球對稱なる方列の分類について

柴　田　隆　史

(昭和 17 年 11 月 9 日受附)

§1.　準備。

先きに波動幾何學による宇宙構造論並びに星雲及び太陽系の理論を建て，巨視的，超巨視的現象について論じたのであるが，更に進んで同じ體系の下に於て微視的現象としての原子構造の理論を建てることが出來る。從つて之に依つて超巨視より巨視更に微視的現象へと理論を發展させることが出來る。そこでこゝでは準備として先づその基礎となる可き座標系に對する一樣性の問題について述べることにする。先きに得た宇宙構造論並びに星雲及び太陽系の理論は觀測座標系に對する一樣性，非一樣性を考へることに依つて一貫した理論として體系付けられるものである[(1)] 即ち狀態函數 ψ の滿足す可き基本方程式を決定するに當り，宇宙構造論に於ては宇宙構造は汎る觀測座標系に對して一樣な性質を有するものであると考へ，又星雲及び太陽系の理論に於てはそれ等は一點の周圍に於てのみ一樣な性質を有する現象即ち球對稱の性質を有する現象であると見て，それ等に對する ψ の基本方程式を定め之に星雲及び太陽系を特徴付けると考へられる假定を附加して夫々の理論を建て，一貫した理論體系を作ることが出來たのである。

そこで更に進んで，同じ理論體系の下に於て，微視的現象として水素原子の構造を論ずるとき之は如何なる性質を持つた現象として考ふ可きであるかといふに，之も又星雲及び太陽系の理論と同樣一點の周圍では一樣な性質を持つた現象の一つであると考へるのが至當であらう。然らばこの微視的現象に於ける一樣性と星雲及び太陽系の理論に於ける一樣性とは全然同一のものであらうか，若し異るとすれば如何なる點に於て異るとす可きであらうか。先づ之等について吟味する必要がある。即ち狀態函數 ψ の基本方程式が球對稱の性質を持つてゐるといふときの意味を吟味する必要がある。その爲に先づこの論文では球對稱の性質を有する方列についてその性質を明かにすることを考へる。

---

(1)　本紀要, **12** (昭 17), 137.

§2. 線素及びその演算子に關する一様性；スピノール。

四次元時空 r, θ, φ, t に於て $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$, $x^4=t$ とおき，座標の變換

$$x'^i=f^i(x) \qquad (i=1, \dots, 4) \tag{2.1}$$

を考へる時，この變換に對して時空が一様であるといふことは，その計量に關しては，線素 $ds^2=g_{ij}dx^idx^j$ の値のみならずその形が不變であることを意味する。即ち (2.1) に依つて $g_{ij}(x)$ が變換されて g'_{ij} になるとき

$$g'_{ij}=g_{ij}(x') \tag{2.2}$$

なることで表される。$g_{ij}(x')$ は $g_{ij}(x)$ の x を x' とおきかへたものを表す。

今 ds^2 を一次化してその演算子

$$ds=dx^i\gamma_i \tag{2.3}$$

を考へる。こゝに γ_i は

$$\gamma_{(i}\gamma_{j)}=g_{ij} \tag{2.4}$$

なる關係を滿足する 4—4 方列である。次にこの演算子に關する一様性を考へるに，之はその固有値を與へる式が變換に對して不變であることを意味すると考へる可きであらう。演算子 (2.3) の固有値 λ は次の式で與へられる

$$dx^i\gamma_i\psi=\lambda\psi \tag{2.5}$$

こゝに ψ は 1—4 方列である。從つて演算子に關する一様性は次のことを意味するとす可きであらう。變換 (2.1) に依つて dx^i が

$$dx'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}dx^j \tag{2.6}$$

なる變換を受けた時，演算子 $dx'^i\gamma_i(x')$ の固有値は $dx^i\gamma_i(x)$ の固有値と同一である。(こゝに $\gamma_i(x')$ は $\gamma_i(x)$ に於ける x^i の代りに x'^i をおきかへたものを表す)。即ち (2.5) が成立するときは又次式も成立する。

$$dx'^i\gamma_i(x')\psi'=\lambda\psi'. \tag{2.7}$$

このやうに演算子に關する一様性を定めるならば ψ' は次の式に依つて與へられることが證明出來る。

$$\psi'=S^{-1}\psi \tag{2.8}$$

こゝに S は

$$\gamma'_i=S\gamma_i(x')S^{-1} \qquad \left(\text{但し}\ \gamma'_i=\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\gamma_h(x)\right)$$

なる關係を滿足する 4—4 方列である。かゝる S は (2.2) なる關係を滿足す

る如き變換 (2.1) に對して常に必ず唯一に存在する。

證明。(2.2) なる關係を滿足する座標變換 (2.1) に對しては

$$g'_{lm}=\gamma_{(l}(x')\gamma_{m)}(x')$$

であり又一方

$$g'_{lm}=\gamma'_{(l}\gamma'_{m)}$$

でもあるから γ'_i なる方列と $\gamma_i(x')$ なる方列とは必ず

$$\gamma'_i=S\gamma_i(x')S^{-1}$$

なる關係で結ばれてゐなければならぬ。之を用れば (2.5) の左邊は次のやうに表される

$$\begin{aligned} dx^i\gamma_i\psi &= dx'^i\gamma'_i\psi \\ &= dx'^iS\gamma_i(x')S^{-1}\psi \end{aligned} \tag{2.9}$$

故に

$$\psi'=S^{-1}\psi$$

とおけば (2.5) より, (2.9) の兩邊に S^{-1} を施し,

$$dx'^i\gamma_i(x')\psi'=\lambda\psi'$$

を得る。　(證明終)

座標變換 (2.1) に對して (2.8) 式の變換を受けるものをスピノールと呼ぶことにする。上述のことより次の結論を得る。(2.1) なる座標變換に依つて dx^i が (2.6) なる變換を受ける時二つの演算子 $dx^i\gamma_i(x)$ と $dx'^i\gamma_i(x')$ とが同一の固有値を有する爲には, 即ち

$$dx^i\gamma_i(x)\psi=\lambda\psi, \qquad dx'^i\gamma_i(x')\psi'=\lambda\psi'$$

なる爲には ψ は (2.8) なる變換を受けねばならぬ。從つて演算子に關する一樣性は ψ がスピノールであることを意味する。

§3. 座標變換に對して不變なる ψ の基本方程式の種類; 巨視的現象に於ける一樣性と微視的現象に於ける一樣性。

今後常に座標變換としては (2.2) なる關係を滿足する如きものに限ることにする。かゝる座標變換 (2.1) に對して ψ の基本方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma_i\right)\psi=\textstyle\sum_i\psi \qquad (i=1,\dots,4) \tag{3.1}$$

が不變であるといふことは次のことを意味する。[1] (但し $\sum_i$ は x の函數を元

(1) 本紀要, **11** (1941), 35.

素として有する 4—4 方列である)。二つの座標系 x と x' とに對して

$$\gamma'_i = S\gamma_i(x')S^{-1} \tag{3.2}$$

なる關係より定まる方列 S をとるとき $\psi\big(x(x')\big)$ を ψ' とすれば

$$S^{-1}\psi' \qquad と \qquad \psi(x')$$

とが同一の形の微分方程式を滿足する。即ち (3.1) が成立するとき

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x'^i} - \Gamma_i(x')\right\}S^{-1}\psi' = \textstyle\sum_i(x')S^{-1}\psi'$$

である。從つて (3.1) の解を $\psi(x\,;\,c)$ (但し $c(c_1, c_2, c_3, c_4)$ は積分常數を表す) とし $\psi\big(x(x')\,;\,c\big) = \psi'$ とすれば $\psi(x;c)$ と ψ' とは次の關係で結ばれてゐる。

$$\psi' = S\psi(x\,;\,c')$$

こゝに c' は常數ではあるが一般に c とは異る。

このことは又次の條件と同一である。$\sum_i$ なる方列が (2.1) に依つて變換されて

$$\textstyle\sum'_i = \dfrac{\partial x^h}{\partial x'^i}\sum_h$$

となるとき，$\sum'_i$ と $\sum_i$ に於ける x の代りにそのまゝ x' をおいたものとが (3.2) と同一の關係で結ばれてゐることである。即ち

$$\textstyle\sum'_i = S\sum_i(x')S^{-1} \tag{3.3}$$

なることである。換言すれば $\sum_i$ を「セデニオン」に展開して

$$\textstyle\sum_i = A_i^{\cdot jk}\gamma_j\gamma_k + A_i + A_i^{\cdot 5}\gamma_5 + A_i^{\cdot j}\gamma_j + A_i^{\cdot j5}\gamma_j\gamma_5$$

とするとき $A_i^{\cdot jk}, A_i, A_i^{\cdot 5}, A_i^{\cdot j}, A_i^{\cdot j5}$ 等が變換に對して不變なるテンソル，ベクトル等であることを表す。

(3.3) なる關係を滿足する方列を (2.1) なる變換に對して不變なる方列と呼ぶことにする。特に (2.1) なる變換が一點の周りの回轉群を表すとき (以下之を G_3 で表すことにする) 之に對して不變であるやうな方列を球對稱の方列と名付ける。

球對稱の性質を有する現象に對する ψ の基本方程式は (3.1) 式に於ける $\sum_i$ が球對稱である如き方列に依つて與へられる。先きに論じた如く[(1)]，巨視的現象に於ける星雲及び太陽系の理論に於てはそれ等を球對稱の性質を有す

(1) 本紀要，**11** (1941), 47.

る現象と考へて (3.1) 式に於ける $\sum_i$ の形を定めたのである。

然るに更に進んで微視的現象に於ける水素原子の構造を考へるに之もやはり球對稱の性質を有する現象とす可きであらう。然しこの球對稱の性質は巨視的現象に於ける球對稱の性質と根本的に異ると見なければならぬ點がある。即ち水素原子の構造に於ては，量子數に依つて指定される多くの定常狀態が存在し，この各定常狀態を全體として考へた時之が全體として球對稱の性質を有すると見る可きであらう。從つて定常狀態の各々は巨視的現象に於けると同一の意味で球對稱である必要はない。例へば $\sum_i$ なる方列の集りが G_3 に依つて不變の性質を有するものでもよい。之を數學的に云ひ表せば，$\sum_i$ なる方列が變數 x の他に他の徑數 $a, b, c, \ldots$ を含み $a, b, c, \ldots$ が種々の値を取るとき，その各々の値に對應して定まる $\sum_i$ が全體として球對稱の性質を有する可きである。即ちかゝる $\sum_i$ を $\sum_i(x;\ a, b, c, \ldots)$ で表し，之が G_3 なる變換群に依つて $\sum_i'$ になつたとすれば，$\sum_i'$ は $\sum_i$ に於ける x の代りに x' をそのまゝ代入し，徑數 $a, b, c, \ldots$ を適當な値にとつたものと次の關係で結ばれてゐる可きである。

$$\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\sum_h(x;\ a, b, c, \ldots)\equiv\sum_i'=S\sum_i(x';\ a', b', c', \ldots)S^{-1},$$

こゝに $a', b', c', \ldots$ は一般には $a, b, c, \ldots$ とは異る常數である。かゝる性質を有する $\sum_i(x;\ a, b, c, \ldots)$ の集りを球對稱の方列の系と稱することにする。水素原子の如き構造はかゝる $\sum_i(x;\ a, b, c, \ldots)$ を用ひて

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma_i\right)\psi=\sum_i(x;\ a, b, c, \ldots)\psi$$

なる形の ψ の基本方程式に依つて與へられると考へられる。

そこでかゝる $\sum_i(x;a, b, c, \ldots)$ の形を決定することが問題になるが，先づ第一に徑數 $a, b, c, \ldots$ の個數を檢べることが必要である。次節に於て此の點から吟味することにする。

§4. 球對稱なる方列の系の分類。

$\sum_i(x; e_1, e_2, \ldots, e_p)$ を球對稱なる方列の系とするとき，徑數 $e_1, e_2, \ldots, e_p$ の個數は本質的のものが幾個あるかを檢べる。G_3 なる變換に依つて $\sum_i(x;$ $e_1, e_2, \ldots, e_p)$ が $\sum_i'$ になつたとすれば球對稱の性質から

$$\sum_i'=S\sum_i(x';\ e_1', e_1', \ldots, e_p')S^{-1}$$

である。こゝに $e_1', e_2', \ldots, e_p'$ は常數ではあるが一般に $e_1, e_2, \ldots e_p$ の函數とし

て與へられる。而して G_3 なる變換 $x\rightarrow x'$ に對應して $e\rightarrow e'$ なる變換が對應し之は G_3 と同型なる群を作る。今 G_3 なる變換群を無限小變換に依つて表して

$$x'^i=x^i+\xi^i_\alpha\delta\tau \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,3,4 \\ \alpha=1,2,3 \end{pmatrix}$$

とするとき，之に對應して生ずる $(e_1,\dots e_p)\rightarrow(e_1',\dots,e_p')$ なる變換を $(e_1,\dots,e_p$ の添數を上にあげて)

$$e'^h=e^h+\eta^h_\alpha\delta\tau \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\dots,p \\ \alpha=1,2,3 \end{pmatrix}$$

で表す。然る時は G_3 なる變換群と之に對應する $e\rightarrow e'$ なる變換とを一緒にした變換群は

$$U_\alpha=\xi^i_\alpha\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^h_\alpha\frac{\partial}{\partial e^h}$$

なる無限小變換の演算子に依つて與へられる。

今 $$\eta^h_\alpha\frac{\partial f}{\partial e^h}=0$$

なる關係を滿足する f を求めるにかゝる f は少くとも $(p-3)$ 個あり。之を

$$G_s(e^1,\dots,e^p) \qquad (s=1,\dots q) \qquad p>q\geqq p-3.$$

とする。然らば $G_s=\omega_s$ とおき，徑數の變換を行つて $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_q,e_1,\dots e_{p-q}$ を新しい徑數に選べば次の三通りの場合が起り得る。

$$\textstyle\sum_i(x;\ e_1,e_2,e_3,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{p-3})$$

$$\textstyle\sum_i(x;\ e_1,e_2,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{p-2})$$

$$\textstyle\sum_i(x;\ e_1,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{p-1})$$

而して G_3 なる變換に對して $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_q$ は變化しないから徑數の役目はしない。故に以後は $\sum_i$ の中の $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_q$ は無視して考へて差支へない。即ち本質的の役目をする徑數の個數は 3 個, 2 個, 1 個の場合の三通りがあり得る。次にその各々の場合を吟味する。

I. 徑數 1 個の時 ($e_1=e$ と表す)。

G_3 なる變換群は次の 3 個の無限小變換の演算子に依つて表される。

$$\left.\begin{aligned} X_1&=-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\ X_2&=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

$$X_3=\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

e の變換が之と同型なる變換群を作ることより r,θ,φ と e とを一緒にした變換群を求めれば，之は次の 3 個の無限小變換の演算子に依つて表されることが證明出來る。(附錄 1)

$$\left.\begin{aligned}U_1&=-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+i\cos e\frac{\partial}{\partial e}\\U_2&=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+i\sin e\frac{\partial}{\partial e}\\U_3&=\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial e}\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

然るに之に依つて不變なる方列 $\sum_i$ の系を求めるに，計算の結果かゝる $\sum_i$ は全然 G_3 によつて不變なるものと一致して徑數 e を含まないことが解る(附錄 II)。故に次の定理を得る。**G_3 に依つて不變なる方列の系は徑數を只 1 個含む如きものは存在せず**。徑數を含むとすれば 2 個以上か或は全然含まないかの何れかである。

II. 徑數 2 個の時。

この時は徑數 e_1, e_2 の變換群は必ず變數 θ, φ に於ける G_3 なる變換群と等値なることが證明出來る (附錄 III)。從つてこのときの變數と徑數とを一緒にした變換群は次の演算子に依つて表される。(1)

$$\left.\begin{aligned}U_1&=-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}-\sin e_2\frac{\partial}{\partial e_1}-\cot e_1\cos e_2\frac{\partial}{\partial e_2}\\U_2&=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+\cos e_2\frac{\partial}{\partial e_1}-\cot e_1\sin e_2\frac{\partial}{\partial e_2}\\U_3&=\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial e_2}\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

III. 徑數 3 個の時。

徑數 e_1, e_2, e_3 の變換群は G_3 の徑數群 (G_3 群に於ける徑數の變換が作る群) と等值であることが證明出來る(附錄 IV)。而してその一つの形は例へば(4.2)なる群に於て θ, φ, e を e_1, e_2, e_3, とおいたもので與へられる。然しこの時は G_3 に對して不變なる方列の系は如何なる $\sum_i(x)$ をも含み得ることになり，今考へてゐる如き $\sum_i$ に對する條件の系を作らない。

(1) (4.3) なる演算子に依つて不變なる方列の系は實際に求められる。その形は次に發表する論文に於て述べることにする。

§5. 結論。

以上のことから吾々は次の結論を下すことが出來る。ψ の基本方程式の系

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma_i\right)\psi=\sum\nolimits_i(x;\ e)\psi$$

を考へるとき之が系全體として球對稱なる爲には $\sum_i$ の中に含まれる徑數は本質的なものは 2 個に限る。

徑數の個數が 2 個の場合の球對稱なる ψ の基本方程式の系を考へ，之に水素原子の構造を特徴付けると考へられる適當な假定を附加することに依つて水素原子の理論を建てることが出來ると思はれる。

附錄 I.

徑數 e の變換を無限小變換の換算子に依つて表し

$$Y_\alpha=E_\alpha\frac{\partial}{\partial e}\qquad(\alpha=1,2,3)$$

とする。e に適當な變換を施して $E_3=1$ になる如く，即ち

$$Y_3=\frac{\partial}{\partial e}$$

なる如くする。(4.1) に依つて與へられる X_1, X_2, X_3, は

$$(X_2X_1)=X_3,\quad (X_3X_2)=X_1,\quad (X_1X_3)=X_2$$

なる關係を滿足するから，之と同型なる Y_1, Y_2, Y_3 も同様の關係を滿足しなければならぬ。即ち

$$(Y_2Y_1)=Y_3,\quad (Y_3Y_2)=Y_1,\quad (Y_1Y_3)=Y_2$$

でなければならぬ。從つて

$$E_2E_1'-E_1E_2'=1,\ E_2'=E_1,\ -E_1'=E_2.$$

こゝに「ダッシュ」は e についての微分を表す。最後の二式より次の式を得る。

$$E_1=A\sin e+B\cos e\qquad(A, B\ \text{は常數})$$
$$E_2=-A\cos e+B\sin e$$

之を第一式に代入して

$$A^2+B^2=1$$

を得る。故に $A=i\sin\omega$, $B=i\cos\omega$ とおけば

$$E_1=i\cos(e-\omega)$$
$$E_2=i\sin(e-\omega)$$

となる。故に今 $e-\omega=\tau$ とおき τ を新しい徑數に選び之を改めて e と書く

ことにすれば

$$Y_1=i\cos e\frac{\partial}{\partial e}$$

$$Y_2=i\sin e\frac{\partial}{\partial e}$$

$$Y_3=\frac{\partial}{\partial e}$$

となる。故に變換 G_3 と之に對する e の變換とを一緒にした變換群は

$$U_\alpha=X_\alpha+Y_\alpha \qquad (\alpha=1,2,3)$$

即ち (4.2) に依つて與へられる。

附錄 II.

(4.2) に依つて表される變換群に對して不變なる方列の系 $\sum_i(x;e)$ を求めるに，今

$$\sum_i=A_i+A_i^{\cdot 5}\gamma_5+A_i^{\cdot jk}\gamma_j\gamma_k+A_i^{\cdot j}\gamma_j+A_i^{\cdot j5}\gamma_j\gamma_5$$

とおけば $A_i, A_i^{\cdot 5}, A_i^{\cdot jk}, A_i^{\cdot j}, A_i^{\cdot j5}$ 等が (4.2) に對して不變であるやうに定めればよい。

その爲に先づ (4.2) に對する不變のスカラー f を求めるに

$$U_\alpha f=0 \qquad (\alpha=1,2,3)$$

なる式は變數の數は θ, φ, e の 3 個であつて，式の數も又 3 個なる故上式を充す f は θ, φ, e を含まず，r と t のみの函數である。

次に (4.2) に對する不變のベクトル A_i は

$$U_\alpha A_i+\frac{\partial\xi_\alpha^e}{\partial x^i}A_e=0 \qquad (\alpha=1,2,3)$$

なる式より定まる。上式の實際の形を書き下せば次のやうになる。

$$\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}-i\cos e\frac{\partial}{\partial e}\right)A_i$$
$$-\delta_i^2\frac{1}{\sin^2\theta}\cos\varphi A_3+\delta_i^3(\cos\varphi A_2-\cot\theta\sin\varphi A_3)=0,$$

$$\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+i\sin e\frac{\partial}{\partial e}\right)A_i$$
$$+\delta_i^2\frac{1}{\sin^2\theta}\sin\varphi A_3-\delta_i^3(\sin\varphi A_2+\cot\theta\cos\varphi A_3)=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial e}\right)A_i=0.$$

最初の二式より

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\sin(e-\varphi)\frac{\partial}{\partial e}\right)A_i-\delta_i^3\cot\theta\, A_3=0\,,$$

$$\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}-i\cos(e-\varphi)\frac{\partial}{\partial e}\right)A_i-\delta_i^2\frac{1}{\sin^2\theta}A_3+\delta_i^3A_2=0$$

を得，最後の式より A_i は φ と e とに關しては $(e-\varphi)$ の形で含むことが解る。故に今

$$e-\varphi=w\,,\qquad \varphi=\varphi$$

とおき w と φ とを新しい變數にとるときは上の條件式は次のやうに表される

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\sin w\frac{\partial}{\partial w}\right)A_i-\delta_i^3\cot\theta A_3=0\,,$$

$$\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}-\cot\theta\frac{\partial}{\partial w}-i\cos w\frac{\partial}{\partial w}\right)A_i-\delta_i^2\frac{1}{\sin^2\theta}A_3+\delta_i^3A_2=0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}A_e=0$$

$i=1,2,3,4$ とおくことに依つて，A_1 と A_4 とは r と t のみの函數であり A_2, A_3 は次の式を滿足することが解る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\sin w\frac{\partial}{\partial w}\right)A_2=0\,,$$

$$(\qquad ,, \qquad)A_3-\cot\theta\, A_3=0\,,$$

$$(\cot\theta+i\cos w)\frac{\partial}{\partial w}A_2+\frac{1}{\sin^2\theta}A_3=0\,,$$

$$(\qquad ,, \qquad)\frac{\partial}{\partial w}A_3-A_2=0\,.$$

之等の式を滿足する A_2, A_3 は

$$A_2=A_3=0$$

以外に存在しない。故に以上をまとめて次の結果を得る。(4.2) に對する不變のベクトル A_i は次の形で與へられる。

$$[A_1(r,t),\quad 0,\quad 0,\quad A_4(r,t)]$$

即ち之は G_3 なる廻轉群に對する不變のベクトルと同一であり，徑數 e を全然含まない。

同樣の計算に依つて，(4.2) に對する不變のテンソル $A_i^{\cdot j}, A_i^{\cdot jk}$ も又徑數 e を全然含まず，G_3 なる廻轉群に對する不變のテンソルと同一であることが解る。依つて吾々は (4.2) に對する不變の方列 $\sum_i$ は徑數 e を全然含まず G_3 なる廻轉群に對する不變なる方列と一致することを知る。

附錄 III.

e_1, e_2, の變換群を

$$Y_\alpha = \eta_\alpha^h \frac{\partial}{\partial e^h} \qquad (h=1,2;\ \alpha=1,2,3)$$

に依つて表し，且つ e^1, e^2, を適當に選んで

$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial e^2}$$

の形にしたものとする。Y_1, Y_2, Y_3, が X_1, X_2, X_3 と同型の群を作ることより

$$(Y_2 Y_1) = Y_3, \quad (Y_3 Y_2) = Y_1, \quad (Y_1 Y_3) = Y_2 \qquad \text{(III, 1)}$$

でなければならぬ。最後の二式は

$$\frac{\partial \eta_2^h}{\partial e_2} = \eta_1^h, \qquad -\frac{\partial \eta_1^h}{\partial e_2} = \eta_2^h \qquad (h=1,2)$$

と表され，之より

$$\eta_1^h = -A^h \sin e_2 + B^h \cos e_2 \qquad (h=1,2)$$
$$\eta_2^h = A^h \cos e_2 + B^h \sin e_2$$

を得る。こゝに A^h, B^h は e_1 のみの函數である。$h=1$ に對するこの式を變形して

$$\eta_1^1 = -A \sin(e_2 + \omega)$$
$$\eta_2^1 = A \cos(e_2 + \omega)$$

(A 及び ω は e_1 のみの函數) とおけば

$$Y_1 = -A \sin(e_2+\omega)\frac{\partial}{\partial e_1} + (-A^2 \sin e_2 + B^2 \cos e_2)\frac{\partial}{\partial e_2}$$

$$Y_2 = A \cos(e_2+\omega)\frac{\partial}{\partial e_1} + (A^2 \cos e_2 + B^2 \sin e_2)\frac{\partial}{\partial e_2}$$

$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial e_2}$$

と表される。今

$$e_2 + \omega = \bar{e}_2, \qquad e_1 = \bar{e}_1$$

とおき $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ を新しい變數に選ぶときは

$$\frac{\partial}{\partial e_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{e}_2}, \qquad \frac{\partial}{\partial e_1} = \frac{\partial}{\partial \bar{e}_1} + \frac{d\omega}{de_1}\frac{\partial}{\partial \bar{e}_2}$$

なる故 Y_1, Y_2, Y_3 は夫々次の形で表される。

$$Y_1 = -A \sin \bar{e}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{e}_1} + (B \cos \bar{e}_2 - C \sin \bar{e}_2)\frac{\partial}{\partial \bar{e}_2} \Bigg)$$

$$\left.\begin{aligned} Y_2 &= A\cos\bar{e}_2\frac{\partial}{\partial\bar{e}_1}+(B\sin\bar{e}_2+C\cos\bar{e}_2)\frac{\partial}{\partial\bar{e}_2} \\ Y_3 &= \frac{\partial}{\partial\bar{e}_2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III, 2)}$$

こゝに，A, B, C は何れも $\bar{e}_1$ のみの函數である。之を (III, 1) の第1式に代入すれば次の條件式を得る。

$$-A\cos\bar{e}_2 A'\sin\bar{e}_2-(B\sin\bar{e}_2+C\cos\bar{e}_2)A\cos\bar{e}_2$$
$$+A\sin\bar{e}_2 A'\cos\bar{e}_2+(B\cos\bar{e}_2-C\sin\bar{e}_2)A\sin\bar{e}_2=0\,,$$
$$A\cos\bar{e}_2(B'\cos\bar{e}_2-C'\sin\bar{e}_2)-(B\sin\bar{e}_2+C\cos\bar{e}_2)^2$$
$$+A\sin\bar{e}_2(B'\sin\bar{e}_2+C'\cos\bar{e}_2)-(B\cos\bar{e}_2-C\sin\bar{e}_2)^2=1\,.$$

こゝに「ダッシユ」は $\bar{e}_1$ についての微分を表す。上式は

$$AC=0\,,$$
$$AB'-B^2-C^2=1$$

となる。$A=0$ なるときは $\bar{e}_1$ は變化しないことになり徑數が 2 個あることに反す。故に必ず $A\neq0$ である。從つて上式より

$$C=0\,,$$
$$AB'-B^2=1$$

を得る。A が實際に $\bar{e}_1$ を含むときには

$$A\frac{\partial}{\partial\bar{e}_1}=\frac{\partial}{\partial\theta}$$

となるやうに新しい變數 θ を選ぶ。即ち $A\dfrac{dF}{d\bar{e}_1}=1$ となる如き函數 F をとり $F=\theta$ とおき θ を新しい變數に選ぶ。然るときは初めから $A=1$ と考へてよい。そうすれば上の條件式は

$$B'-B^2=1$$

となり[1]

$$B=-\cot(\theta+c) \qquad (c \text{ は積分常數})$$

を得る。從つて $\theta+c=\bar{\theta}$ とおき $\bar{\theta}$ を改めて θ と書くことにし，$\bar{e}_2=\varphi$ とおけば (III, 2) は X_1, X_2, X_3 と一致する。即ち Y_1, Y_2, Y_3, は X_1, X_2, X_3 と等値である。

---

(1) $B=$常數の時 $B=\pm i$ の解を得るけれ共この時は $\sum_i(x\,;\,e_1,\,e_2)$ に於ける e_1, e_2 が變換されて實數 ($-\infty$ より $+\infty$ 迄) から虛數を含むものにかわる。この場合は吾々は省くことにする。

附錄 IV.

徑數 e_1, e_2, e_3 の變換群は必ず可遷的でなければならぬ。何となれば若し非遷的であるとすれば，之は徑數が 2 個の場合に歸着するから。可遷的であるならば，今の場合は演算子の個數が 3 個であつて e_1, e_2, e_3 の個數と同一である故，e_1, e_2, e_3 の變換群は單純可遷群でなければならぬ。然るに與へられた群と同型なる單純可遷群は等値なるものを除いては唯一に定まる。一方又 G_3 の徑數群は G_3 と同型なる可遷群である。故に e_1, e_2, e_3 の變換群は必ず G_3 の徑數群と等値である。