Sur quelques problèmes liés au flot géodésique

Hamid-Reza Fanaï *

Résumé

Dans cette note, nous considérons l'invariance par symétrie des mesures harmoniques et la symétrie asymptotique de la fonction de Green associées aux variétés compactes de courbure négative.

1 Les mesures harmoniques

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de courbure sectionnelle strictement négative. Une mesure naturelle invariante par le flot géodésique définie sur SM le fibré unitaire tangent est la mesure harmonique ν introduite par F. Ledrappier (voir [L1]). On peut la représenter à partir de la famille de mesures harmoniques ν_x sur $\partial\widetilde{M}$ le bord géométrique du revêtement universel, qui rsout le problème de Dirichlet. Cette famille est définie de la manière suivante. Pour toute fonction continue f sur $\partial\widetilde{M}$, d'après [A] ou [S], il existe une unique fonction u_f définie sur $\widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$ telle que : $\Delta u_f = 0$ sur $\widetilde{M}$ et $u_f(z) \to f(\xi)$ lorsque $z \to \xi$, $\xi \in \partial\widetilde{M}$. Pour tout $x \in \widetilde{M}$, l'application $f \to u_f(x)$ est une fonctionnelle linéaire positive sur l'espace $C(\partial\widetilde{M})$ des fonctions continues sur $\partial\widetilde{M}$ et donc définie une mesure de probabilité ν_x sur $\partial\widetilde{M}$. On sait que pour $x, y \in \widetilde{M}$, les deux mesures harmoniques ν_x et ν_y sont équivalentes et on a :

$$\frac{d\nu_y}{d\nu_x}(\xi) = K(x, y, \xi)$$

*The author is indebted to the Research Council of Sharif University of Technology for support. Also the author is deeply grateful to professor Gérard Besson for his helpful discussions.

Received by the editors January 2002.

Communicated by L. Van Hecke.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 58F17.

Key words and phrases : flot géodésique, mesures invariantes.

où $K(x,y,\xi)$ est le noyau de Poisson. Il est défini à partir de la fonction de Green $G(x,y)$ dont l'existence est assurée par [AS]. On a en fait : $K(x,y,\xi) = \lim_{z\to\xi} \frac{G(y,z)}{G(x,z)}$. Alors la mesure harmonique ν sur SM peut s'écrire comme (voir [Kai2]) :

$$d\nu(\xi,\eta) = G_x(\xi,\eta)\ d\nu_x(\xi)\ d\nu_x(\eta)$$

où la mesure ν a été considérée comme une mesure sur $\partial\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M}$ et $G_x(\xi,\eta)$ est égale à :

$$G_x(\xi,\eta) = \lim_{\substack{y\to\xi \\ z\to\eta}} \frac{G(y,z)}{G(x,y)G(x,z)}.$$

On note m la mesure de Liouville sur SM. La conjecture de Sullivan ([S]) affirme que si $m = \nu$, alors la variété (M,g) est localement symétrique. L'égalité $m = \nu$ implique que les mesures $\nu_x(\xi)$ et $\nu_x(-_x\ \xi)$ sont équivalentes. On constate que la démarche utilisée dans [F] mène à la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative. Si les mesures ν_x sont invariantes par symétrie, alors $m = \nu$.*

Remarque. Ce résultat a été déjà démontré dans [Y4]. Il est à noter que l'on peut exprimer l'invariance par symétrie des mesures ν_x en terme de l'égalité $\omega^s = \omega^u$, où ω^s est la mesure harmonique sur SM associée au feuilletage stable ([L3], [Y3], aussi [Y2]).

Démonstration — On a $\omega^s = \omega^u$. D'après [L3] ou [Y3], pour toute fonction $\varphi : SM \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à ω^s et dérivable dans la direction du flot géodésique X, on a :

$$\int_{SM} \dot\varphi(v) + (\tau(v) - \operatorname{tr} U^+(-v))\varphi(v)\ d\omega^s(v)$$

$$= \int_{SM} \dot\varphi(v) + (\operatorname{tr} U^+(v) - \tau(-v))\varphi(v)\ d\omega^u(v)$$

où $\tau(v) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0} \ln K(v(0), v(t), v(+\infty))$, $U^+(v)$ est la seconde forme fondamentale de l'horosphère instable associée à v au point base de v, et $v(t)$ désigne la géodésique définie par v.

On a alors : $\tau(v) - \operatorname{tr} U^+(-v) = \operatorname{tr} U^+(v) - \tau(-v)$, car le support de ω^u est tout espace SM ([G]). Ceci implique en particulier :

$$\begin{aligned}\int_{SM} (\tau(v) - \operatorname{tr} U^+(-v))\ dm(v) &= \int_{SM} (\operatorname{tr} U^+(v) - \tau(-v))\ dm(v) \\ &= \int_{SM} (\operatorname{tr} U^+(-v) - \tau(v))\ dm(v)\end{aligned}$$

car $dm(v) = dm(-v)$. On trouve alors : $\int_{SM} (\tau(v) - \operatorname{tr} U^+(-v))\ dm(v) = 0$. On en déduit :

$$\int_{SM} \tau(v)\ dm(v) = \int_{SM} \operatorname{tr} U^+(-v)\ dm(v) = h_m \qquad (\star)$$

où h_m désigne l'entropie métrique ([Pe]). On sait que la fonction $\tau(v)$ est höldérienne et la mesure harmonique ν est l'unique état d'équilibre associé ([B1] et [L1]). D'après [L1], pour toute mesure δ sur SM invariante par le flot géodésique, on a :

$$h_\delta - \int \tau \; d\delta \leq h_\nu - \int \tau \; d\nu = 0$$

avec égalité, si et seulement si $\delta = \nu$, où h_δ désigne l'entropie du flot géodésique par rapport à δ. Maintenant l'égalité $(\star)$ montre que $m = \nu$. ∎

Pour tout $x \in \widetilde{M}$, on désigne par m_x la mesure de Lebesgue sur $S_x\widetilde{M}$ ou sur $\partial\widetilde{M}$. La conjecture de Sullivan affirme que si pour tout x les mesures m_x et ν_x sont équivalentes, alors la variété (M, g) est localement symétrique. Dans [Y1], C. B. Yue montre que si pour tout $x, m_x = \nu_x$, alors g est asymptotiquement harmonique et avec [BCG], elle est donc localement symétrique. Ici, nous donnons une démonstration simplifiée.

Théorème 1.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative. Si pour tout $x, m_x = \nu_x$, alors g est localement symétrique.*

Démonstration — On a $m_x = \nu_x$, en particulier ν_x est invariante par symétrie et la proposition précédente nous donne $m = \nu$. Dans [Kai1], V. A. Kaimanovich introduit les deux quantités suivantes :

$$\alpha = \int_{SM} \operatorname{tr} U^+(-v) \; d\omega^s(v)$$

$$\beta = h_\nu \alpha = \int_{SM} \|\nabla \ln K(v(0), \cdot, v(+\infty))\|^2 \; d\omega^s(v).$$

On sait que $\alpha^2 \leq \beta$ avec égalité, si et seulement si (M, g) asymptotiquement harmonique (voir [L3]). Avec $m_x = \nu_x$, on a $\omega^s = m$ et donc :

$$\alpha = \int_{SM} \operatorname{tr} U^+(-v) \; dm(v) = h_m = h_\nu \Rightarrow \beta = h_\nu \alpha = h_\nu^2 = \alpha^2. \quad ∎$$

2 La symétrie asymptotique de $G(x, y)$

Le résultat de [L4] nous a donné envie de regarder le lien entre l'invariance par symétrie des mesures ν_x et la symétrie asymptotique de la fonction de Green. On dit que la fonction de Green est asymptotiquement symétrique si pour tout $x \in \widetilde{M}$ et tout $\xi \in \partial\widetilde{M}$, on a :

$$\lim_{y \to \xi} \frac{G(x, y)}{G(x, -_x \, y)} = 1$$

où y varie sur la géodésique définie par le couple (x, ξ) et $-_x \, y$ désigne l'image symétrique de y par rapport à x sur cette géodésique. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative. Si la fonction de Green est asymptotiquement symétrique, alors la mesure de Bowen-Margulis μ coïncide avec la mesure harmonique ν. En particulier, si $n = 2$, g est de courbure constante.*

Démonstration — Soient $x \in \widetilde{M}$ et $\xi \in \partial \widetilde{M}$. Soit $\gamma(t)$ la géodésique définie par (x, ξ) paramétrée par longueur d'arc, avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(t) \to \xi$ quand $t \to +\infty$. On écrit également $\gamma(t) = v(t)$ où $v = \dot{\gamma}(0) \in S_g\widetilde{M}$. On fixe un point y sur la géodésique $\gamma(t)$ avec $y = v(t')$ pour un $t' > 0$. Il est clair que $-_x\, \xi = -_y\, \xi$. On a :

$$K(x, y, \xi) = \lim_{z \to \xi} \frac{G(y, z)}{G(x, z)} = \lim_{z \to \xi} \frac{G(y, -_y\, z)}{G(x, -_x\, z)}$$

où z varie sur la géodésique $\gamma(t)$. On a donc :

$$K(x, y, \xi) = \lim_{z \to \xi} \frac{G(y, -_y\, z)}{G(x, -_y\, z)} \cdot \frac{G(x, -_y\, z)}{G(x, -_x\, z)}$$

d'où :

$$K(x, y, \xi) = K(x, y, -_x\, \xi) \cdot \lim_{R \to +\infty} \frac{G(w(0), w(R))}{G(w(0), w(R+t))} \qquad (\star)$$

où $w = -v$ et $t = 2t'$. On montre que cette dernière limite ne change pas lorsque w bouge par le flot géodésique. Pour ceci, il faut prouver que pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{G(w(s), w(R+s))}{G(w(s), w(R+s+t))} = \lim_{R \to +\infty} \frac{G(w(0), w(R))}{G(w(0), w(R+t))}$$

et il suffit donc de montrer que :

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{G(w(s), w(R+s))}{G(w(0), w(R))} \cdot \frac{G(w(0), w(R+t))}{G(w(s), w(R+s+t))} = 1.$$

Ceci est vrai si la limite $\lim_{R \to +\infty} \dfrac{G(w(s), w(R+s))}{G(w(0), w(R))}$ existe dans $\mathbb{R}^*$. Grâce à $(\star)$, on voit que c'est le cas puisque :

$$\frac{G(w(s), w(R+s))}{G(w(0), w(R))} = \frac{G(w(s), w(R+s))}{G(w(s), w(R))} \cdot \frac{G(w(s), w(R))}{G(w(0), w(R))}$$

et chaque terme a une limite dans $\mathbb{R}^*$. En effet, la limite $\lim_{R \to +\infty} \dfrac{G(w(s), w(R+s))}{G(w(s), w(R))}$ existe grâce à $(\star)$ et la limite $\lim_{R \to +\infty} \dfrac{G(w(s), w(R))}{G(w(0), w(R))}$ existe aussi et elle est égale à $K(w(0), w(s), -_x\, \xi)$.

Ceci montre qu'il existe une fonction $\lambda(t)$, telle que pour tout vecteur v le long de la géodésique γ, on a :

$$K(v(0), v(t), v(+\infty)) = K(v(0), v(t), v(-\infty)) \cdot \lambda(t).$$

On a alors : $\tau(v) + \tau(-v) = \dfrac{d}{dt}\,|_{t=0}\,\ln \lambda(t)$ ce qui est invariante par le flot géodésique. La fonction $\tau(v)+\tau(-v)$ étant invariante par l'action du groupe fondamental de M est donc constante sur SM. Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que : $\tau(v) + \tau(-v) = 2\lambda$. On obtient alors $\lambda = \int_{SM} \tau(v)\, d\nu(v)$. On sait que par ailleurs :

$$h_{top} - \int_{SM} \tau(v)\, d\mu(v) \leq 0$$

et avec $d\mu(v) = d\mu(-v)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{SM} (\tau(v) - \lambda)\, d\mu(v) &= \int_{SM} (\tau(-v) - \lambda)\, d\mu(-v) \\ &= \int_{SM} (\lambda - \tau(v))\, d\mu(v) = 0 \end{aligned}$$

par conséquent $\lambda = h_\nu = \int_{SM} \tau\, d\mu$. Ce qui implique $h_{top} - h_\nu \leq 0$. On en déduit $\mu = \nu$. ■

Remarque. L'égalité $\mu = \nu$ implique qu'il existe une fonction U sur SM telle que :

$$\dot{U}(v) = \tau(v) - h_{top}\,.$$

La relation $\tau(v)+\tau(-v) = 2h_{top}$ donne $\dot{U}(-v) = -\dot{U}(v)$ et également $U(-v) = U(v)$. Malheureusement on n'est pas capable de conclure que ceci entraîne la régularité C^∞ de $\operatorname{tr} U^+$, comme on l'a fait dans [F]. En fait, en suivant [L2] (p. 282) on obtient l'égalité suivante :

$$\Delta^s U(v) + h_{top}^2 - h_{top} \cdot \operatorname{tr} U^+(-v) + \|\nabla^s U(v)\|^2 + 2h_{top} \cdot \dot{U}(v) = 0$$

où $U(-v) = U(v)$. Mais ceci ne donne rien sur un éventuel lien entre $\operatorname{tr} U^+(v)$ et $\operatorname{tr} U^+(-v)$.

La fonction $\lambda(t)$ trouvée dans le théorème 2.1 vérifie la relation suivante :

$$\lambda(t+s) = \lambda(t) \cdot \lambda(s)$$

ce qui est facile à démontrer. On obtient donc $\lambda(t) = \exp(kt)$ et par consquent $k = 2h_{top}$. Ceci implique l'égalité plus forte suivante :

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{G(v(0), v(R+t))}{G(v(0), v(R))} = \exp(-h_{top} t).$$

En appliquant le corollaire 3.11 de [H], on a également :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall v \in SM, \forall t, C^{-1} \leq \frac{K(v(0), v(t), v(+\infty))}{\exp(h_{top} t)} \leq C.$$

On obtient aussi :

$$\forall v \in SM,\ \lim_{t \to +\infty} \frac{\log K(v(0), v(t), v(+\infty))}{t} = h_{top}.$$

Références

[A] M. T. Anderson. — *The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature.* J. Diff. Geometry, 18, 1983, p. 701-721.

[AS] M. T. Anderson et R. Schoen. — *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature.* Ann. of Math., 121, 1985, p. 429-461.

[BCG] G. Besson, G. Courtois et S. Gallot. — *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative.* GAFA, 5, 1995, p. 731-799.

[B1] R. Bowen. — *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.* Lecture Notes in Math., 470, Springer-Verlag, 1975.

[F] H. R. Fanaï. — *Trois propriétés du flot géodésique en courbure négative.* C. R. Acad. Sci. Paris, t.323, Série I, 1996, p. 1039-1045.

[G] L. Garnett. — *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion.* J. Fun. Anal., 51, 1983, p. 285-311.

[H] U. Hamenstädt. — *An explicite description of harmonic measure.* Math. Z., 205, 1990, p. 287-299.

[Kai1] V. A. Kaimanovich. — *Brownian motion and harmonic functions on covering manifolds. An entropy approach.* Soviet Math. Dokl., 33, 1986, p. 812-816.

[Kai2] V. A. Kaimanovich. — *Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds.* Ann. I. H. P. Physique théorique), 53, 1990, p. 361-393.

[L1] F. Ledrappier. — *Ergodic properties of Brownian motion on covers of compact negatively curved manifolds.* Bol. Soc. Mat. Bras., 19, 1988, p. 115-140.

[L2] F. Ledrappier. — *Harmonic measures and Bowen-Margulis measures.* Isr. J. Math., 71, 1990, p. 275-287.

[L3] F. Ledrappier. — *Ergodic properties of the stable foliations.* Ergodic theory and related topics, III, Springer Lecture Notes in Math., 1514, 1992, p. 131-145.

[L4] F. Ledrappier. — *A renewal theorem for the distance in negative curvature.* Proc. Symp. Pure Math., 57, 1995, p. 351-360.

[Pe] Ya. B. Pesin. — *Equations for the entropy of the geodesic flow on a compact Riemannian manifold without conjugate points.* Math. Notes, 24, 1978, p. 796-805.

[S] D. Sullivan. — *The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold.* J. Diff. Geometry, 18, 1983, p. 723-732.

[Y1] C. B. Yue. — *On the Sullivan conjecture.* Random & Comp. Dyn., 1, 1992, p. 131-145.

[Y2] C. B. Yue. — *Rigidity and dynamics around manifolds of negative curvature.* Math. Research Let., 1, 1994, p. 123-147.

[Y3] C. B. Yue. — *Brownian motion on Anosov foliations and manifolds of negative curvature.* J. Diff. Geometry, 41, 1995, p. 159-183.

[Y4] C. B. Yue. — *Conditional measures and flip invariance of Bowen-Margulis and harmonic measures on manifolds of negative curvature.* Erg. Th. & Dyn. Syst., 15, 1995, p. 807-811.

Department of Mathematical Sciences,
Sharif University of Technology,
P.O.Box 11365-9415,
Tehran, Iran
email : fanai@sharif.ac.ir