) \in F^-_{(m_1,m_2)}$, il existe $v_3 \in V$, $\parallel v_3 \parallel = 1$ et $J(\alpha_1, \beta_1, m_1, m_2, v_3) = 0$. Soit $\psi(v) = \parallel v \parallel^2 - 1$. Comme ψ et $J(\alpha_1, \beta_1, m_1, m_2, .)$ sont différentiables en v_3, $\nabla\psi(v_3) = 2v_3 \neq 0$ et $J(\alpha_1, \beta_1, m_1, m_2, .)$ admet un minimum local en v_3 sur $\{v \in V/\psi(v) = \psi(v_3)\}$, il existe alors $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla J(v_3) = \lambda_0\nabla\psi(v_3) = 2\lambda_0 v_3$ (cf. [7]) et par suite $< \nabla J(v_3), v_3 >= 2\lambda_0\| v_3 \parallel^2 = 2\lambda_0$. Comme J est positivement homogène en v, $(J(tv) = t^2 v, \forall t \geq 0)$, alors $< \nabla J(v_3), v_3 >= 2J(v_3) = 0$. Ainsi $\lambda_0 = 0$, $\nabla J(v_3) = 0$ et $v_3 + \theta(\tilde{v}_3)$ est solution de $-\Delta(.) =$

$\alpha_1 m_1(.)^+ - \beta_1 m_2(.)^-$. Par conséquent $(\alpha_1, \beta_1) \in \Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$. L'autre inclusion se démontre de la même façon.
ii) Soient $(\alpha, \beta) \in \Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$ et $u_4 \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ tels que $-\Delta u_4 = \alpha m_1 u_4^+ - \beta m_2 u_4^-$. Par la Proposition 2.2, il existe $v_4 \in V$ tel que $u_4 = v_4 + \theta(\tilde{v}_4)$ et $\nabla J(v_4) = 0$. Comme $v_4 \neq 0$, on peut supposer que $\| v_4 \| = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} J_+(\alpha, \beta, m_1, m_2) &\geq J(\alpha, \beta, m_1, m_2, v_4) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_-(\alpha, \beta, m_1, m_2) &\leq J(\alpha, \beta, m_1, m_2, v_4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$J_+(\alpha, \beta, m_1, m_2) J_-(\alpha, \beta, m_1, m_2) \leq 0.$$

■

Remarque 3.1 Dans le cas particulier $m_1 = m_2 = m$, la multiplicité de $\lambda_k(m)$ est inférieure ou égale à celle de λ_k pour tout $m \in \bar{B}(\frac{A+1}{2}, \frac{A-1}{2})$. En effet, comme $1 \leq m(x) \leq A$ *p.p* et $1 < A < \min(\frac{\lambda_k}{\lambda_-}, \frac{\lambda_+}{\lambda_k})$, alors $\lambda_k(m) \in]\lambda_-, \frac{\lambda_+}{A}[$. Soit $\phi \in E_{\lambda_k(m)}$, où $E_{\lambda_k(m)}$ est le sous espace propre associé à $\lambda_k(m)$, donc $-\Delta\phi = \lambda_k(m) m\phi$ et il existe $v_5 \in V$ tel que $\phi = v_5 + \theta(\lambda_k(m), \lambda_k(m), m, m, v_5)$. Puisque
$v_5 \in < \phi_k, ..., \phi_{k+p-1} >$, alors $v_5 = \alpha_k \phi_k + ... + \alpha_{k+p-1} \phi_{k+p-1}$. A l'aide de la linéarité de $\theta(\lambda_k(m), \lambda_k(m), m, m, .)$, on déduit que
$\phi = \alpha_k(\phi_k + \theta(\lambda_k(m), \lambda_k(m), m, m, \phi_k)) + ... + \alpha_{k+p-1}(\phi_{k+p-1} + \theta(\lambda_k(m), \lambda_k(m), m, m, \phi_{k+p-1}))$
et donc $\dim E_{\lambda_k(m)} \leq p$. ■

4 Cas λ_k simple

4.1 Description de $\Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$

Théorème 4.1. *Si $(m_1, m_2) \in B$, il existe deux intervalles ouverts $I_i(m_1, m_2)$ $(i = 1, 2)$ de $]\lambda_-, \frac{\lambda_+}{A}[$ et deux fonctions $f_i(m_1, m_2) : I_i(m_1, m_2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(i = 1, 2)$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissantes tels que $\Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^{i=2} G(f_i(m_1, m_2))$.*

Lemme 4.1. *Pour tout (m_1, m_2) dans B, les ensembles*

$$E^{\pm}_{(m_1, m_2)} := \{(\alpha, \beta) \in \Gamma / J(\alpha, \beta, m_1, m_2, \pm\phi_k) = 0\}$$

sont non vides.

Preuve. La démonstration est analogue à celle du Lemme 3.1.

Lemme 4.2. *Pour tout (α, β) dans $E^{\pm}_{(m_1, m_2)}$, nous avons*

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, m_1, m_2, \pm\phi_k) < 0 \text{ et } \frac{\partial J}{\partial \beta}(\alpha, \beta, m_1, m_2, \pm\phi_k) < 0.$$

Preuve. Soit (α,β) dans $E^+_{(m_1,m_2)}$. D'une part, nous avons $J(\alpha,\beta,m_1,m_2,\phi_k)=0$. Puisque λ_k est simple et $\nabla J(\phi_k)\in V$, il existe alors $\tilde{\lambda_0}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\nabla J(\phi_k)=\tilde{\lambda_0}\phi_k$. Du fait que $<\nabla J(\phi_k),\phi_k>=2J(\phi_k)=0$, nous obtenons que $\tilde{\lambda_0}=0$, $\nabla J(\phi_k)=0$ et donc $\phi_k+\theta(\alpha,\beta,m_1,m_2,\phi_k)$ est solution de $(\tilde{P}_2)$. D'autre part, si on suppose que $\frac{\partial J}{\partial\beta}(\alpha,\beta,m_1,m_2,\phi_k)=0$, alors $(\phi_k+\theta(\alpha,\beta,m_1,m_2,\phi_k))^-=0$ et donc $\alpha=\lambda_1(m_1)$. Comme $m_1(x)\geq 1$ $p.p$, alors $\alpha\leq\lambda_1$, ce qui contredit le fait que $\alpha\in]\lambda_-,\frac{\lambda_+}{A}[$. Ainsi $\frac{\partial J}{\partial\beta}(\alpha,\beta,m_1,m_2,\phi_k)<0$ et de même $\frac{\partial J}{\partial\alpha}(\alpha,\beta,m_1,m_2,\phi_k)<0$. Une démonstration analogue peut être adaptée à l'autre cas. ■

Preuve du Théorème 4.1. Par le Lemme 4.1, $E^+_{(m_1,m_2)}$ est non vide, fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$, donc compact. Soit $(\alpha,\beta)\in E^+_{(m_1,m_2)}$. Par le Lemme 4.2, $\frac{\partial J}{\partial\beta}(\alpha,\beta)\neq 0$ et par le théorème des fonctions implicites, il existent V_α, W_β des voisinages de α et β respectivement et $f_{\alpha,\beta}:V_\alpha\longrightarrow W_\beta$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $f_{\alpha,\beta}(\alpha)=\beta$ et $(t,f_{\alpha,\beta}(t))\in E^+_{(m_1,m_2)}$, $\forall t\in V_\alpha$. Nous avons $E^+_{(m_1,m_2)}\subset\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in E^+_{(m_1,m_2)}} V_\alpha\times W_\beta$ et puisque $E^+_{(m_1,m_2)}$ est compact, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $E^+_{(m_1,m_2)}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{i=n_0}V_{\alpha_i}\times W_{\beta_i}$.

Posons $I_1(m_1,m_2)=\bigcup\limits_{i=1}^{i=n_0}V_{\alpha_i}$ et $f_1(m_1,m_2):I_1(m_1,m_2)\longrightarrow\mathbb{R}$, $t\longmapsto f_{\alpha_i,\beta_i}(t)$ si $t\in V_{\alpha_i}$.

D'une part, il est clair que $f_1(m_1,m_2)$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ et $E^+_{(m_1,m_2)}=G(f_1(m_1,m_2))$. De plus, la fonction $f_1(m_1,m_2)$ est strictement décroissante. En effet, si α_1, $\alpha_2\in I_1(m_1,m_2)$ sont tels que $\alpha_1<\alpha_2$ et $f_1(m_1,m_2)(\alpha_1)\leq f_1(m_1,m_2)(\alpha_2)$, alors

$$0=J(\alpha_1,f_1(m_1,m_2)(\alpha_1),m_1,m_2,\phi_k)\geq J(\alpha_1,f_1(m_1,m_2)(\alpha_2),m_1,m_2,\phi_k).\quad(4.1)$$

Comme $(\alpha_2,f_1(m_1,m_2)(\alpha_2))\in E^+_{(m_1,m_2)}$, alors par le Lemme 4.2, nous avons $\frac{\partial J}{\partial\alpha}(\alpha_2,f_1(m_1,m_2)(\alpha_2),m_1,m_2,\phi_k)<0$. Il existe $\varepsilon_1>0$ tel que la fonction $t\longmapsto J(t,f_1(m_1,m_2)(\alpha_2),m_1,m_2,\phi_k)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]\alpha_2-\varepsilon_1,\alpha_2+\varepsilon_1[$. Ainsi

$$J(\alpha_1,f_1(m_1,m_2)(\alpha_2),m_1,m_2,\phi_k)>J(\alpha_2,f_1(m_1,m_2)(\alpha_2),m_1,m_2,\phi_k)=0.$$

D'où une contradiction avec (4.1).

D'autre part, $I_1(m_1,m_2)$ est un intervalle. En effet, soient α_1 et α_2 dans $I_1(m_1,m_2)$ et $\alpha_1\leq\alpha\leq\alpha_2$. Si on considère la fonction $\tilde{g}:]\lambda_-,\frac{\lambda_+}{A}[\longrightarrow\mathbb{R}$, $\tilde{g}(t)=J(\alpha,t,m_1,m_2,\phi_k)$ alors par (2.4), $\tilde{g}(f_1(m_1,m_2)(\alpha_2))\geq 0$ et $\tilde{g}(f_1(m_1,m_2)(\alpha_1))\leq 0$. Comme $\tilde{g}$ est continue, il existe β dans $]\lambda_-,\frac{\lambda_+}{A}[$ tel que $\tilde{g}(\beta)=0$. Ainsi $(\alpha,\beta)\in E^+_{(m_1,m_2)}=\bigcup\limits_{i=1}^{i=n_0}V_{\alpha_i}\times W_{\alpha_i}$ et par suite il existe i_0 tel que $\alpha\in V_{\alpha_{i_0}}$. D'où $\alpha\in I_1(m_1,m_2)$ et donc $I_1(m_1,m_2)$ est un intervalle. De même on montre qu'il existe $f_2(m_1,m_2):I_2(m_1,m_2)\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante telle que $E^-_{(m_1,m_2)}=G(f_2(m_1,m_2))$.

•$\Sigma(m_1,m_2)\cap\Gamma=\bigcup\limits_{i=1}^{i=2}G(f_i(m_1,m_2))$.

En effet, si $(\alpha,\beta)\in\Sigma(m_1,m_2)\cap\Gamma$, alors il existe $u\in H^1_0(\Omega)\backslash\{0\}$ tel que $-\Delta u=\alpha m_1u^+-\beta m_2u^-$. Par la Proposition 2.2, il existe $v\in V$ tel que

$u = v + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, v)$, $\nabla J(v) = 0$ et $J(\alpha, \beta, m_1, m_2, v) = 0$. Par la simplicité de λ_k et l'homogénéité de J, on obtient que $(\alpha, \beta) \in E^+_{(m_1,m_2)} \cup E^-_{(m_1,m_2)}$ et par suite $(\alpha, \beta) \in \bigcup_{i=1}^{i=2} G(f_i(m_1, m_2))$.
Réciproquement, si $(\alpha, \beta) \in G(f_1(m_1, m_2))$, alors $J(\alpha, \beta, m_1, m_2, \phi_k) = 0$ et comme λ_k est simple et J est positivement homogène en v, alors $\nabla J(\phi_k) = 0$,
$\phi_k + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, \phi_k)$ est solution de $(\tilde{P_2})$ et $(\alpha, \beta) \in \Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$. De même nous avons $G(f_2(m_1, m_2)) \subset \Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$. ∎

4.2 Continuité et monotonie par rapport aux poids

Proposition 4.1. *Si $(m_n, \tilde{m}_n)$, (m_1, m_2) sont des éléments de B tels que $m_n \longrightarrow m_1$ et $\tilde{m}_n \longrightarrow m_2$ dans $L^\infty(\Omega)$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*
i) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $I_i(m_1, m_2) \subset I_i(m_n, \tilde{m}_n)$, $(i = 1, 2)$.
ii) pour tout α dans $I_i(m_1, m_2)$, nous avons $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_i(m_n, \tilde{m}_n)(\alpha) = f_i(m_1, m_2)(\alpha)$.

Preuve. Soient $\alpha_0 \in I_1(m_1, m_2)$ et $(\beta_1, \beta_2) \in \Gamma$ tels que $\beta_1 < f_1(m_1, m_2)(\alpha_0) < \beta_2$. Comme $(\alpha_0, f_1(m_1, m_2)(\alpha_0)) \in E^+_{(m_1,m_2)}$, $\frac{\partial J}{\partial \beta}(\alpha_0, f_1(m_1, m_2)(\alpha_0), m_1, m_2, \phi_k) < 0$. Il en résulte que $J(\alpha_0, \beta_2, m_1, m_2, \phi_k) < 0$ et $J(\alpha_0, \beta_1, m_1, m_2, \phi_k) > 0$.
Pour $0 < \varepsilon < \inf(-J(\alpha_0, \beta_2, m_1, m_2, \phi_k), J(\alpha_0, \beta_1, m_1, m_2, \phi_k))$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n > n_0$, on a $J(\alpha_0, \beta_2, m_n, \tilde{m}_n, \phi_k) < \varepsilon + J(\alpha_0, \beta_2, m_1, m_2, \phi_k) < 0$ et $J(\alpha_0, \beta_1, m_n, \tilde{m}_n, \phi_k) > J(\alpha_0, \beta_1, m_1, m_2, \phi_k) - \varepsilon > 0$. Ainsi, si $n > n_0$, il existe $\beta_n \in [\beta_1, \beta_2]$ tel que $J(\alpha_0, \beta_n, m_n, \tilde{m}_n, \phi_k) = 0$ et par suite $\forall n > n_0$, on a $\alpha_0 \in I_1(m_n, \tilde{m}_n)$.
Par la continuité de J, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_1(m_n, \tilde{m}_n)(\alpha) = f_1(m_1, m_2)(\alpha)$, $\forall \alpha \in I_1(m_1, m_2)$. Le cas $i = 2$ se traite de la même manière. ∎

Proposition 4.2. *Si $(m_i, \tilde{m}_i) \in B$, $(i = 1, 2)$, $m_i(x) \leq \tilde{m}_i(x)$ p.p, alors*
i) pour tout $\alpha \in I_i(m_1, m_2) \cap I_i(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$,

$$f_i(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)(\alpha) \leq f_i(m_1, m_2)(\alpha).$$

ii) Si de plus $m_1(x) < \tilde{m}_1(x)$ p.p ou $m_2(x) < \tilde{m}_2(x)$ p.p, alors

$$f_i(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)(\alpha) < f_i(m_1, m_2)(\alpha).$$

Preuve. L'assertion i) est une conséquence immédiate de la Proposition 2.3.
ii) Par absurde, on suppose qu'il existe α_0 tel que $f_i(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)(\alpha_0) \geq f_i(m_1, m_2)(\alpha_0)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $m_1(x) < \tilde{m}_1(x)$ *p.p.* Définissons la fonction $\zeta : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\zeta(t) = J(\alpha_0, f_1(m_1, m_2)(\alpha_0), t\tilde{m}_1 + (1 - t)m_1, m_2, \phi_k)$. Nous avons pour tout t dans $]0, 1[$, $\zeta'(t) = -\frac{\alpha_0}{2} \int_\Omega (\tilde{m}_1 - m_1)(u_t^+)^2$, avec $u_t = \phi_k + \theta(\alpha_0, f_1(m_1, m_2)(\alpha_0), t\tilde{m}_1 + (1 - t)m_1, m_2, \phi_k)$.

$$\bullet\ \zeta(0) > \zeta(1). \tag{4.2}$$

En effet, par l'absurde, supposons que $\zeta(0) \leq \zeta(1)$. Comme ζ est décroissante, nous avons $\zeta(t) = \zeta(0)$ pour tout t dans $[0, 1]$. Il en résulte que $\zeta'(t) = 0$ et $u_t^+ = 0$ pour tout t dans $]0, 1[$. En faisant tendre t vers 0, nous obtenons $u_0^+ = 0$, $-\Delta u_0 = f_1(m_1, m_2)(\alpha_0) m_2 u_0$ et donc $f_1(m_1, m_2)(\alpha_0) = \lambda_1(m_2)$. D'où une contradiction avec le fait que $\lambda_1(m_2) \leq \lambda_1$ et $f_1(m_1, m_2)(\alpha_0) \in]\lambda_-, \frac{\lambda_+}{A}[$. Finalement, par (4.2), nous avons

$$\begin{aligned} J(\alpha_0, f_1(m_1, m_2)(\alpha_0), m_1, m_2, \phi_k) &> J(\alpha_0, f_1(m_1, m_2)(\alpha_0), \tilde{m}_1, m_2, \phi_k) \\ &\geq J(\alpha_0, f_1(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)(\alpha_0), \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \phi_k), \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Le cas $i = 2$ se démontre de la même façon. ■

4.3 Simplicité dans $\Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$

Définition 4.1. *On dit qu'un élément (α, β) de $\Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$ est simple si toutes les solutions de $(\tilde{P}_2)$ sont colinéaires.*

Théorème 4.2. *Soient $(m_1, m_2) \in B$ et $(\alpha, \beta) \in \Sigma(m_1, m_2) \cap \Gamma$.*
i) Si $(\alpha, \beta) \notin \bigcap_{i=1}^{i=2} G(f_i(m_1, m_2))$, alors (α, β) est simple.
ii) Si $(\alpha, \beta) \in \bigcap_{i=1}^{i=2} G(f_i(m_1, m_2))$, alors (α, β) est simple si et seulement si $\alpha m_1(x) = \beta m_2(x)$ p.p.

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $J(\alpha, \beta, m_1, m_2, \phi_k) = 0$ et $J(\alpha, \beta, m_1, m_2, -\phi_k) \neq 0$. Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u_0 = \alpha m_1 u_0^+ - \beta m_2 u_0^-$. A l'aide de la Proposition 2.2, il existe $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ tel que $u_0 = \gamma_2 \phi_k + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, \gamma_2 \phi_k)$.
•$\gamma_2 \geq 0$. (4.3)
En effet, sinon $-\frac{1}{\gamma_2} u_0$ est solution de $(\tilde{P}_2)$ et par suite $-\phi_k + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, -\phi_k)$ est solution de $(\tilde{P}_2)$. Il en découle que $J(\alpha, \beta, m_1, m_2, -\phi_k) = 0$, ce qui est absurde. Par (4.3), nous avons $u_0 = \gamma_2(\phi_k + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, \phi_k))$ et d'où l'assertion i).
ii) Si $\alpha m_1 = \beta m_2$, soient u_1 et u_2 deux solutions de $(\tilde{P}_2)$, donc $-\Delta u_1 = \alpha m_1 u_1$ et $-\Delta u_2 = \alpha m_1 u_2$, ainsi $\alpha = \lambda_k(m_1)$, car $\lambda_k(m_1)$ est la seule valeur propre du problème (P_{m_1}) dans $]\lambda_-, \frac{\lambda_+}{A}[$. Comme λ_k est simple, alors par la Remarque 3.1, $\lambda_k(m_1)$ est simple. Il existe alors $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 = \gamma_1 u_1$ et donc (α, β) est simple.
Réciproquement, supposons que $mes\{x \in \Omega / \alpha m_1(x) \neq \beta m_2(x)\} \neq 0$. Puisque $(\alpha, \beta) \in \bigcap_{i=1}^{i=2} G(f_i(m_1, m_2))$, alors $J(\alpha, \beta, m_1, m_2, \pm\phi_k) = 0$ et $\pm\phi_k + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, \pm\phi_k)$ sont des solutions de $(\tilde{P}_2)$.
• $\pm\phi_k + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, \pm\phi_k)$ sont linéairement indépendants. En effet, dans le cas contraire, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $-\phi_k + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, -\phi_k) = y\phi_k + y\theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, \phi_k)$. Ainsi $y = -1$, $\theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, -\phi_k) = -\theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, \phi_k)$ et par suite $\tilde{u}_0 = \phi_k + \theta(\alpha, \beta, m_1, m_2, \phi_k)$ satisfait les équations $-\Delta \tilde{u}_0 = \alpha m_1 \tilde{u}_0^+ - \beta m_2 \tilde{u}_0^-$ et $-\Delta \tilde{u}_0 = \beta m_2 \tilde{u}_0^+ - \alpha m_1 \tilde{u}_0^-$. D'où $(\alpha m_1 - \beta m_2)\tilde{u}_0^+ = (\beta m_2 - \alpha m_1)\tilde{u}_0^-$, $\alpha m_1 = \beta m_2$ *p.p* sur $\{x \in \Omega / \tilde{u}_0(x) \neq 0\}$ et donc $-\Delta \tilde{u}_0 = \alpha m_1 \tilde{u}_0$. Comme le problème (P_{m_1}) jouit de la propriété de la continuation unique (cf. [9]), alors $mes\{x \in \Omega / \tilde{u}_0(x) = 0\} = 0$. Il s'en suit que $\alpha m_1 = \beta m_2$ *p.p*, ce qui est absurde et donc l'assertion ii) est établie. ■

Corollaire 4.1. *Si $m_1 \neq m_2$, alors le problème non linéaire (P) : $-\Delta u = \lambda(m_2 u^+ - m_2 u^-)$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ admet exactement deux valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) dans $]\lambda_-, \frac{\lambda_+}{A}[$.*

Preuve. Nous savons que chaque courbe $G(f_i(m_1, m_2))$ $(i = 1, 2)$ rencontre la diagonale en un seul point $(\tilde{\alpha_i}, \tilde{\alpha_i})$ et donc $\tilde{\alpha_i}$ est une valeur propre de (P).
Si $\tilde{\alpha_1} \neq \tilde{\alpha_2}$, alors par l'assertion $i)$ du Théorème 4.2, $\tilde{\alpha_1}$ et $\tilde{\alpha_2}$ sont simples.
Si $\tilde{\alpha_1} = \tilde{\alpha_2}$ alors $\tilde{\alpha_1} m_1 \neq \tilde{\alpha_2} m_2$ et d'aprs la démonstration du Théorème 4.2, $\pm\phi_k + \theta(\tilde{\alpha_1}, \tilde{\alpha_1}, m_1, m_2, \pm\phi_k)$ sont deux solutions de (P) linéairement indépendantes et chaque solution de (P) s'écrit en fonction de $\pm\phi_k + \theta(\tilde{\alpha_1}, \tilde{\alpha_1}, m_1, m_2, \pm\phi_k)$. Ceci entraîne que la multiplicité de $\tilde{\alpha_1}$ est égale à deux.

5 Application

Par la méthode du degré de Leray-Schauder, nous allons étudier dans cette section un problème de non-résonance.
Pour chaque (m_1, m_2) dans $\bar{B}$, on pose
$\Gamma_{(m_1,m_2)} := \Gamma^+_{(m_1,m_2)} \cup \Gamma^-_{(m_1,m_2)}$, où $\Gamma^+_{(m_1,m_2)} := \{(\alpha, \beta) \in \Gamma / J_+(\alpha, \beta, m_1, m_2) < 0\}$ et $\Gamma^-_{(m_1,m_2)} := \{(\alpha, \beta) \in \Gamma / J_-(\alpha, \beta, m_1, m_2) > 0\}$. Par (2.3) et le Lemme 3.1, $\Gamma^\pm_{(m_1,m_2)} \neq \emptyset$, $\forall (m_1, m_2) \in B$.

Théorème 5.1. *Si $\gamma_+(x) = \alpha m_1(x)$ et $\gamma_-(x) = \beta m_2(x)$ p.p, avec $(m_1, m_2) \in B$ et $(\alpha, \beta) \in \Gamma_{(m_1,m_2)}$, alors le problème $(\tilde{P_1})$ admet au moins une solution.*

Pour montrer ce théorème, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 5.1. *(cf. [4]) Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X contenant 0, symétrique par rapport à 0 et $\varphi : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ une application compacte. Si $0 \notin (I_d - \varphi)(\partial\Omega)$ et $(I_d - \varphi)(-x) \neq \lambda(I_d - \varphi)(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$ et $\forall \lambda \geq 1$, alors $d(I_d - \varphi, \Omega, 0)$ est impaire, (I_d est l'application identique de X).*

Lemme 5.2. *Les applications : $u \longmapsto Kf(., u)$ et $u \longmapsto Kg(., u)$ sont compactes de $H^1_0(\Omega)$ dans lui même, (K est donnée par (2.1)).*

Preuve. Ce lemme découle des hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et du fait que K est une application linéaire continue. ■

Soient $\tilde{m} = \max(m_1, m_2)$ et $\hat{m} = \min(m_1, m_2)$. Il est facile de voir que $(\tilde{m}, \hat{m}) \in B$.
On pose $E := \Gamma^+_{(\hat{m},\hat{m})} \cup \Gamma^-_{(\tilde{m},\tilde{m})}$. Il est évident que $E \cap \{(\lambda, \lambda)/\lambda \in]\lambda_-, \frac{\lambda_+}{A}[\} \neq \emptyset$.

Lemme 5.3. *Pour tout (λ, λ) dans E, u dans $H^1_0(\Omega)\backslash\{0\}$ et $\gamma \geq 1$, on a*

$$\nabla I(\lambda, \lambda, m_1, m_2, -u) \neq \gamma \nabla I(\lambda, \lambda, m_1, m_2, u).$$

Preuve. Par absurde, on suppose qu'il existe $(\lambda_0, \lambda_0) \in E$, $u_0 \in H^1_0(\Omega)\backslash\{0\}$ et $\gamma_0 \geq 1$ tels que $\nabla I(\lambda_0, \lambda_0, m_1, m_2, -u_0) = \gamma_0 \nabla I(\lambda_0, \lambda_0, m_1, m_2, u_0)$. Du fait que $g(\lambda_0, \lambda_0, m_1, m_2, ., -u_0) = -g(\lambda_0, \lambda_0, m_2, m_1, ., u_0)$, nous avons

$$(1 + \gamma_0)u_0 = Kg(\lambda_0, \lambda_0, m_2, m_1, ., u_0) + \gamma_0 Kg(\lambda_0, \lambda_0, m_1, m_2, ., u_0)$$

et par suite

$$-(1 + \gamma_0)\Delta u_0 = \lambda_0(m_2 + \gamma_0 m_1)u_0^+ - \lambda_0(m_1 + \gamma_0 m_2)u_0^-.$$

D'où

$$-\Delta u_0 = \lambda_0(\frac{1}{\gamma_0+1}m_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_1)u_0^+ - \lambda_0(\frac{1}{\gamma_0+1}m_1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_2)u_0^-,$$

et puisque $u_0 \neq 0$, $(\lambda_0, \lambda_0) \in \Sigma(\frac{1}{\gamma_0+1}m_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_1, \frac{1}{\gamma_0+1}m_1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_2)$.
Comme $(m_1, m_2) \in B$ et B est convexe, $(\frac{1}{\gamma_0+1}m_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_1, \frac{1}{\gamma_0+1}m_1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_2) \in B$. De plus, par la Proposition 2.3, nous avons pour tout (α, β) dans Γ et v dans V, $J(\alpha, \beta, \tilde{m}, \tilde{m}, v) \leq J(\alpha, \beta, \frac{1}{\gamma_0+1}m_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_1, \frac{1}{\gamma_0+1}m_1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_2, v) \leq J(\alpha, \beta, \hat{m}, \hat{m}, v)$. Ainsi $\Sigma(\frac{1}{\gamma_0+1}m_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_1, \frac{1}{\gamma_0+1}m_1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_2) \cap E = \emptyset$ et ceci est une contradiction avec $(\lambda_0, \lambda_0) \in E \cap \Sigma(\frac{1}{\gamma_0+1}m_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_1, \frac{1}{\gamma_0+1}m_1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}m_2)$. ■

Lemme 5.4. *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \Gamma_{(m_1,m_2)}$*, le degré* $d(\nabla I(\alpha, \beta, m_1, m_2, .), B(0,1), 0)$ *est impaire.*

Preuve. Soit $(\alpha, \beta) \in \Gamma_{(m_1,m_2)}$. On suppose que $(\alpha, \beta) \in \Gamma^+_{(m_1,m_2)}$, (l'autre cas se traite de la même façon). On vérifie facilement que $\Gamma^+_{(m_1,m_2)}$ est connexe par arc, donc pour tous (α_0, β_0) et (α_1, β_1) dans $\Gamma^+_{(m_1,m_2)}$, il existe un chemin continu $\xi : [0,1] \longrightarrow \Gamma^+_{(m_1,m_2)}$ tel que $\xi(0) = (\alpha_0, \beta_0)$ et $\xi(1) = (\alpha_1, \beta_1)$. Considérons l'homotopie

$$\tilde{H}(t,u) = \nabla I(\xi(t), m_1, m_2, u),\ t \in [0,1] \text{ et } u \in B(0,1).$$

Si $\| u \| = 1$, alors $\nabla I(\xi(t), m_1, m_2, u) \neq 0$, car sinon $-\Delta u = \xi_1(t)m_1u^+ - \xi_2(t)m_2u^-$, où $(\xi_1(t), \xi_2(t)) = \xi(t)$, et par suite $(\xi_1(t), \xi_2(t)) \in \Sigma(m_1, m_2)$, ce qui contredit le fait que $(\xi_1(t), \xi_2(t)) \in \Gamma^+_{(m_1,m_2)}$ et $\Gamma^+_{(m_1,m_2)} \cap \Sigma(m_1, m_2) = \emptyset$. Par l'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder, $d(\nabla I(\xi(t), m_1, m_2, .), B(0,1), 0)$ est constant par rapport à $t \in [0,1]$. D'où

$$d(\nabla I(\alpha_0, \beta_0, m_1, m_2, .), B(0,1), 0) = d(\nabla I(\alpha_1, \beta_1, m_1, m_2, .), B(0,1), 0).$$

Si $(\lambda, \lambda) \in E \cap \Gamma^+_{(m_1,m_2)}$, nous avons

$$d(\nabla I(\alpha, \beta, m_1, m_2, .), B(0,1), 0) = d(\nabla I(\lambda, \lambda, m_1, m_2, .), B(0,1), 0)$$

et par les Lemmes 5.1 et 5.3, on conclut que $d(\nabla I(\lambda, \lambda, m_1, m_2, .), B(0,1), 0)$ est impaire. ■

Lemme 5.5. *Soit l'homotopie* $H(t,u) = Kg(.,u) - t(Kg(.,u) - Kf(.,u) - Kh)$*, alors on a l'estimation à priori : il existe* $R > 0$ *tel que pour tout* $u \in H^1_0(\Omega)$*,* $\| u \| = R$ *et pour tout* $t \in [0,1]$*, on a* $H(t,u) \neq u$*.*

Preuve. Par l'absurde, supposons que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe v_n dans $H^1_0(\Omega)$, ($\| v_n \| = n$) et t_n dans $[0,1]$ tels que $\nabla I(v_n) + t_n(Kg(.,v_n) - Kf(.,v_n) - Kh) = 0$. Comme $\lim\limits_{|s| \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x,s) - g(x,s)}{s} = 0$ uniformément en x, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M_\varepsilon > 0 \text{ tel que } |f(x,s) - g(x,s)| < \varepsilon |s|, \quad \forall |s| > M_\varepsilon \text{ et } \forall x \in \Omega.$$

Ainsi

$$|f(x,s) - g(x,s)| < \varepsilon |s| + \sup_{|s| \leq M_\varepsilon} |f(x,s) - g(x,s)|\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Si on pose $\tilde{M}_\varepsilon(x) = \sup_{|s|\leq M_\varepsilon} |f(x,s) - g(x,s)|$, il est clair que $\tilde{M}_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ et par la définition de λ_1, nous avons

$$\begin{aligned} \| Kg(.,u) - Kf(.,u) - Kh \| &= \sup_{\|v\|\leq 1} | < Kg(.,u) - Kf(.,u) - Kh, v > | \\ &\leq \sup_{\|v\|\leq 1} \left(\int_\Omega |g(x,u) - f(x,u) - h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \lambda_1 \sup_{\|v\|\leq 1} \left(\int_\Omega |g(x,u) - f(x,u) - h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| v \| \\ &\leq \varepsilon {\lambda_1}^2 \| u \| + \lambda_1 \| \tilde{M}_\varepsilon \|_2 + \lambda_1 \| h \|_2. \end{aligned}$$

Donc si on choisit $\| u \| > \sup(\frac{\| \tilde{M}_\varepsilon \|_2}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon})$, nous avons

$$\frac{\| Kg(.,u) - Kf(.,u) - Kh \|}{\| u \|} < M_0 \varepsilon,$$

avec $M_0 > 0$ une constante indépendante de ε. D'où

$$\lim_{\|u\| \longrightarrow +\infty} \frac{\| Kg(.,u) - Kf(.,u) - Kh \|}{\| u \|} = 0. \tag{5.1}$$

En posant $u_n = \frac{v_n}{n}$, nous avons $\| \nabla I(u_n) \| = \frac{t_n}{n} \| Kg(.,v_n) - Kf(.,v_n) - Kh \|$ et par (5.1) nous déduisons que $\| \nabla I(u_n) \| \longrightarrow 0$. Puisque $\| u_n \| = 1$, alors (u_n) converge faiblement vers un certain u_5 dans $H_0^1(\Omega)$ et $u_n \longrightarrow u_5$ dans $L^2(\Omega)$. Alors $u_n - Kg(.,u_n)$ converge faiblement vers $u_5 - Kg(.,u_5)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $u_5 - Kg(.,u_5) = 0$ puisque $\| u_n - Kg(.,u_n) \| \longrightarrow 0$. D'où

$$-\Delta u_5 = \alpha m_1 u_5^+ - \beta m_2 u_5^-. \tag{5.2}$$

D'autre part, comme $\| \nabla I(u_n) \| \longrightarrow 0$ et $\| u_n \| = 1$, alors $< \nabla I(u_n), u_n > \longrightarrow 0$ et donc $< u_n - Kg(.,u_n), u_n > \longrightarrow 0$. Ainsi $\| u_n \|^2 - \int_\Omega g(x,u_n) u_n \longrightarrow 0$ et par suite $\int_\Omega g(x,u_n) u_n \longrightarrow 1$. Or $u_n \longrightarrow u_5$ et $g(.,u_n) \longrightarrow g(.,u_5)$ dans $L^2(\Omega)$, donc $\int_\Omega g(x,u_n) u_n \longrightarrow \int_\Omega g(x,u_5) u_5$. Il en résulte que $\int_\Omega g(x,u_5) u_5 = 1$, $u_5 \neq 0$ et par (5.2) on obtient que $(\alpha, \beta) \in \Sigma(m_1, m_2)$. Ce qui est en contradiction avec $(\alpha, \beta) \in \Gamma_{(m_1,m_2)}$. D'où l'estimation à priori. ■

Preuve du Théorème 5.1. Par les Lemmes 5.2, 5.5 et l'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder, nous obtenons

$$d(I_d - H(0,.), B(0,R), 0) = d(I_d - H(1,.), B(0,R), 0).$$

D'une part, on a pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, $(1 \leq \| u \| < R)$, $\nabla I(u) \neq 0$ et donc

$$d(I_d - H(1,.), B(0,R), 0) = d(I_d - H(1,.), B(0,1), 0).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} d(I_d - H(0,.), B(0,R), 0) &= d(I_d - H(1,.), B(0,1), 0) \\ &= d(\nabla I(\alpha, \beta, m_1, m_2, .), B(0,1), 0). \end{aligned}$$

Par le Lemme 5.4, on a $d(I_d - H(0,.), B(0,R), 0) \neq 0$. Par suite il existe $u_6 \in B(0,R)$ tel que $H(0,u_6) = u_6$. Ainsi u_6 est une solution de $(\tilde{P}_1)$. ■

On pose $\tilde{\Gamma} = \Gamma^{+}_{(1,1)} \cup \Gamma^{-}_{(A,A)}$. Il est clair que $\tilde{\Gamma}$ est non vide

Corollaire 5.1. *Si $\alpha_0 < \gamma_+(x) < \alpha_0 A$ p.p et $\beta_0 < \gamma_-(x) < \beta_0 A$ p.p, avec $(\alpha_0, \beta_0) \in \tilde{\Gamma}$, alors $(\tilde{P}_1)$ admet au moins une solution*

Preuve. Soit $m_1(x) = \frac{\gamma_+(x)}{\alpha_0}$ et $m_2(x) = \frac{\gamma_-(x)}{\beta_0}$, alors $(m_1, m_2) \in B$ et $(\alpha_0, \beta_0) \in \Gamma_{(m_1,m_2)}$. Par le Théorème 5.1, on obtient le résultat. ■

Références

[1] H. Amann. Saddle point and multiple solution of differential equations. Math. Z. **169**, (1976), 127–166.

[2] D. G. De Figueiredo-J. P. Gossez, on the first curve of the Fučik spectrum of elliptic operator, Differential and Integral Equations, Volume **7**, Number 5 1994, pp. 1285–1301.

[3] P. Dràbek, Remark on the nonlinear noncoercive problem with jumping nonlinearities, Comentationes Mathematicae Universitatits Carolinae, **25** (3) 1984.

[4] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer verlag, New York, 1980.

[5] D. G. De Figueiredo, Positive solutions of semilinear elliptic problems, Universidade de Brasilia, Departamento de matematica, Brasilia, DF-Brazil.

[6] S. Fučik, Boundary value problems with jumping nonlinearities. cas. pest. Mat. **101** (1976). 69–87.

[7] S. Fučik-J. Nečas-J. Souč`ek-V. Souč`ek, Spectral Analysis of Nonlinear Operators, Berlin. Heidelberg. New york 1973.

[8] T. Gallouët-O. Kavian, Résultats d'existence et de non existence pour certains problèmes demi-linéaires à l'infini, Ann. Fac. Sci. de Toulouse, **3** (1981), pp ; 201–246.

[9] J. P. Gossez and A. Loulit, A note on two notions of unique continuation, Bull. Soc. Math. Belg. **45** (1993) ser. B. 257–267.

[10] C. Magalhães, Semilinear elliptic problem with Grossing of multiple eigenvalues, Comm. Part. Diff. Eq. **15** (1990), 1265–1292.

[11] A. M. Micheletti, A remark on the resonance set for semilinear elliptic equation, Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect. **A124** (1994), 801–809.

Département de Mathématiques et Informatique Faculté des Sciences,
Université Mohamed 1er, Oujda, Maroc.
E-mail : bentahar@sciences.univ-oujda.ac.ma