Comparaison des ondes linéaires et non-linéaires à coefficients variables

Slim Ibrahim Mohamed Majdoub

Résumé

L'objet de ce travail est l'approximation dans l'espace d'énergie des suites de solutions de l'équation

$$\partial_t^2 u - div(A(x).\nabla_x u) + |u|^{p-1}u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$$

où $d \geq 3, \quad 1 < p \leq p_c := \frac{d+2}{d-2}$ et A est une fonction régulière à valeurs dans l'espace des matrices $d \times d$ définies positives, valant l'identité en dehors d'un compact. Nous démontrons des résultats analogues à ceux de P. Gérard [4] concernant le cas constant ($A(x) \equiv Id$).

Abstract

This work is devoted to the description of bounded energy sequences of solutions to the equation

$$\partial_t^2 u - div(A(x).\nabla_x u) + |u|^{p-1}u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$$

where $d \geq 3, \quad 1 < p \leq p_c := \frac{d+2}{d-2}$ and A is a regular function, valued in the space of $d \times d$ positive definite matrix, which is the identity outside a compact set of $\mathbb{R}^d$. We obtain the same results as P. Gérard [4] about constant case ($A(x) \equiv Id$).

Received by the editors May 2002.
Communicated by P. Godin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 35xx, 35Lxx, 35Bxx.
Key words and phrases : Strichartz inequalities, Microlocal Defect measures, Oscillations and Concentration effects.

1 Introduction

L'objet du présent travail est l'approximation dans l'espace d'énergie des suites (u_n) de solutions de l'équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables définie sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$

$$\Box_A u + |u|^{p-1}u := \partial_t^2 u - div(A(x).\nabla_x u) + |u|^{p-1}u = 0, \tag{1}$$

où $d \geq 3$, $1 < p \leq p_c := \frac{d+2}{d-2}$ et $A(x)$ est une matrice $d \times d$ symétrique définie positive, à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ satisfaisant :

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} A(x) = Id \quad \text{si} \quad |x| \geq R_0, \\ c_0|\xi|^2 \leq A(x)\xi.\xi \leq c_0^{-1}|\xi|^2, \end{cases}$$

pour des constantes $R_0 > 0$ et $0 < c_0 \leq 1$. La valeur p_c correspond à l'espace de Lebesgue critique dans lequel s'injecte l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$. Il s'agit de tester l'influence du terme non-linéaire sur des solutions de l'équation (1) dont les données initiales sont des suites bornées dans l'espace d'énergie $\mathcal{E} := \dot{H}^1 \times L^2(\mathbb{R}^d)$.
Lorsque $A(x) \equiv Id$ (cas constant), on retrouve l'opérateur des ondes $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$. Rappelons d'abord quelques résultats concernant l'équation (1). Nous distinguons les deux cas suivants :
(i) Cas constant $(A(x) \equiv Id)$:
- Pour $1 < p < p_c$, cas sous-critique, J. Ginibre et G. Velo [5] ont démontré que pour des données

$$(u(0), \partial_t u(0)) \in (\dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^d)) \times L^2(\mathbb{R}^d),$$

il existe une unique u,

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^d)), \quad \partial_t u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)),$$

solution forte du problème de Cauchy associé à l'équation (1).
- Pour $p = p_c$, cas critique, ce problème a d'abord été résolu dans le cas radial par M. Struwe [20], puis dans le cas général par M. Grillakis [7], [8] pour les dimensions d telles que $3 \leq d \leq 5$ et récemment J. Shatah-M. Struwe [17], [18], l'ont prouvé pour les autres dimensions. Précisément, ils ont prouvé l'existence globale et l'unicité de solutions dans la classe dite de Shatah-Struwe

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^{p_c}_{loc}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d)), \quad \partial_t u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)).$$

La condition inhabituelle, $u \in L^{p_c}_{loc}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))$, permet de considérer le terme $| u |^{p_c-1} u$ dans (1) comme un terme source dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$ et d'obtenir des estimations d'énergie.
La question d'unicité de solutions dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$ et non pas dans $L^{p_c}_{loc}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))$ est encore ouverte. Cependant H. Bahouri et P. Gérard [2] ont montré la stabilité des solutions de Shatah-Struwe pour la convergence faible dans l'espace d'énergie.

Remarque 1.1. *Pour $p > p_c$, cas sur-critique, le problème d'existence et d'unicité de solutions fortes est ouvert. Cependant dans un travail récent, Lebeau [16] a obtenu un résultat d'instabilité pour les solutions radiales et à valeurs réelles d'une équation des ondes sur-critique dans $\mathbb{R}^3$.*

Pour une bibliographie détaillée, voir C. Zuily [22].

(ii) Cas variable :

Dans [12], Kapitanski a établi l'existence globale de solutions fortes pour les puissances sous-critiques. Il a aussi obtenu des résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles dans le cas critique (voir [15]). L'existence globale de solutions classiques et au sens de Shatah-Struwe pour la puissance critique a été démontrée par les auteurs dans [10] et [11]. Plus précisément, ils ont obtenu le résultat suivant

Théorème 1.1. *On suppose que $d \geq 3$, et que la fonction $A(x)$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H})$. Alors si $(u_0, u_1) \in (\dot{H}^1 \times L^2)(\mathbb{R}^d)$, le problème*

$$\begin{cases} \Box_A u + \mid u \mid^{p_c - 1} u & = & 0 \\ u(0,.) & = & u_0 \\ \partial_t u(0,.) & = & u_1, \end{cases}$$

admet une unique solution u,

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_c}_{loc}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d)); \quad \partial_t u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)).$$

Notons que dans ces deux cas, ces solutions vérifient la loi de conservation de l'énergie

$$E(u,t) := \int_{\mathbb{R}^d} [\frac{1}{2}(|\partial_t u|^2 + |A^{\frac{1}{2}} \nabla_x u|^2) + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}]dx = cste = E(u). \tag{2}$$

Notre but est d'obtenir des résultats comparables à ceux de P. Gérard [4] concernant le cas constant, en s'attendant à une discussion selon l'exposant p ($p < p_c$ et $p = p_c$). Il s'agit de retrouver principalement trois résultats :

• si $1 < p < p_c$, alors l'influence du terme non-linéaire est négligeable ;

• si $p = p_c$, alors il existe une condition nécessaire et suffisante, portant sur la solution de l'équation linéaire correspondante, pour que l'influence du terme non-linéaire soit négligeable ;

• dans le cas $p = p_c$, l'étude des mesures de Wigner associées aux données initiales fournit une condition suffisante pour que l'influence du terme non-linéaire soit négligeable.

Précisément nous nous intéressons au problème suivant :

Soit $(\underline{\varphi}, \underline{\psi}) := (\varphi_n, \psi_n)$ une suite bornée de $(\dot{H}^1 \times L^2)(\mathbb{R}^d)$, faiblement convergente vers $(\underline{0,0})$ et supportée dans un compact fixe de $\mathbb{R}^d$. Notons par $\underline{u} := (u_n)$ la suite de solutions de (1) avec les données de Cauchy (φ_n, ψ_n), et par $\underline{v} := (v_n)$ la suite de solutions du problème linéaire correspondant,

$$\Box_A v_n = 0; \quad v_{n|t=0} = \varphi_n, \quad \partial_t v_{n|t=0} = \psi_n.$$

Etant donné un temps $T > 0$, nous disons que la suite (u_n) est linéarisable sur $[0, T]$ lorsque

$$\sup_{t \in [0,T]} E_0(u_n - v_n, t) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où l'on a posé $E_0(w,t) = \int_{\mathbb{R}^d} [\frac{1}{2}(|\partial_t w|^2 + |A^{\frac{1}{2}} \nabla_x w|^2)](t,x)\, dx.$

Dans un premier résultat (théorème 2.1), nous montrons que la suite $\underline{u}$, avec p sous-critique, est linéarisable sur tout intervalle $[0, T]$. Cependant, si $p = p_c$, la suite $\underline{u}$

peut présenter un comportement non linéaire correspondant, précisément lorsque la suite $\underline{v}$ ne vérifie pas

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} |v_n(t,x)|^{p_c+1}\, dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3}$$

Dans un second résultat, nous donnons une condition suffisante sur les données de Cauchy pour que (3) soit satisfaite. Cette condition s'énonce en termes de mesure de défaut microlocale ; notion introduite séparément par P. Gérard [3] et L. Tartar [21] pour étudier le défaut de compacité des injections de Sobolev

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d), \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}. \tag{4}$$

L'idée de ce résultat repose sur une équation de transport, montrant que la propagation du défaut de compacité de la suite $\underline{v}$ se fait le long des rayons du champ hamiltonien $H_{\sqrt{A(x)\xi.\xi}}$. Dans le cas d'une géométrie plate ; $A(x) \equiv Id$, nous remarquons que les rayons issus d'un point ne se refocalisent pas (ces sont les lignes droites issues de ce point). Néanmoins, pour une géométrie quelconque, ce phénomène peut avoir lieu. Par exemple sur la sphère S^d tous les rayons issus d'un point se refocalisent sur le point antipodale. Sous cette hypothèse de non-refocalisation, le premier auteur montre dans [9] que l'on peut obtenir un analogue du théorème de structure dû à Bahouri et Gérard [2] dans le cas constant. Néanmoins, dans le cas simple d'une géométrie focalisante ; la sphère S^d, il montre que l'optique géométrique est de plus associée à cette application antipodale sur S^d.
Dans les preuves des résultats, nous utilisons de façon essentielle les estimations à priori suivantes, vérifiées par la solution du problème linéaire.
Soit $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$ et notons par v la solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 v + G(t)v = f(t) \quad \text{sur} \quad [0,T]\times\mathbb{R}^d \\ v(0) = v_0 \\ \partial_t v(0) = v_1, \end{cases} \tag{5}$$

où $f(t) \in L^1([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d))$ et $G(t)$ est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 2 dépendant d'une manière $\mathcal{C}^\infty$ en t, ayant un symbole principal G_2 vérifiant la condition d'uniforme ellipticité ; $G_2(t,x,\xi) \geq c \mid \xi \mid^2$, et tel que tous les termes $G_{2-j}, j = 0, 1, ...,$ du développement asymptotique du symbole principal sont indépendants de x en dehors d'une boule fixe de $\mathbb{R}^d$. Alors nous avons

Lemme 1.1 ([Estimation de l'énergie.])**.** *Soit $(v_0, v_1) \in \dot{H}^{s+1} \times \dot{H}^s$. Le problème (5) admet une unique solution v satisfaisant*

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|\partial_t v(t)\|_{H^s} + \|\nabla v(t)\|_{H^s}) \leq c(s)(\|v_1\|_{H^s} + \|\nabla v_0\|_{H^s} + \int_0^T \|f(t)\|_{H^s} dt), \tag{6}$$

où la constante $c(s) > 0$ est indépendante de v_0, v_1 et de f.

L'estimation de l'énergie des solutions de (5) est un résultat classique. Pour plus une démonstration, nous renvoyons par exemple à [1].

Lemme 1.2 ([Inégalités de Strichartz.]). *Soit* $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$. *Pour tout couple de Strichartz* (q, r) *i.e*

$$(\mathcal{S}) \qquad \frac{1}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2} - 1, \quad q \geq \frac{d+1}{d-1} \ \text{ et } q > 2 \text{ si } d = 3,$$

la solution v *du problème (5) vérifie*

$$\|v\|_{L^q([0,T],L^r(\mathbb{R}^d))} \leq c_q(\|v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt), \qquad (7)$$

avec une constante universelle c_q.

Les inégalités de Strichartz ont été établies par Ginibre-Velo [6] dans le cas constant et Kapitanski [13] dans le cas où la métrique G satisfait les hypothèses décrites ci-dessus. Signalons enfin que dans le cas de coefficients peu réguliers, H. Smith a démontré dans un travail récent (voir [19]) les estimations de Strichartz pour des opérateurs à coefficients seulement $\mathcal{C}^{1,1}$.
Ces estimations seront souvent couplées avec un lemme d'absorption que nous rappelons.

Lemme 1.3 ([Lemme de *bootstrap*.]). *Soit* $X : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue telle que*

$$X(t) \leq a + bX(t)^\theta,$$

avec $a,\ b > 0,\ \theta > 1,\ a < (1 - \frac{1}{\theta})\dfrac{1}{(\theta b)^{\frac{1}{\theta}}}$ *et* $X(0) \leq \dfrac{1}{(\theta b)^{\frac{1}{\theta - 1}}}$.

Alors, pour tout $t \in [0, T]$

$$X(t) \leq \frac{\theta}{\theta - 1} a.$$

La preuve de ce lemme est simple, nous l'évitons dans ce papier.
Les inégalités de Strichartz (lemme 1.2) et un argument de *bootstrap* (lemme 1.3) fournissent dans le cas sous-critique , l'estimation à priori suivante :

Lemme 1.4. *Soient* $T > 0$, (q, r) *un couple de Strichartz et* $E_0 > 0$. *Alors il existe une constante* $C(T, r, E_0)$ *telle que toute solution* u *de (1) avec* $p < p_c$ *et* $E(u) \leq E_0$, *vérifie*

$$\|u\|_{L^q([0,T],L^r(\mathbb{R}^d))} \leq C(T, r, E_0).$$

Nous donnons la preuve de ce lemme dans le paragraphe 3.

Remerciements
Les auteurs remercient le referee pour ses remarques et ses suggestions.

2 Résultats

Soit $(\underline{\varphi}, \underline{\psi}) := (\varphi_n, \psi_n)$ une suite bornée de $\dot{H}^1 \times L^2(\mathbb{R}^d)$, faiblement convergente vers $(0, 0)$ et supportée dans un compact fixe de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\underline{u} := (u_n)$ et $\underline{v} := (v_n)$ les suites définies par

$$\Box_A u_n + |u_n|^{p-1} u_n = 0; \quad u_{n|t=0} = \varphi_n, \quad \partial_t u_{n|t=0} = \psi_n,$$

$$\Box_A v_n = 0; \quad v_{n|t=0} = \varphi_n, \quad \partial_t v_{n|t=0} = \psi_n.$$

Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit T un temps strictement positif. Alors*
1) *Si $p < \frac{d+2}{d-2}$, la suite $\underline{u}$ est linéarisable sur $[0,T]$.*
2) *Si $p = \frac{d+2}{d-2}$, la suite $\underline{u}$ est linéarisable sur $[0,T]$, si et seulement si, la suite $\underline{v}$ vérifie*

$$\|v_n\|_{L^\infty([0,T],L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d))} \longrightarrow 0. \tag{8}$$

Ce résultat montre que pour l'exposant critique, il y a un changement qualitatif dans la dynamique de l'équation. Les solutions qui présentent un tel effet non-linéaire sont caractérisées par la négation de la condition (8) pour les solutions linéaires correspondantes. Vu que l'injection de Sobolev

$$\dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d)$$

n'est pas compacte, il est possible d'exhiber, dans le cas critique, des suites (u_n) non linéarisables. Donnons un exemple concret :
soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction non nulle et (ε_n) une suite de nombres réels positifs tendant vers 0. Posons $\varphi_n(x) = \varepsilon_n^{1-\frac{d}{2}}\varphi(\frac{x}{\varepsilon_n})$. Alors, d'une part on a (φ_n) converge faiblement vers 0 dans l'espace de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$, et d'autre part

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v_n\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d)} \geq \|\varphi_n\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d)} = \|\varphi\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d)}.$$

Le critère (8) présente l'avantage d'être exprimé en fonction de la suite (v_n) solution du problème linéaire. Néanmoins, dans le second résultat nous donnons une condition portée sur la suite des données de Cauchy (φ_n, ψ_n) afin que (8) soit vérifiée. Elle est exprimée en termes de mesure d'énergie microlocale dont voici un bref rappel. Soit (φ_n, ψ_n) une suite de données de Cauchy supportée dans un compact fixe et convergeant faiblement vers $(0,0)$ dans $\mathcal{E}$. Etant donné un opérateur pseudo-différentiel classique B d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^d$ nous posons

$$e_n^0(B) = (BA\nabla\varphi_n, \nabla\varphi_n) + (B\psi_n, \psi_n), \tag{9}$$

où (f,g) désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On démontre l'existence d'une sous-suite $(\varphi_{n_k}, \psi_{n_k})$ telle que, pour tout B, $e_{n_k}^0(B)$ admette une limite $e^0(B)$ lorsque k tend vers l'infini. Plus précisément, on peut montrer l'existence d'une mesure de Radon positive μ^0 sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{S}^{d-1}$ telle que, pour tout B,

$$e^0(B) = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathcal{S}^{d-1}} \sigma_0(B)(x,\xi)d\mu^0(x,\xi), \tag{10}$$

où $\sigma_0(B)$ est le symbole principal de B (pour les détails, voir [3], [4] et [21]). Remarquons que $\int_{\mathcal{S}^{d-1}} \mu^0(x,d\xi)$ est la limite vague de la densité d'énergie locale $|A^{\frac{1}{2}}\nabla\varphi_{n_k}(x)|^2+|\psi_{n_k}(x)|^2$. Pour cette raison, la mesure μ^0 est appelée mesure d'énergie microlocale associée à la suite $(\varphi_{n_k}, \psi_{n_k})$.
Avant d'énoncer notre second résultat, introduisons quelques notations.
Pour $y \in \mathbb{R}^d$, $r \geq 0$, nous désignons par $d\sigma_{r,y}(x)$ la mesure de probabilité de Lebesgue sur la sphère de rayon r centrée en $x = y$. En particulier, $d\sigma_{0,y}(x)$ est la mesure de Dirac $\delta(x-y)$.

Si μ et ν sont deux mesures positives sur le même espace mesuré, on dit que μ et ν sont orthogonales, et on note $\mu \perp \nu$, s'il existe deux parties mesurables A et B telles que $A \cap B = \emptyset$ et, pour toute partie mesurable E, $\mu(E) = \mu(E \cap A)$, $\nu(E) = \nu(E \cap B)$. Enfin, nous notons par (Φ_t) le flot associé au champ Hamiltonien $H_{\sqrt{A(x)\xi.\xi}}$.

Théorème 2.2. *On suppose que* $(\varphi_n \pm i\sqrt{AD.D}\psi_n)$ *admet une unique mesure de défaut microlocale* $\mu^0_\pm$. *Si*

$$\mu^0_\pm(x,\xi) \perp \Phi_{\pm t}(\delta_{x-y} d\sigma(\xi)) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\|v_n\|_{L^\infty([0,T],L^{p_c+1}(\mathbb{R}^d))} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3 Preuves des résultats

Nous commençons cette section par prouver le lemme 1.4.

Démonstration du lemme 1.4. Soient $T > 0$, (q_1, r_1) un couple de Strichartz et $E_0 > 0$. On note par u une solution de (1) avec $p < p_c$ et vérifiant $E(u) \leq E_0$. Remarquons d'abord que pour tout $t \geq 0$, on a $\|u^p\|_{L^1([0,t],L^2)} = \|u\|^p_{L^p([0,t],L^{2p})}$. Dans le cas où $\frac{d}{d-2} \leq p < \frac{d+2}{d-2}$, on peut choisir $q > 1$ tel que $(q, 2p)$ soit un couple de Strichartz. L'inégalité de Hölder montre alors qu'on a

$$\|u^p\|_{L^1([0,t],L^2)} \leq \|u\|^p_{L^q([0,t],L^{2p})}.t^{1-\frac{p}{q}}.$$

Remarquons en particulier que comme p est sous-critique, alors $\frac{p}{q} < 1$.
Appliquons les inégalités de Strichartz à u pour le couple $(q, 2p)$, on obtient

$$\|u\|_{L^q([0,t],L^{2p}} \leq c_p\Big[\|\nabla_{t,x} u_{|t=0}\|_{L^2} + t^{1-\frac{p}{q}}\|u\|^p_{L^q([0,t],L^{2p})}\Big].$$

Par conservation de l'énergie, on a

$$\|u\|_{L^q([0,t],L^{2p})} \leq c_p\Big[E_0^{\frac{1}{2}} + t^{1-\frac{p}{q}}\|u\|^p_{L^q([0,t],L^{2p})}\Big].$$

On choisit un temps t_{max} tel que $0 < t_{max} < \Big[\frac{1-\frac{1}{p}}{(pc_p)^{\frac{1}{p}} c_p E_0}\Big]^{\frac{pq}{q-2}}$. Alors, il est clair que

$$\|u\|_{L^q([0,t],L^{2p})} \leq c_p E_0^{\frac{1}{2}} + c_p {t_{max}}^{1-\frac{p}{q}}\|u\|^p_{L^q([0,t],L^{2p})}, \qquad \text{pour tout } 0 \leq t \leq t_{max}.$$

Le choix de t_{max} permet d'appliquer le lemme 1.3 à $x(t) = \|u\|_{L^q([0,t],L^{2p}}$ et d'obtenir l'estimation suivante

$$\|u\|_{L^q([0,t],L^{2p})} \leq C(p, E_0), \qquad \text{pour tout } 0 \leq t \leq t_{max}.$$

Considérons une partition de $[0,T] = \bigcup_{i=0}^{i=n-1}[t_i, t_{i+1}]$ telle que $t_0 = 0$, $t_n = T$ et $t_{i+1} - t_i \leq t_{max}$. En appliquant les inégalités de Strichartz sur $[t_i, t]$, avec $t \leq t_{i+1}$ et en utilisant la conservation de l'énergie, on obtient

$$\|u\|_{L^q([t_i,t],L^{2p})} \leq c_p E_0^{\frac{1}{2}} + c_p {t_{max}}^{1-\frac{p}{q}}\|u\|^p_{L^q([t_i,t],L^{2p})}.$$

Du fait que $t_{i+1} - t_i \leq t_{max}$, le lemme 1.3 permet de déduire que

$$\|u\|_{L^q([t_i,t_{i+1}],L^{2p})} \leq C(p, E_0),$$

et par suite $\|u\|_{L^q([0,T],L^{2p})} \leq C(p, E_0, T)$. Pour obtenir le résultat pour un couple de Strichartz arbitraire (q_1, r_1), il suffit de remarquer qu'en vertu de (6), on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{q_1}([0,T],L^{r_1})} &\leq c_p\Big[\|\nabla_{t,x}u_{|t=0}\|_{L^2} + T^{1-\frac{p}{q_1}}\|u\|^p_{L^{q_1}([0,T],L^{2p})}\Big]. \\ &\leq C(q_1, E_0, T). \end{aligned}$$

Dans le cas où $1 < p < \frac{d}{d-2}$, en utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\|u\|^p_{L^p([0,t],L^{2p})} \leq t\|u\|^{\frac{\alpha}{2}}_{L^\infty([0,t],L^{p+1})}\|u\|^{p-\frac{\alpha}{2}}_{L^\infty([0,t],L^{p_c+1})},$$

avec $0 < \alpha = 2.\frac{d+42p-p^2(d-2)}{(d+2)-p(d-2)} < 2p$. Ainsi, pour t assez petit, les inégalités de Strichartz appliquées pour le couple particulier $(\infty, p_c{+}1)$, montre que l'on a l'estimation cherchée. Pour conclure, il suffit de procéder comme dans le premier cas.

3.1 Démonstration du théorème 2.1.

La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème A de P. Gérard [4]. Pour le confort du lecteur, on rappelle la preuve.

Lemme 3.1. *On suppose que $p < p_c$. Sous les hypothèses et les notations ci-dessus portées sur la métrique A et sur les données de Cauchy (φ_n, ψ_n) on a*

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad dans \quad H^1(]0, T[\times\mathbb{R}^d).$$

Démonstration du lemme 3.1. Quitte à faire une extraction, nous pouvons supposer que la suite $\underline{u}$ admet une limite faible u dans $\dot{H}^1(]0, T[\times\mathbb{R}^d)$. Montrons que u est en fait solution de

$$\square_A u + |u|^{p-1}u = 0; \quad u_{|t=0} = 0, \quad \partial_t u_{|t=0} = 0.$$

Le résultat découlera alors par unicité. Le problème est de passer à la limite, au sens des distributions, dans le terme $f(\underline{u})$, où l'on a posé $f(s) = |s|^{p-1}s$.
Par vitesse finie de propagation, la suite (u_n) est à support compact fixe de $[0, T]\times\mathbb{R}^d$. Le lemme 1.4 entraîne qu'elle est bornée dans l'espace $L^{p_c}([0, T], L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))$ et par conséquent $(f(u_n))$ est bornée dans $L^\alpha([0, T], L^{2\alpha}(\mathbb{R}^d))$ où l'on a posé $\alpha = \dfrac{p_c}{p} > 1$. Comme $(f(u_n))$ est à support compact fixe, alors en utilisant l'inégalité de Hölder il vient que $(f(u_n))$ est bornée dans $L^\alpha([0, T] \times \mathbb{R}^d)$. Notons par ailleurs que pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons

$$\|f(u_n)-f(u)\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon+\|f(u_n)-f(u)\|_{L^\alpha([0,T]\times\mathbb{R}^d)}\lambda^{1-\frac{1}{\alpha}}\{|f(u_n)-f(u)| \geq \varepsilon\}. \tag{11}$$

En effet, écrivons

$$\|f(u_n) - f(u)\|_{L^1} = \int_{\{|f(u_n)-f(u)|<\varepsilon\}} + \int_{\{|f(u_n)-f(u)|\geq\varepsilon\}} = (I) + (II),$$

alors

$$(I) \leq C\varepsilon,$$

et par l'inégalité de Hölder

$$(II) \leq \|f(u_n) - f(u)\|_{L^\alpha([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \lambda^{1-\frac{1}{\alpha}}\{|f(u_n) - f(u)| \geq \varepsilon\}.$$

Par ailleurs, le théorème de Rellich et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montrent que (u_n) converge vers u en mesure sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ i.e. pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lambda\{|u_n - u| \geq \varepsilon\} \longrightarrow 0,$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.
Ainsi, nous avons $f(\underline{u}) \longrightarrow f(u)$ en mesure sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ et est bornée dans $L^\alpha([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. Ce qui montre que $f(\underline{u}) \longrightarrow f(u)$ dans $L^1([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ et par suite le résultat. ∎

Démonstration du théorème 2.1.
1) On suppose que $p < p_c$.
Notons par $\underline{w} = \underline{u} - \underline{v}$. En appliquant l'estimation de l'énergie sur l'intervalle $I = [0,T]$, nous obtenons

$$\sup_{t\in I} E_0(w_n, t) \leq c\|u_n\|^{2p}_{L^p(I,L^{2p}(\mathbb{R}^d))}. \tag{12}$$

Un raisonnement analogue au lemme précédent montre que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\|f(u_n)\|_{L^1([0,T],L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C\varepsilon + \|f(u_n)\|_{L^\alpha([0,T],L^{2\alpha}(\mathbb{R}^d))} \lambda^{1-\frac{1}{\alpha}}\{|f(u_n)| \geq \varepsilon\}.$$

Ceci prouve que $f(\underline{u}) \longrightarrow 0$ dans $L^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^d))$, d'où **1)**. Il reste à démontrer l'équivalence **2)**.
Nous supposons maintenant que $p = p_c = \frac{d+2}{d-2}$. Montrons d'abord que la condition (8) est nécessaire. Notons par

$$P_n(t) := \frac{1}{p_c + 1}\|v_n(t,.)\|^{p_c+1}_{L^{p_c+1}(\mathbb{R}^d)}$$

et par

$$\text{“}E(v_n, t)\text{”} := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}(|\partial_t v_n|^2 + |A^{\frac{1}{2}}\nabla_x v_n|^2)(t,x)\, dx + P_n(t).$$

En utilisant la conservation de l'énergie (2) nous avons

$$|P_n(t) - P_n(0)| = |E(u_n, t) - \text{“}E(v_n, t)\text{”}|.$$

D'autre part, en vertu de l'injection de Sobolev (4), nous pouvons écrire que

$$\sup_{t\in I} |E(u_n, t) - \text{“}E(v_n, t)\text{”}| \leq C \sup_{t\in I} |E(u_n - v_n, t)|.$$

Pour conclure, il suffit de prouver que $P_n(0) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ou encore que,

$$\int_0^T P_n(t)\, dt \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puisque le couple $(\frac{2(d+1)}{d-2}, \frac{2(d+1)}{d-2})$ est admissible i.e. il vérifie (**S**), alors la suite (v_n) est bornée dans $L^{\frac{2(d+1)}{d-2}}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$. De plus, (v_n) converge faiblement vers 0 dans $H^1(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$. D'après les injections de Sobolev (4), nous avons

$$H^1(]0,T[\times\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(]0,T[\times\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^m(]0,T[\times\mathbb{R}^d); \quad m = 2\frac{d+1}{d},$$

ce qui montre que $v_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^{2\frac{d+1}{d}}(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$.
En utilisant l'inégalité

$$|\int_0^T P_n(t)\,dt| \leq C\|v_n\|_{L^m(]0,T[\times\mathbb{R}^d)}\|v_n\|^{\frac{d+2}{d-2}}_{L^{2\frac{d+1}{d-2}}([0,T]\times\mathbb{R}^d)},$$

et le fait que (v_n) est bornée en norme de Strichartz, il vient que $\displaystyle\int_0^T P_n(t)\,dt \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par suite le résultat.
Réciproquement, montrons que la condition (8) est suffisante. La suite $\underline{w} = \underline{u} - \underline{v}$ vérifie

$$\Box_A w_n = -|u_n|^{p_c-1}u_n; \quad w_{n|t=0} = 0; \quad \partial_t w_{n|t=0} = 0.$$

L'estimation de l'énergie entraîne que

$$\sup_{t\in[0,T]} E_0(w_n,t) \leq C\|u_n\|^{2p_c}_{L^{p_c}([0,T],L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))}.$$

Par ailleurs, l'inégalité de Hölder entraîne

$$\|v_n\|_{L^{p_c}([0,T],L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))} \leq \|v_n\|^{\alpha}_{L^\infty([0,T],L^{p_c+1}(\mathbb{R}^d))}\|v_n\|^{1-\alpha}_{L^q([0,T],L^r(\mathbb{R}^d))},$$

où $\alpha = \frac{d-2}{d+2}$, $q = \frac{4}{d-2}$, $r = \frac{4d}{d-2}$.
Il est à remarquer que (q,r) est un couple de Strichartz, ce qui montre que (v_n) est bornée dans $L^q([0,T],L^r(\mathbb{R}^d))$. De plus, par les inégalités de Strichartz (lemme 1.2), nous avons

$$\|w_n\|_{L^{p_c}([0,T],L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))} \leq C(\|w_n\|_{L^{p_c}([0,T],L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))} + \|v_n\|_{L^{p_c}([0,T],L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))})^{p_c}$$

ce qui permet, en utilisant un argument d'absorption (lemme 1.3), de conclure. ∎

3.2 Démonstration du théorème 2.2

Sous les hypothèses supposées sur les données $(\underline{\varphi},\underline{\psi})$, nous pouvons, à chaque instant t, associer à la suite $(A^{\frac{1}{2}}\nabla_x\underline{v}(t,.),\partial_t\underline{v}(t,.))$ une mesure d'énergie microlocale instantanée notée μ^t. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de trouver une relation entre μ^t et μ^0 la mesure associée aux données. Pour cela nous commençons par une factorisation adéquate de l'opérateur $\Box_A$.
Nous aurons besoin dans la suite du calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels. Nous nous contentons ici de rappeler uniquement les définitions des symboles et des symboles classiques. Le lecteur désireux trouvera dans [1] les éléments principaux d'une théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Dans ce qui suit, nous adoptons la convention de sommation d'Einstein.

Définition 3.1. *Soit $m \in \mathbb{R}$. On note $S^m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ tels que :*

$$\forall \alpha, \quad \forall \beta, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Un élément $a \in S^m$ est appelé symbole d'ordre m.

Définition 3.2. *Un symbole $a \in S^m$ est dit classique si $a \sim \sum a_j$, les fonctions a_j étant homogènes de degré $m-j$ pour $|\xi| \geq 1$, c'est-à -dire*

$$a_j(x, \lambda\xi) = \lambda^{m-j} a_j(x,\xi) \quad \textit{pour} \quad |\xi| \geq 1, \quad \lambda \geq 1.$$

Nous désignons par $a(x,\xi) := \sqrt{A(x)\xi.\xi}$ et $q(x,\xi) := a(x,\xi) + c(x,\xi)$ avec

$$c(x,\xi) = \frac{1}{2a(x,\xi)}\Big(D_j a^{jk}(x)\xi_k - \frac{1}{i}\nabla_\xi a(x,\xi)\nabla_x a(x,\xi)\Big).$$

Le symbole a est ainsi dans S^1, homogène de degré 1 et $c \in S^0$ est homogène de degré 0.

Lemme 3.2. *Soient $Q = op(q)$ et $R_0(x, D_x)$ l'opérateur pseudo-différentiel défini par*

$$R_0(x, D_x) = \Box_A - (\partial_t - iQ)(\partial_t + iQ).$$

Alors le symbole principal r_0 de R_0 est dans la classe S^0

Démonstration du lemme 3.2. Nous écrivons $R_0(x, D_x) = A(x)D.D + D_j a^{jk}(x) D_k - Q \circ Q$ avec un symbole $\sigma(R_0) = r_0(x,\xi)$ équivalent, dans la classe S^0, à

$$\Big[A(x)\xi.\xi + D_j a^{jk}(x)\xi_k - \Big(A(x)\xi.\xi + D_j a^{jk}(x)\xi_k - \frac{1}{i}\nabla_\xi a(x,\xi)\nabla_x a(x,\xi) + c^2(x,\xi)\Big)$$
$$-\frac{1}{i}\Big(\nabla_\xi a(x,\xi)\nabla_x a(x,\xi) + \frac{1}{i}\nabla_\xi a(x,\xi)\nabla_x c(x,\xi) + \frac{1}{i}\nabla_\xi c(x,\xi)\nabla_x a(x,\xi)\Big)\Big].$$

Ce qui s'écrit encore

$$r_0(x,\xi) \sim -c^2(x,\xi) - \frac{1}{i}\Big(\nabla_\xi a(x,\xi)\nabla_x c(x,\xi) + \frac{1}{i}\nabla_\xi c(x,\xi)\nabla_x a(x,\xi)\Big) \quad \mathrm{mod} \quad S^0.$$

■

Pour tout t nous définissons $\underline{v}_\pm^t = (\partial_t \pm iQ)\underline{v}(t,.)$. Nous avons alors la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Supposons que $\underline{v}_\pm^0$ possède une unique mesure de défaut microlocale $\mu_\pm^0$. Alors, l'unique mesure de défaut microlocale $\mu_\pm^t$ associée à $\underline{v}_\pm^t$ est solution de*

$$\{\partial_t \pm H_{\sqrt{A(x)\xi.\xi}} \pm d(x,\xi)\}\mu_\pm^t = 0,$$

où l'on a posé,

$$d(x,\xi) = -\Big[\partial_\xi \partial_x a + 2Im(c)\Big](x,\xi),$$

et où $H_{\sqrt{A(x)\xi.\xi}}$ désigne le champ Hamiltonien sur $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$.
De plus, pour tout B, opérateur pseudo-différentiel homogène d'ordre 0, nous avons

$$(Bv_{n,\pm}^t, v_{n,\pm}^t) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d\times S^{d-1}} \sigma_0(B)d\mu_\pm^t, \ \textit{localement uniformément en temps.}$$

Démonstration de la proposition 3.1. Par le théorème de Rellich nous pouvons écrire

$$(\partial_t \mp iQ)v^t_{n,\pm} = -R_0 v_n(t,.) = o(1)\ , \quad n \to +\infty \quad \text{dans } L^2.$$

Par ailleurs, pour tout opérateur B pseudo-différentiel classique d'ordre 0, nous avons

$$\frac{d}{dt}(Bv^t_{n,\pm}, v^t_{n,\pm}) = \pm i((Q^*B - BQ)v^t_{n,\pm}, v^t_{n,\pm}) + o(1)\ , \quad n \to +\infty \quad \text{dans } L^2$$

et $Q^*B = op(q^*)op(b) = op(q^*\#b)$ où

$$q^*\#b \sim a + \overline{c} + \frac{1}{i}\partial_\xi\partial_x ab + \frac{1}{i}\nabla_\xi a.\nabla_x b \quad \mathrm{mod} \quad S^{-1}.$$

De même $BQ = op(b\#q)$ et $b\#q \sim b(a+c) + \frac{1}{i}\nabla_\xi b.\nabla_x a \quad \mathrm{mod} \quad S^{-1}$.
On en déduit alors que

$$\sigma(Q^*B - BQ) \sim \Big[\frac{1}{i}\partial_\xi\partial_x a + \overline{c} - c\Big]b + \frac{1}{i}\nabla_\xi a.\nabla_x b - \frac{1}{i}\nabla_\xi b.\nabla_x a \quad \mathrm{mod} \quad S^{-1}.$$

Ce qui donne, en vertu de ce qui précède

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d\times S^{d-1}} \sigma_0(B)\frac{d}{dt}\mu^t(x,\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d\times S^{d-1}} \Big[\sigma_0(B)\Big(\partial_\xi\partial_x(a) + 2Im(c)\Big)(x,\xi)\Big]d\mu^t(x,\xi)\\ &+ \int_{\mathbb{R}^d\times S^{d-1}} \Big[H_{\sqrt{A(x)\xi.\xi}}\sigma_0(B)\Big]d\mu^t(x,\xi)\end{aligned}$$

En identifiant nous obtenons

$$\{\partial_t \pm H_{\sqrt{A(x)\xi.\xi}} \pm d(x,\xi)\}\mu^t_\pm = 0. \tag{13}$$

Pour terminer la preuve, il suffit d'appliquer le théorème d'Ascoli à la suite $\underline{f}(t) = (B\underline{v}^t_\pm, \underline{v}^t_\pm)$. ∎

Pour étudier les solutions de (13), nous introduisons les lignes du champ $H_{\sqrt{A(x)\xi.\xi}}$; pour tout $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ nous désignons par $(x(t,x_0,\xi_0);\xi(t,x_0,\xi_0))$ la solution de l'équation

$$\dot{x}(t) = \nabla_\xi\sqrt{A(x)\xi.\xi};\quad \dot{\xi}(t) = -\nabla_x\sqrt{A(x)\xi.\xi};\quad (x(0),\xi(0)) = (x_0,\xi_0). \tag{14}$$

Nous pouvons d'abord montrer que les solutions de (14) vérifient

$$A(x(t))\xi(t).\xi(t) = A(x_0)\xi_0.\xi_0. \tag{15}$$

Ainsi, si nous notons par $S^*(\mathbb{R}^d, A^{-1})$ le conormal de l'espace $\mathbb{R}^d$ lorsqu'il est muni de sa métrique Riemannienne A^{-1},

$$S^*(\mathbb{R}^d, A^{-1}) := \{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^d, \quad A(x)\xi.\xi = 1\},$$

alors la régularité de la métrique A^{-1} ainsi que l'hypothèse $(\mathcal{H})$ montrent que les solutions de (15) sont globales et que le flot Φ_t associé à $H_{\sqrt{A(x)\xi.\xi}}$ laisse invariant l'espace $S^*(\mathbb{R}^d, A^{-1})$.

Remarque 3.1. *Dans le cas constant, il est possible d'expliciter les lignes du champ Hamiltonien $H_{|\xi|}$. En effet, $x(t) = \frac{\xi_0}{|\xi_0|}t + x_0; \xi(t) = \xi_0; t \in \mathbb{R}$. Dans le cas variable, il n'est pas question d'expliciter les solutions de (13), même dans le cas simple d'une matrice diagonale $A(x) = \lambda(x)Id$. Cependant, il est possible d'écrire les solutions de (14) en fonction du flot ϕ_t, en effet on a*

$$\mu_+^t(x,\xi) = e^{-\int_0^t d(\Phi_{s-t}(x,\xi))ds}\mu_+^0(\Phi_{-t}(x,\xi)).$$

Maintenant la preuve du théorème 2.2 découle de l'équivalence suivante, qui est une conséquence de la proposition 3.1

$$\mu_\pm^t(x,\xi)\perp\delta_{x-y}d\sigma(\xi) \Longleftrightarrow \mu_\pm^0(x,\xi)\perp\Phi_{\pm t}(\delta_{x-y}d\sigma(\xi))$$

et du lemme de concentration compacité microlocal dû à P. Gérard [3].

Références

[1] S. Alinhac et P. Gérard : *Opérateurs pseudodifférentiels et théorème de Nash-Moser,* Savoirs actuels, Interéditions, 1991.

[2] H. Bahouri and P. Gérard : *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations*, American Journal of Mathematics, **121**, pp. 131-175, 1999.

[3] P. Gérard : *Microlocal defect mesures*, Comm. Partial diff. Eq. , **16**, pp. 1761-1794, 1991.

[4] P. Gérard : *Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations*, J. Funct. Anal. , **141**, pp. 60-98, 1996.

[5] J. Ginibre and G. Velo : *The global Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equation*, Math.Z , **189**, pp. 487-505, 1985.

[6] J. Ginibre and G. Velo : *Generalized Strichartz inequalities for the wave equations*, J. Functional Analysis , **133**, pp. 50-68, 1995.

[7] M. Grillakis : *Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity*, Annal. of math. , **132**, pp. 485-509, 1990.

[8] M. Grillakis : *Regularity for the wave equation with a critical nonlinearity*, Comm. Pure Appl. Math , **XLVI**, pp. 749-774, 1992.

[9] S. Ibrahim : *Geometrics-optics for nonlinear concentrating waves in focusing and nonfocusing two geometries*, Preprint de *International Centre for Theoretical Physics*, IC/2002/137 et à paraître dans C.C.M.

[10] S. Ibrahim et M. Majdoub : *Existence globale de solutions pour l'équation des ondes semi-linéaire critique à coefficients variables*, Comptes- Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I, **328**, pp. 579-584, 1999.

[11] S. Ibrahim et M. Majdoub : *Solutions globales de l'équation des ondes semi-linéaire critique à coefficients variables*, Bull. de la Société Mathématique de France, **131**(1), pp.1-22, 2003.

[12] L. V. Kapitanski : *The Cauchy problem for a semilinear wave equation*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Math. Inst. Steklov(LOMI), **181-182**, pp. 24-64 and 38-85, 1990.

[13] L. V. Kapitanski : *Some generalizations of the Strichartz-Brenner inequality*, Leningrad Math. Journ., **1**, # 10, pp. 693-726, 1990.

[14] L. V. Kapitanski : *The Cauchy problem for a semilinear wave equation II*, J. of Soviet Math., **62**, Série I, pp. 2746-2777, 1992.

[15] L. V. Kapitanski : *Global and unique weak solutions of nonlinear wave equations*, Mathematical Research Letters, Vol. 1, N 2, pp. 211-224, 1994.

[16] G. Lebeau : *Optique non linéaire et ondes sur critiques*, Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, 1999-2000, École Polytechnique, Palaiseau.

[17] J. Shatah and M. Struwe : *Regularity results for nonlinear wave equations*, Ann.of Math., **2**, $n°$ 138 pp. 503-518, 1993.

[18] J. Shatah and M. Struwe : *Well-Posedness in the energy space for semilinear wave equation with critical growth*, IMRN, **7**, pp. 303-309, 1994.

[19] H. Smith : *Une paramétrix pour les équations des ondes à coefficients* $\mathcal{C}^{1,1}$, Ann. de l'Institut de Fourier, T.48 Fasc. 3, pp. 797-835, 1998.

[20] M. Struwe : *Semilinear wave equations*, Bull. Amer. Math. Soc., **N.S**, $n°$ 26, pp. 53-85, 1992.

[21] L. Tartar : *H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Set. A **115**, 193-230, 1990.

[22] C. Zuily : *Solutions en grand temps d'équations d'ondes non linéaire*, Séminaire Bourbaki, **779**, 1993-1994.

Slim Ibrahim
Faculté des Sciences de Bizerte,
Département de Mathématiques,
Jarzouna 7021, Bizerte, Tunisie.
E-mail : *slim.ibrahim@fsb.rnu.tn*

Mohamed Majdoub
Faculté des Sciences de Tunis,
Département de Mathématiques,
Campus universitaire 1060,
Tunis, Tunisie.
E-mail : *mohamed.majdoub@fst.rnu.tn*