共通分々解の出來る環とその冪等イデヤル

森　新治郎

(昭和 17 年 11 月 9 日受附)

共通分々解[1]の可能を假定した可換環 $\mathfrak{R}$ に於ては，任意の素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_3 \subset \cdots$ が必ず有限個の項で終らねばならぬことを證明し，且つこのやうな環 $\mathfrak{R}$ 內に，冪等イデヤルが存在し得る條件を論ずるのが，本論の目的である。

龜井君[2]が以前に共通分々解の成立つ爲に必要なる一條件を得た。然しこの條件が上述の素イデヤル連鎖有限といふ條件と獨立であるか，否かは未だ不明である。それにしても，この兩條件を假定すれば，共通分々解は成立つ。[3] それ故にこの兩條件を合はせて，共通分々解の可能なる爲に必要且充分なる條件としても差支はない。然し兩條件の間の關係が闡明にされないと物足りないが，その爲には龜井君の條件から，素イデヤル連鎖有限の條件を導き出し得るか，否かを解決すればよい。

著者は前文[4]に於て，イデヤルの約鎖律が假定された可換環內の冪等イデヤルは，必ず冪等元素を有することを明かにした。勿論共通分々解の可能性をのみ假定した環に於ては，必ずしも約鎖律は成立しない。それで共通分々解を假定せる環の冪等イデヤルは冪等元素を含むことを證せる本論は，前文の一擴張であり，又著者等が企圖せる一般可換環に於ての冪等イデヤル研究に對する一礎石ででもある。

環に於ける共通分々解の可能性

本節で取扱ふ環 $\mathfrak{R}$ は可換で，その上共通分々解が假定されてゐるものとする。

共通分々解　環の任意のイデヤルは凡て有限個の强準素イデヤルの共通分として表はされる。

---

(1) 環 $\mathfrak{R}$ の任意のイデヤル $\mathfrak{a}$ は凡て有限個の强準素イデヤル $\mathfrak{q}_i$ の共通分 $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ として表はされ得るとき，$\mathfrak{R}$ に於て**共通分々解**が成立つといふ。

(2) E. Kamei, Proc. Imp. Acad. Tokyo **XVII** (1941), 95.

(3) S. Mori, 本誌, **11** (1942), 129.

(4) S. Mori, 本誌, **1** (1931), 174.

このやうな假定を設けるならば，次の定理を得る。

定理 1.[1] 環 $\mathfrak{R}$ が共通分々解を滿足するならば，イデヤル商の連鎖 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\subseteq\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\subset\cdots$ は凡て有限個の項で終らねばならない。

この定理に由て，環 $\mathfrak{R}$ の素イデヤル連鎖の有限性を證明するのであるが，先づ次の定理 2, 3 及び 4 を補助として，擧げねばならない。

定理 2. 環 $\mathfrak{R}$ では共通分々解が可能であるとし，$\mathfrak{p}$ をその一つの素イデヤルとする。$\mathfrak{p}$ がイデヤル $\mathfrak{a}$ $(\neq\mathfrak{R})$ に屬する[2]のは，

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(r),\qquad r\notin\mathfrak{a}$$

なる元素 r が存在し得るときに限る。

證 (1) $$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$$

を $\mathfrak{a}$ の强準素イデヤルに由る一つの最短なる表現とし，$\mathfrak{q}_i$ が屬する素イデヤルを $\mathfrak{p}_i$ とする。$\mathfrak{d}_i=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_{i-1}\cap\mathfrak{q}_{i+1}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$ は $\mathfrak{q}_i$ に含まれず，$\mathfrak{p}_i^{k_i}\subseteqq\mathfrak{q}_i$ なる正整數 k_i が存在するから，(1) に由て $\mathfrak{p}_i^{k_i}\mathfrak{d}_i\subseteqq\mathfrak{a}$ を得る。それ故に $\mathfrak{p}_i(r_i)\subseteqq\mathfrak{a}$，$r_i\in\mathfrak{d}_i$，$r_i\notin\mathfrak{a}$ なる一元素 r_i が存在する。若し $\mathfrak{p}_i$ に含まれない一元素 r に對して $rr_i\in\mathfrak{a}$ となるならば，$rr_i\in\mathfrak{q}_i$，$r\notin\mathfrak{p}_i$ に由て $r_i\in\mathfrak{q}_i$，從つて $r_i\in\mathfrak{a}$ なる矛盾を生ずる。故に $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{a}:(r_i)$，$r_i\notin\mathfrak{a}$ なる關係を得る。

素イデヤル $\mathfrak{p}$ に對して

(2) $$\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(r),\ r\notin\mathfrak{a}$$

なる元素 r が存在するとしよう。更に $\mathfrak{p}$ は凡ての $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ と異なつてゐて，$\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_m$ には含まれず，殘りの $\mathfrak{p}_{m+1},\dots\mathfrak{p}_n$ のいづれにも含まれるとする。$\mathfrak{p}(r)\subseteqq\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{q}_i$ に由て，上の假定から $r\in\mathfrak{q}_i(i=1,2,\dots,m)$ を得る。又 (2) に由て $(r)\mathfrak{p}_{m+1}^{k_{m+1}}\cdots\mathfrak{p}_n^{k_n}\subsetneqq\mathfrak{a}$ を得るから，$rr'\notin\mathfrak{a}$ なる元素 r' を $\mathfrak{q}_{m+1}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$ 內に見出し得る。この關係と上述の r の性質とから $rr'\in\mathfrak{a}$ なる矛盾を生ずる。故に $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\dots,\mathfrak{p}_n$ のいづれか一つと一致せねばならぬ。即ち $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}$ に屬する。

定理 3. 環 $\mathfrak{R}$ に於て共通分々解を可能とし，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{R}$ の任意のイデヤルとする。$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルとし，$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$ に屬する强準素イデヤルと

---

(1) E. Kamei, Proc. Imp. Acad. Tokyo **XVII** (1941), 95.

(2) イデヤル $\mathfrak{a}$ を强準素イデヤルの共通分として表はすとき，その準素イデヤルが屬する素イデヤルは，分解の如何に拘らず一定である。これらの素イデヤルを $\mathfrak{a}$ **に屬する素イデヤル**といふ。

すれば, $\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{a}$ の準素成分[1]である爲に必要且充分なる條件は, $\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{a}$ を含み, $\mathfrak{a}$ に含まれない $\mathfrak{q}$ の元素 q に對して, $\mathfrak{q}'=\mathfrak{a}:(q)$ は決して $\mathfrak{p}$ に屬する强準素イデヤルにならないことである。

證 (1) $$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$$
を準素イデヤルの共通分としての最短表現とし, $\mathfrak{q}_i$ の屬する素イデヤルを $\mathfrak{p}_i$ とする。若し $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_i$ ならば, 上の條件は明かに必要である。故に $n\geqq 2$ の場合をのみ考へる。q_i を $\mathfrak{a}$ に含まれない $\mathfrak{q}_i$ の一元素とし, イデヤル商 $\mathfrak{q}'=\mathfrak{a}:(q_i)$ を $\mathfrak{p}_i$ に屬する一つの强準素イデヤルとすれば, 適當に大きな正整數 k に對して $\mathfrak{p}_i^k\leqq\mathfrak{q}'$ を得る。今準素成分 $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_n$ の內で $\mathfrak{p}_i$ に含まれない凡てを $\mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}, \dots, \mathfrak{q}_{i_m}$ とすれば, $\mathfrak{q}'$ の性質から

$$\mathfrak{p}_i^k\mathfrak{q}_{i_1}\mathfrak{q}_{i_2}\cdots\mathfrak{q}_{i_m}(q_i)\leqq\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{q}_{i_1}\mathfrak{q}_{i_2}\cdots\mathfrak{q}_{i_m}(q_i)\lneqq\mathfrak{a}$$

を得る。從つて

$$(2)\quad \mathfrak{p}_i(r_i)\leqq\mathfrak{a}, \quad (r_i)\leqq(q_i), (r_i)\leqq\mathfrak{q}_{i_j} \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad r_i\notin\mathfrak{a}$$

なる關係を滿足する一元素 r_i が存在する。他方に於て (1) から $\mathfrak{p}_i(r_i)\leqq\mathfrak{q}_j$ $(j=1, 2, \dots, n)$ を得るから, (2) の前半の關係よりは凡ての準素成分 $\mathfrak{q}_j$ に含まれることゝなり, (2) の最後の關係と矛盾する。故に $\mathfrak{a}$ に屬しない元素 q_i が $\mathfrak{a}$ の準素成分 $\mathfrak{q}_i$ 內にあれば, これに對するイデヤル商 $\mathfrak{q}'=\mathfrak{a}:(q_i)$ は $\mathfrak{p}_i$ に屬する强準素イデヤルにならない。

$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルとし, $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{a}$ を含み $\mathfrak{p}$ に屬する强準素イデヤルとする。その上 $\mathfrak{a}$ に含まれない $\mathfrak{q}$ の元素 q に對して, イデヤル商 $\mathfrak{q}'=\mathfrak{a}:(q)$ は $\mathfrak{p}$ に屬する强準素イデヤルにならないとする。環 $\mathfrak{R}$ に對する假定から關係 (1) を生じ, 準素成分 $\mathfrak{q}_i$ の屬する素イデヤル $\mathfrak{p}_i$ は定義に由て $\mathfrak{a}$ に屬する素イデヤルである。從つて $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}_i$ の內の一つ, 例へば $\mathfrak{p}_1$ と一致する。$\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{q}$ であるから

$$\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{d}=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{q}_2\cap\mathfrak{q}_3\cap\dots\cap\mathfrak{q}_n$$

を得る。若し $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{d}$ とすれば, $\mathfrak{a}$ に屬しない $\mathfrak{d}$ の一元素 d が存在する。d は $\mathfrak{a}$ に關して冪零であるから, $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}:(d)\supset\mathfrak{a}$ を得る。$\mathfrak{r}$ が素イデヤルでないならば, $\mathfrak{r}_1=\mathfrak{a}:(dd_1)\supset\mathfrak{r}\supset\mathfrak{a}$, $dd_1\notin\mathfrak{a}$ なるやうに元素 d_1 を選び得る。然し定

---

(1) 强準素イデヤルの共通分としての最短表現 $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$ に於ける準素イデヤル $\mathfrak{q}_i$ を $\mathfrak{a}$ の**準素成分**といふ。

理 1 に由てこのやうな操作は有限回で終らねばならぬから，遂に $\mathfrak{p}'=\mathfrak{a}:(dd_1\dots d_m)$, $dd_1\dots d_m\notin\mathfrak{a}$, $dd_1\dots d_m\in\mathfrak{d}$ なる素イデヤル $\mathfrak{p}'$ と元素 $dd_1\dots d_m$ とを得る。定理 2 に由て $\mathfrak{p}'$ は $\mathfrak{a}$ に屬するから，例へば $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}$ となる。從つて $\mathfrak{q}$ 内にあつて $\mathfrak{a}$ に屬しない元素 $dd_1\dots d_m$ に對して，イデヤル商 $\mathfrak{a}:(dd_1\dots d_m)$ が $\mathfrak{p}$ に屬する强準素イデヤルになつて，$\mathfrak{q}$ の性質と矛盾する。故に $\mathfrak{a}=\mathfrak{d}$ となり，又 $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{q}$ なれば $\mathfrak{q}\lneqq\mathfrak{q}_2\cap\mathfrak{q}_3\cap\dots\cap\mathfrak{q}_n$ であるから，$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{a}$ の準素成分である。

定理 4. 環 $\mathfrak{R}$ に於て共通分々解を可能とし，$\mathfrak{R}$ の素イデヤル $\mathfrak{p}$ と任意のイデヤル $\mathfrak{a}$ との間に，次の關係の成立を假定する。

$$\mathfrak{p}\subset\mathfrak{a},\qquad (\mathfrak{p},\mathfrak{a}^k)=(\mathfrak{p},\mathfrak{a}^{2k})=\mathfrak{b},$$

此處で k は有限なる一正整數を示す。上の假定のもとに，剩餘環 $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}=\bar{\mathfrak{R}}$ に於て $\mathfrak{b}$ に對應するイデヤルを $\bar{\mathfrak{b}}$ とすれば，$\bar{\mathfrak{b}}$ は $\bar{\mathfrak{R}}$ と合致して單位元素を持つ。

證 $\bar{\mathfrak{R}}$ に於て $\mathfrak{a}$ に對應するイデヤルを $\bar{\mathfrak{a}}$ とすれば，

$$\bar{\mathfrak{b}}=\bar{\mathfrak{a}}^k=\bar{\mathfrak{a}}^{2k}\neq(0)$$

となる。環 $\mathfrak{R}$ に對する假定から $\bar{\mathfrak{R}}$ に於ても共通分々解が可能である。その上 $\mathfrak{p}$ は素イデヤルであるから，剩餘環 $\bar{\mathfrak{R}}$ には零因子がない。それ故に記號の簡單の爲に，以後 $\mathfrak{R}$ は零因子を有せずとし，

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^k=\mathfrak{a}^{2k}\neq(0) \tag{1}$$

なる條件より，$\mathfrak{b}=\mathfrak{R}$ にして $\mathfrak{R}$ に單位元素が存在することを證明する。

b を $\mathfrak{b}$ 内の零でない一元素とすれば，

$$(b)=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n \tag{2}$$

$$(b)\mathfrak{b}=\mathfrak{q}_1'\cap\mathfrak{q}_2'\cap\dots\cap\mathfrak{q}_{n'}' \tag{3}$$

なる共通分々解を得る。若し (b) が $\mathfrak{R}$ に屬する强準素イデヤルであるならば，適當なる正整數 l に對して $(b)\geqq\mathfrak{R}^l\geqq\mathfrak{a}^{kl}$ となる。故に (1) から $(b)=\mathfrak{b}$, 從つて $(b)=(b^2)$ を得る。これから $be=b$ なる元素 e を $\mathfrak{b}$ 内に見出し得るのみならず，零因子がないことから，e は明かに $\mathfrak{R}$ の單位元素であつて，$\mathfrak{b}=\mathfrak{R}$ となる。それ故に (b) が $\mathfrak{R}$ に屬する强準素イデヤルでない場合を論ずればよいのであるが，その爲には次の二つの場合に分けると都合がよい。

I　(b) に屬する素イデヤル $\mathfrak{p}_i(i=1,2,\dots,n)$ はいづれも $\mathfrak{a}$ を含まないとする。$\mathfrak{p}_i$ は (b) に屬する素イデヤルであるから，定理 2 に由て

(4) $\mathfrak{p}_i=(b):(r_i), \quad r_i \notin (b)$

なる元素 r_i が存在する。若し $(r_i)\mathfrak{a}^k \leqq (b)\mathfrak{a}^k$ であるならば, $(r_i)\mathfrak{a}^k \leqq (b) \leqq \mathfrak{q}_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ を得る。$\mathfrak{p}_j$ は $\mathfrak{a}$ を含まないから, $(r_i) \leqq \mathfrak{q}_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, 即ち $(r_i) \leqq (b)$ なる矛盾を生ず。それ故に $(r_i)\mathfrak{a}^k \notin (b)\mathfrak{a}^k$ であるから, $r_i a \notin (b)\mathfrak{a}^k$, $a \in \mathfrak{a}^k$ なる元素 a が存在する。然もこの場合 a を $\mathfrak{p}_i$ に含まれないやうに取り得る。若し一つの元素 r に對して $rr_i a \notin (b)\mathfrak{a}^k \leqq (b)$ であるならば, (4) に由て $ra \notin \mathfrak{p}_i$ となる。然し $a \notin \mathfrak{p}_i$ なるやうに元素 a は選ばれてゐるから, $r \in \mathfrak{p}_i$ である。故に $(b)\mathfrak{a}^k:(r_i a) \leqq \mathfrak{p}_i$ なる關係を得る。從て (4) と $a \in \mathfrak{a}^k$ とから, $\mathfrak{p}_i=(b)\mathfrak{b}:(r_i a)$, $r_i a \notin (b)\mathfrak{b}$ となるから, 定理 2 に由て $\mathfrak{p}_i$ はイデヤル $(b)\mathfrak{b}$ に屬する。かくして (b) に屬する凡ての素イデヤルは $(b)\mathfrak{b}$ にも屬する。

(b) は $\mathfrak{R}$ に屬する强準素イデヤルでないから, $(b)\mathfrak{b}$ も亦 $\mathfrak{R}$ に屬する强準素イデヤルではない。今 $\mathfrak{q}_i$ 内の一元素 q_i に對して

(5) $\mathfrak{q}_i''=(b)\mathfrak{b}:(q_i), \quad q_i \notin (b)\mathfrak{b}$

が $\mathfrak{p}_i$ に屬する强準素イデヤルであつたと假定する。此處で $\mathfrak{p}_i$ は假定に由て $\mathfrak{R}$ とは合致しない。それ故に若し $\mathfrak{p}_i$ に含まれない一元素 r に對して $(r)(q_i) \leqq (b)$ であるならば, $(r)(q_i)\mathfrak{b} \leqq (b)\mathfrak{b}$ となり, $(r)\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{p}_i$ に含まれないことから, (5) に對して矛盾を生ず。故に $\mathfrak{q}_i'' \leqq (b):(q_i) \leqq \mathfrak{p}_i$, $(q_i) \notin (b)$ である可きだ。この關係を原として, 定理 1 に由て元素 $q_i q' \cdots q^{(m)}$ を (b) に含まれないやうに, 且又イデヤル商 $(b):(q_i q' \cdots q^{(m)})$ が $\mathfrak{p}_i$ に屬する强準素イデヤルであるやうに選び得る。この事は定理 3 に由て, $\mathfrak{q}_i$ が (b) の一準素成分であることゝ矛盾する。故に $\mathfrak{q}_i$ 内の元素に對しては, (5) のイデヤル商は $\mathfrak{p}_i$ に屬する强準素イデヤルであり得ない。從つて定理 3 に由て, (b) の凡ての準素成分 $\mathfrak{q}_i$ は $(b)\mathfrak{b}$ の準素成分となる。

上の結果を纒めて

(6) $(b)\mathfrak{b}=\mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_n \frown \mathfrak{q}_{n+1}' \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{n'}'$

を得る。若し $\mathfrak{q}_{n+1}'$ が b を含まねば, $(b)\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{q}_{n+1}'$ から $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{p}_{n+1}'$ となる。一方に於て $(b) \leqq \mathfrak{b}=\mathfrak{b}^2$ であるから, $(b) \leqq \mathfrak{b}^l \leqq \mathfrak{p}_{n+1}'^{l} \leqq \mathfrak{q}_{n+1}'$ なる矛盾を生ず。故に $\mathfrak{q}_{n+1}', \ldots, \mathfrak{q}_{n'}'$ は皆元素 b を含まねばならぬ。それ故に (6) から $(b)\mathfrak{b}=(b)$ を得る。從て $be=b$ なる元素 e を $\mathfrak{b}$ 内に選び得て, 零因子のないことから e は $\mathfrak{R}$ の單位元素となり, $\mathfrak{b}=\mathfrak{R}$ ともなる。

II (b) に屬する素イデヤルの内の少くとも一つが $\mathfrak{a}$ を含むとする。(2) に

於て (b) に屬する素イデヤル $\mathfrak{p}_i(i=1,2,\ldots,n)$ の內で, $\mathfrak{p}_{k+1}, \mathfrak{p}_{k+2}, \ldots, \mathfrak{p}_n$ だけは $\mathfrak{a}$ を含み, 他は凡て $\mathfrak{a}$ を含まないとする。(1) より $(b)\leqq\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^2$ であるから, (2) に由て

$$(7)\qquad (b)=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_k\frown\mathfrak{b}$$

となる。若し $\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_k\leqq\mathfrak{b}$ であるならば, $(b)=\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^2=(b^2)$ となり, これから $\mathfrak{b}=\mathfrak{R}$ で, 然も $\mathfrak{R}$ に單位元素が存在することを容易に得る。それで $\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_k\lneqq\mathfrak{b}$ なる場合を次に論じる。$\mathfrak{q}_j\,(j=1,2,\ldots k)$の屬する素イデヤル $\mathfrak{p}_j$ は假定に由て $\mathfrak{a}$ を含まないから, I の場合と全く同様にして, $\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\ldots,\mathfrak{q}_k$ は $(b)\mathfrak{b}$ の準素成分となる。故に (3) から

$$(8)\qquad (b)\mathfrak{b}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\mathfrak{q}_k\frown\mathfrak{q}'_{k+1}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}'_{n'}$$

を得る。此處で $\mathfrak{q}'_{k+1}$ に屬する素イデヤル $\mathfrak{p}'_{k+1}$ が $\mathfrak{a}$ を含めば, 明かに $(b)\leqq\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^2=\mathfrak{b}^l\leqq\mathfrak{q}'_{k+1}$ となる。又 $\mathfrak{p}'_{k+1}$ が $\mathfrak{a}$ を含まねば, $\mathfrak{q}'_{k+1}$ が準素イデヤルであることゝ, $(b)\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{q}'_{k+1}$ とから, $(b)\leqq\mathfrak{q}'_{k+1}$ を得る。從つて (8) から

$$(b)\mathfrak{b}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_k\frown(b)$$

を生じ, (7) に由て $(b)\mathfrak{b}=(b)$ を得る。故に $\mathfrak{b}=\mathfrak{R}$ であり, $\mathfrak{R}$ は單位元素を有する。以上を綜合して定理 4 の成立を證し得た。

以上に述べた諸定理を補助として, 本節の目的である次の定理を證明しよう。

定理 5. 環 $\mathfrak{R}$ に於て共通分々解が可能であるならば, 任意の素イデヤル連鎖 $\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\cdots$ は有限個の項で終らねばならない。

證 (1) $$\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\cdots$$

なる素イデヤルの無限の連鎖が存在すると假定し, これに由て矛盾の生ずることを示せば, 本定理は證明される。上の連鎖の素イデヤルから次のイデヤル(1)

$$(2)\qquad \mathfrak{a}=(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2^2,\mathfrak{p}_3^3,\ldots,\mathfrak{p}_m^m,\ldots)$$

を作れば, $\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{R}$ となる。共通分々解の假定に由て,

$$(3)\qquad \mathfrak{a}=\mathfrak{q}'_1\frown\mathfrak{q}'_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}'_n$$

となり, 此處で $\mathfrak{q}'_i$ は素イデヤル $\mathfrak{p}'_i$ に屬する準素イデヤルを示す。(1), (2)

---

(1) $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\ldots,\mathfrak{a}_n,\ldots)$ は, 無限個のイデヤル $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n,\ldots$ の內から任意の有限個のイデヤル $\mathfrak{a}_{i_1},\mathfrak{a}_{i_2},\ldots,\mathfrak{a}_{i_n}$ を選び, それらの元素の和 $a_{i_1}+a_{i_2}\cdots+a_{i_n}$ として表はされる凡ての元素の集合を示す。この集合は明かに一つのイデヤルである。E. Noether, Math. Ann. **83** (1921), 30.

と (3) から明かに

(4) $$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{p}'_i \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

なることを要する。又 $\mathfrak{q}'_i$ は $\mathfrak{p}'_i$ に屬する强準素イデヤルであるから,

$$\mathfrak{p}'^{h_i}_i \leqq \mathfrak{q}'_i \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

なる有限の正整數 h_i が存在する。それで $h_1, h_2, \dots, h_n$ の內の最大なるものを h で表はせば, (4) に由て

(5) $$\mathfrak{p}^h_j \leqq \mathfrak{q}'_i \qquad (i=1, 2, \dots, n,\ j=1, 2, 3, \dots)$$

を得る。今次のやうなイデヤル

$$\mathfrak{a}'=(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^h_{h+1}, \mathfrak{p}^h_{h+2} \dots)$$

を作れば, (2) に由て $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}'$ である。又 (2), (3) と (5) から, $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{q}'_1 \cap \mathfrak{q}'_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}'_n$ を得るから, $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$ となる。即ち

(6) $$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^{h+1}_{h+1}, \dots, \mathfrak{p}^k_k, \dots) \\ &= (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^h_{h+1}, \mathfrak{p}^h_{h+2}, \dots, \mathfrak{p}^h_k, \dots), \qquad h \leqq k\end{aligned}$$

となる。此の式から

$$\mathfrak{p}^h_{h+1} \leqq \mathfrak{a} = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}^{h+1}_{h+1}, \dots)$$

を得, 從つて

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}_{h+1}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}^{h+1}_{h+1}, \dots), \mathfrak{p}^{h+2}_{h+2}, \dots) \\ &= (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^{h+2}_{h+1}, \mathfrak{p}^{h+2}_{h+2}, \dots)\end{aligned}$$

となる。更に同樣の操作を行つて,

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^2_{h+1}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}^{h+1}_{h+1}, \dots), \mathfrak{p}^{h+2}_{h+2}, \dots) \\ &= (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^{h+3}_{h+1}, \mathfrak{p}^{h+2}_{h+2},, \dots)\end{aligned}$$

を得る。斯くして一般に

(7) $$\mathfrak{a}=(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^{h+k_1}_{h+1}, \mathfrak{p}^{h+2}_{h+2}, \dots), \qquad k_1 \geqq 0$$

となり, k_1 は任意の整數としてよい。又 (6) と (7) とから,

$$\mathfrak{a}=(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}^2_2, \dots, \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^{h+k_1}_{h+1}, \mathfrak{p}^{h+1}_{h+2}, \mathfrak{p}^h_{h+3}, \dots)$$

を得る故に, (7) より

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= (\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}^h_h,\ \mathfrak{p}^{h+k_1}_{h+1}, \mathfrak{p}_{h+2}(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^{h+k_1}_{h+1}, \mathfrak{p}^{h+2}_{h+2}, \dots),\ \mathfrak{p}^{h+3}_{h+3}, \dots) \\ &= (\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^{h+k_1}_{h+1}, \mathfrak{p}^{h+3}_{h+2}, \mathfrak{p}^{h+3}_{h+3}, \dots)\end{aligned}$$

を得る。順次この操作を繼續して, 一般に

(8) $$\mathfrak{a}=(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}^h_h, \mathfrak{p}^{h+k_1}_{h+1},\ \mathfrak{p}^{h+k_2}_{h+2}, \mathfrak{p}^{h+k_3}_{h+3}, \dots), \qquad k \geqq 0,\ k_2 \geqq 0, k_3 \geqq 0, \dots$$

なる關係を得る。此處で $k_1, k_2, \dots$ は全く任意の整數としてよいのであるか

ら，(6) と (8) とに由て

$$\mathfrak{a}=(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_h^h, \mathfrak{a}^2) \tag{9}$$

なる關係を生ずる。

今 $\mathfrak{b}=(\mathfrak{p}_h, \mathfrak{a})$ と置けば，$\mathfrak{b}\supset\mathfrak{p}_h$ であつて，(9) より

$$\mathfrak{b}=(\mathfrak{p}_h, \mathfrak{a})=(\mathfrak{p}_h, \mathfrak{a}^2)=(\mathfrak{p}_h, \mathfrak{b}^2)$$

となる。故に定理 4 に由て，剰餘環 $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_h$ に於て $\mathfrak{b}$ に對應するイデヤル $\bar{\mathfrak{b}}$ は $\bar{\mathfrak{R}}$ と合致し，$\bar{\mathfrak{R}}$ は單位元素 $\bar{e}$ を持つ。又 (2) より $\mathfrak{b}=(\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_{h+1}^{h+1}, \dots, \mathfrak{p}_m^m, \dots)$, $m\geqq h+1$ であるから，$\bar{\mathfrak{b}}=(\bar{\mathfrak{p}}_{h+1}^{h+1}, \dots, \bar{\mathfrak{p}}_m^m, \dots)$ でなくてはならない。此處に $\bar{\mathfrak{p}}_m$ は $\mathfrak{p}_m$ に對應する $\bar{\mathfrak{R}}$ のイデヤルを示す。$\bar{\mathfrak{b}}$ の元素 $\bar{e}$ は，脚註(210頁) に由て，$\bar{e}=\bar{p}_{i_1}+\bar{p}_{i_2}+\dots+\bar{p}_{i_n}$ なる式で表はされ，$\bar{p}_{i_j}(j=1, 2, \dots, n)$ は $\bar{\mathfrak{p}}_{i_j}^{i_j}(j=1, 2, \dots, n)$ の元素を示す。從つて i_n を $i_1, i_2 \dots, i_n$ 中の最大とすれば，$\bar{e}\in\bar{\mathfrak{p}}_{i_n}$ 即ち $\bar{\mathfrak{p}}_{i_n}=\bar{\mathfrak{R}}$ となる。一方 (1) から連鎖 $\bar{\mathfrak{p}}_{h+1}\subset\bar{\mathfrak{p}}_{h+2}\subset\dots$ は無限でなければならないから，此處に矛盾を生ずる。由て定理 5 は完全に證明された。

定理 1, 定理 5 及び著者が以前に得た定理(9)とを綜合して次の結果を得る。

主要定理 1.　可換環 $\mathfrak{R}$ に於て，共通分々解が可能なる爲に必要且充分の條件は，

I.　素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\mathfrak{p}_3\subset\dots$ は有限個の項で終り，

II.　イデヤル商の連鎖 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\subset\dots$ も亦有限個の項で終る。

ことである(2)。

冪等イデヤルと冪等元素

冪等元素があれば，明かに冪等イデヤルは存在するが，この逆は，一般の環に於ては，必ずしも成立たない。然し $\mathfrak{R}$ に共通分々解可能の假定を設ければ，冪等イデヤルには必ず冪等元素が存在し得る。これを證明するのが本節の主なる目的であるが，その補助定理として次の定理を掲げる。

定理 6.(3)　可換環 $\mathfrak{R}$ に於て，素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\mathfrak{p}_3\subset\dots$ 及びイ

---

(1)　**定理**　可換環 $\mathfrak{R}$ に於て，素イデヤルの連鎖 $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\dots$ 及びイデヤル商の連鎖 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\subset\dots$ が共に有限個の項で終るとき，$\mathfrak{R}$ に於て共通分々解が可能である。S. Mori, 本誌, **11** (1942), 135.

(2)　この二條件が獨立なるや，否やは未だ不明である。

(3)　S. Mori, 本誌, **11** (1942), 129.

デヤル商の連鎖 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\subset\cdots$ は共に有限個の項で終るものとする。$\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{R}$ の任意のイデヤルとし，素イデヤル $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{b}$ を含むとすれば，元素 $p_1, p_2, \dots, p_s$ を適當に選び，正整數 n を大きく取れば

$$\mathfrak{p}^n\leqq(p_1, p_2, \dots, p_s, \mathfrak{b})\leqq\mathfrak{p}$$

となる。

この定理を用いて，次の重要定理を證明しよう。

定理 7. 環 $\mathfrak{R}$ に於て，共通分々解の可能性を假定すれば，$\mathfrak{R}$ の零イデヤルでない冪等イデヤル $\mathfrak{a}$ は，零以外に冪等元素を含む。

證 定理 1 と定理 5 に由て，$\mathfrak{R}$ は定理 6 の二條件を滿足するから，環 $\mathfrak{R}$ に於ては定理 6 を用い得る。今 $\mathfrak{a}$ の凡ての最小素イデヤルを $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_k$ とし，$\mathfrak{a}$ 内に零でない一元素 p_0 を取れば，定理 6 に由て

$$\mathfrak{p}_i^{n_i}\leqq(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{is_i}, p_0)\leqq\mathfrak{p}_i\qquad(i=1, 2, \dots, k)\tag{1}$$

なるやうに元素 p_{ij} と正整數 n_i とを選び得る。$\mathfrak{a}$ は冪等イデヤルであるから，$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^2$ であり，又 $\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{p}_i\,(i=1, 2, \dots, k)$ である。從つて (1) から，任意の正整數 t に對して

$$\mathfrak{a}\leqq(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{is_i}, p_0)^t\leqq\mathfrak{p}_i^t(i=1, 2, 3, \dots, k)$$

なる關係を得る。上の k 個の式を乘じて

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^k\leqq(p_{11}, p_{12}. \dots, p_{1s_1}, p_0)^t(p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2s_2}, p_0)^t\cdots\\(p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{ks_k}, p_0)^t\leqq\mathfrak{p}_1^t\mathfrak{p}_2^t\cdots\mathfrak{p}_k^t\end{aligned}\tag{2}$$

となる。$\mathfrak{a}$ は n 個の强準素イデヤル $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_n$ の共通分として表はされ，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_k$ は $\mathfrak{a}$ の凡ての最小素イデヤルであるから，t を適當に大きく取れば，$\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_n\leqq\mathfrak{a}$ より，$\mathfrak{p}_1^t\mathfrak{p}_2^t\cdots\mathfrak{p}_k^t\leqq\mathfrak{a}$ を得る。故に (2) に由て

$$\mathfrak{a}=(p_{11}, p_{12}, \dots p_{1s_1}, p_0)^t\cdots(p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{ks_k}, p_0)^t$$

を得るから，

$$\mathfrak{a}=(a_1, a_2, \dots, a_m)\tag{3}$$

と置いて差支がない。任意の正整數 s に對して，(3) から

$$(a_1^s, a_2^s, \dots a_m^s)\geqq(a_1, a_2, \dots, a_m)^{sm}=\mathfrak{a}^{sm}=\mathfrak{a}$$

を生じ，又一方に於て $\mathfrak{a}=(a_1, a_2, \dots, a_m)\geqq(a_1^s, a_2^s, \dots, a_m^s)$ であるから，$\mathfrak{a}$ を次のやうに表はすことが出來る。

$$\mathfrak{a}=(a_1^s, a_2^s, \dots, a_m^s),\tag{4}$$

此處で s は任意の正整數を意味する。從つて $s \geqq 2$ なるときは, (3) と (4) とから

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + \cdots + a_{1m}a_m \\ a_2 &= a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + \cdots + a_{2m}a_m \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ a_m &= a_{m1}a_1 + a_{m2}a_2 + \cdots a_{mm}a_m \end{aligned}$$

を得るが, 此處で a_{ij} は $\mathfrak{a}$ の元素である。a を $\mathfrak{a}$ の零でない任意の元素とし, これを上の各式に乘ずれば

$$(5) \qquad \begin{cases} (aa_{11}-a)a_1 + aa_{12}a_2 + \cdots + aa_{1m}a_m = 0 \\ aa_{21}a_1 + (aa_{22}-a)a_2 + \cdots + aa_{2m}a_m = 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ aa_{m1}a_1 + aa_{m2}a_2 + \cdots + (aa_{mm}-a)a_m = 0 \end{cases}$$

を得る。$a_1, a_2, \ldots, a_m$ の係數の元素で行列式

$$D = \begin{vmatrix} aa_{11}-a & aa_{12} & \cdots\cdots & aa_{1m} \\ aa_{21} & aa_{22}-a & & aa_{2m} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ aa_{m1} & aa_{m2} & \cdots\cdots & aa_{mm}-a \end{vmatrix}$$

を作れば, $D \in \mathfrak{a}$ であつて, (5) より

$$Da_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

を得る。從つて單項イデヤル (D) に對して $\mathfrak{a}(D) = (0)$ を生ずる。然るに $D \in \mathfrak{a}$ であるから, $D^2 = 0$ となる。D^2 を展開すれば, この式から $a^{2m} = a'a^{2m}$ を生じ, a' は $\mathfrak{a}$ の一元素を示す。D の組成分子を見れば, 明かな通り a' は元素 a_{ij} にのみ由て定まり, 元素 a が變つても, a' は不變である。それで a を順次 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ と置いて,

$$(6) \qquad a_i^{2m} = a'a_i^{2m} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

を得る。一方 a' は $\mathfrak{a}$ の元素であるから, (4) より $a' = r_1a_1^{2m} + r_2a_2^{2m} + \cdots + r_ma_m^{2m}$ なる a' の表現を得る。此處に r_i は $\mathfrak{a}$ の元素を示してゐる。又 (6) に由て, この關係から $a' = a'^2$ を得る。$\mathfrak{a}$ は零イデヤルでないから, (4) と (6) とより $a' \neq 0$ なるを要し, その上 $\mathfrak{a}$ の任意の元素 a に對して常に $aa' = a$ が成立つ。即ち a' はイデヤル $\mathfrak{a}$ の單位元素である。

系 環 $\mathfrak{R}$ に於て共通分々解の可能を假定すれば，$\mathfrak{R}$ の冪等イデヤルの總數は冪等元素の總數に等し。

證 $\mathfrak{a}$ を一つの冪等イデヤルとすれば，定理 7 に由て $\mathfrak{a}$ に關する唯一の單位元素が存在する。逆に a を零でない冪等元素とすれば，$xa=x$ なる關係を滿足する元素 x の集合 $\mathfrak{a}$ は零イデヤルでない一つのイデヤルであつて，a はその唯一の單位元素である。斯くして冪等イデヤルと冪等元素との間に一對一の對應を作り得る。即ち兩者の總數は相等しい。

環 $\mathfrak{R}$ にその單位元素以外に冪等元素 $a(\neq 0)$ が存在するならば，$xa=x$ なる關係を滿足する $\mathfrak{R}$ の凡ての元素 x の集合を $\mathfrak{a}$ とし，$ya=0$ なる $\mathfrak{R}$ の凡ての元素 y の集合を $\mathfrak{b}$ とする。$\mathfrak{a}$ 及び $\mathfrak{b}$ は共にイデヤルであつて，且つ

$$(1)\qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b}=(0),\quad \mathfrak{a}\neq(0),\quad \mathfrak{a}\neq\mathfrak{R}$$

なる關係を滿足する。今 $\mathfrak{R}$ の任意の元素を r とすれば，$ra=ra^2$，即ち $(r-ra)a=0$，從つて $r-ra$ は $\mathfrak{b}$ の元素となる。又 $ra\cdot a=ra$ であるから，ra は $\mathfrak{a}$ の元素である。それ故に $r-ra=b'$，$ra=a'$ と置けば，

$$(2)\qquad r=a'+b',\quad a'\in\mathfrak{a},\quad b'\in\mathfrak{b}$$

(1) と (2) とに由て，$\mathfrak{R}$ が $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ との直和に分解する。即ち $\mathfrak{R}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$，$\mathfrak{a}\neq(0)$，$\mathfrak{b}\neq(\mathfrak{a})$．このやうな關係に由て，定理 7 から容易に次の結論を得る。

主要定理 II 可換環 $\mathfrak{R}$ に於てイデヤルの共通分々解の成立を假定すれば，$\mathfrak{R}$ 及び (0) 以外の冪等イデヤルが存在する爲に必要且充分なる條件は，環 $\mathfrak{R}$ が有限個の零環でない部分環の直和に分解し，少くとも一つの部分環がその單位元素を有することである。