Ueber Sonosche Reduktion von Idealen.

Von

Shinziro Mori.

(Eingegangen am 15. 5. 1932.)

In seiner Arbeit[1] „*On the Reduction of Ideals*" leitet Herr Prof. M. Sono den folgenden Satz ab:

Es sei $\mathfrak{R}$ ein Sonoscher Ring. Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ von erster Art teilbar durch ν maximale Ideale der ersten Art, so lässt $\mathfrak{a}$ eine Darstellung als Durchschnitt von ν primären Idealen zu, die zu den ν maximalen Idealen gehören.

Dabei bedeutet ein Ideal der ersten Art ein Ideal, das kein Teiler jeder Potenz von $\mathfrak{R}$ ist, und unter primäres Ideal verstehen wir ein Ideal, das teilbar durch ein einziges maximales Ideal der ersten Art ist. Ein maximales Ideal von erster Art ist hiermit ein maximales Primideal im Sinne von Noether, und im Sonoschen Ring gilt auch die Umkehrung, falls es ein vom Nullideal verschiedenes Primideal gibt. In diesem Ring sind ferner die maximalen Ideale von erster Art, die Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}\,(\neq(0))$ sind, die höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$ (im Sinne von Krull). Aber im allgemeinen kann ein höchstes Primideal eines Ideals kein maximales Ideal sein. Um die Geltung des Sonoschen Satzes auf den allgemeinen Ringbereich auszudehnen, werde ich hiermit die Sonosche Definition für primäres Ideal in folgender Form modifizieren.

Besitzt ein Ideal ein einziges höchstes Primideal, so heisst das Ideal „primäres Ideal im Sinne von Sono."

In den vorliegenden Abhandlungen wird für den *kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit Teilerkettensatz* die Existenz einer Darstellung jedes Ideals als Durchschnitt von den eben definierten primären Idealen nachgewiesen und die eindeutige Darstellbarkeit untersucht. Für Primideal und höchstes Primideal eines Ideals werden wir nach den von Noether und Krull gegebenen Vorbildern in folgender Form definieren:

Ein Ideal $\mathfrak{p}$ heisst „*Primideal*," wenn ab durch $\mathfrak{p}$ nur dann teilbar

(1) M. Sono, On the Reduction of Ideals. Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University, Series **A**, **7** (1924), zitiert mit „S."

ist, falls a oder b durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist.[1]

Ein Primideal $\mathfrak{p}$, das Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$ ist, und kein echtes Primidealvielfaches mit der gleichen Eigenschaft besitzt, heisst „*höchstes Primideal von* $\mathfrak{a}$.“[2]

Primäre Ideale im Sinne von Sono.

Im Sonoschen Ring ist jedes vom Nullideal und von $\mathfrak{o}$ verschiedene Primideal zugleich ein maximales Ideal[3] und folglich sind die höchsten Primideale jedes vom Nullideal verschiedenen Ideals erster Art zugleich maximale Ideale von erster Art. Um unsere Definition für primäres Ideal also als speziellen Fall die Sonosche Definition unter sich zu begreifen, haben wir in folgender Weise zu definieren.

Definition. *Besitzt ein Ideal* $\mathfrak{q}$ *ein einziges höchstes Primideal* $\mathfrak{p}$, *so heisst* $\mathfrak{q}$ *ein „zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges primäres Ideal.“ Ist* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{o}$ *verschieden, so heisst* $\mathfrak{q}$ *das „eigentliche primäre Ideal“ und sonst heisst es das „uneigentliche primäre Ideal.“*

Aber die Gesmtheit $\mathfrak{h}$ aller Elemente h von der Eigenschaft, dass eine Potenz von h durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, ist ein Ideal und alle zugehörigen Primideale von $\mathfrak{h}$ sind sämtlich die höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$[4]; womit aus der Definition folgt

Ist $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges primäres Ideal, so wird* $\mathfrak{p}^\lambda \equiv 0\ (\mathfrak{q})$ *für eine endliche ganze Zahl* λ.

Die Definition des primären Ideals lässt sich auch so aussprechen:

Ein Ideal $\mathfrak{q}$ *heisst primär, wenn aus* $ab \equiv 0\ (\mathfrak{q})$ *notwendig folgt wenigstens eines von* $a^\lambda \equiv 0\ (\mathfrak{q})$, $b^\lambda \equiv 0\ (\mathfrak{q})$, *wo der Exponent* λ *eine endliche ganze Zahl ist.*[5]

Bei dieser Definition ist die Gesamtheit $\mathfrak{p}$ aller Elemente, deren endliche Potenz durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist, das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal.

Es handelt sich im folgenden um den Zusammenhang zwischen Sonoschen und Noetherschen primären Idealen.

Satz I. *Die beiden Primärideale (die Sonoschen und die Noether-*

---

(1) E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen. Math. Ann. **83**, zitiert mit „N.“

(2) W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Annalen **101**.

(3) S. Mori, Struktur des Sonoschen Ringes, dieses Journal **2**, S. 185.

(4) S. Mori, Ueber Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, dieses Journal **1**, S. 160, zitiert mit „M.“

(5) Vgl. „N.“ S. 37.

schen) vom Ring $\mathfrak{R}$ stimmen dann und nur dann überein, wenn $\mathfrak{R}$ das Einheitselement besitzt und $\mathfrak{R}$ die direkte Summe von endlich vielen Idealen wird, in jedem einzelnen von denen jedes vom Nullideal verschiedene Primideal maximal ist, oder wenn in $\mathfrak{R}$ kein vom Nullideal und vom Einheitsideal $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal existiert.

Wir nehmen zunächst an, dass im Ring $\mathfrak{R}$ die beiden Begriffe übereinstimmen werden. Wenn es in $\mathfrak{R}$ kein Primideal ausser $\mathfrak{o}$ und (o) gibt, so stimmen offenbar die beiden Begriffe überein. Ist $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{o}$ und (o) verschiedenes Primideal, so muss $\mathfrak{p}$ idempotent, oder ein maximales Primideal vom Ring mit Einheitselement sein. Denn, sonst würde $\mathfrak{p}$ durch eine Potenz $\mathfrak{a}^\rho$ des echten Teilers $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ unteilbar sein.[1] Aus dem Noetherschen Hauptsatz folgte, dass $\mathfrak{a}^\rho=[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n]$ ist, und wenigstens eines, etwa $\mathfrak{q}_1$, aus $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ kein Teiler von $\mathfrak{p}$ ist. Da $\mathfrak{a}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ ist, so würde $\mathfrak{q}_1$ durch $\mathfrak{p}$ unteilbar sein. Damit sollte $\mathfrak{b}=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}]$ eine kürzeste Darstellung sein. Aus $\mathfrak{a}^\rho\equiv 0\ (\mathfrak{q}_1)$, $\mathfrak{p}\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ folgte damit $\mathfrak{p}^\lambda\equiv 0\ (\mathfrak{b})$ für eine endliche ganze Zahl λ. Hiermit würde $\mathfrak{b}$ ein Sonosches primäres Ideal, aber kein Noethersches Primärideal sein. Das widerspricht der obigen Voraussetzung. Gibt es in $\mathfrak{R}$ kein idempotentes Primideal, so besitzt $\mathfrak{R}$ damit das Einheitselement und alle von (o) verschiedenen Primideale sind maximale Ideale.

Ist $\mathfrak{p}$ idempotent, so wird

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{p}+\mathfrak{n},$$

wo $\mathfrak{n}$ direkt-unzerlegbar und $\mathfrak{p}\neq(o)$ ist. Gibt es im Ring $\mathfrak{n}$ ein von (o) und $\mathfrak{n}$ verschiedenes Primideal, m. a. W. Ist $\mathfrak{p}$ durch ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}'$ echt teilbar, so kann $\mathfrak{p}'$ nicht mehr idempotent sein, und ferner besitzt $\mathfrak{o}$ das Einheitselement. Es ist leicht ersichtlich, dass im Ring $\mathfrak{n}$ alle vom Nullideal und $\mathfrak{n}$ verschiedenen Primideale nicht-idempotent und maximal sein sollen. Besitzt $\mathfrak{n}$ kein von (o) verschiedenes Primideal, so können wir zwei verschiedene Fälle betrachten, je nachdem $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{p}$ verschiedenes Primideal besitzt oder nicht. Im ersten Fall ist $\mathfrak{n}$ teilbar durch ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}''$ und folglich erkennen wir auch, dass das Ideal $\mathfrak{n}$ idempotent sein soll; also ist $\mathfrak{n}$ ein Körper. Im zweiten Fall ist $\mathfrak{n}$ durch Primideal ausser $\mathfrak{o}$ echt unteilbar, und $\mathfrak{p}$ ist ein Körper, da $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2\neq(o)$ ist. Folglich ist $\mathfrak{n}$ auch ein Primideal und $\mathfrak{n}$ muss auch das Einheitselement besitzen, also ist $\mathfrak{n}$ auch ein Körper. Zusammenfassend besitzt $\mathfrak{o}$ stets das Einheitselement und jedes von (o) verschiedene Primideal von $\mathfrak{n}$ ist maximal. Ist $\mathfrak{p}$ noch zerlegbar, so wird

(1) S. Mori, Ueber Produktzerlegung der Ideale, dieses Journal **2**, S. 6.

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{p}_n,$$

wo $\mathfrak{p}_i$ direkt-unzerlegbar sind. Folglich soll jedes vom $\mathfrak{p}_i$ verschiedene Primideal von $\mathfrak{p}_i$ ein maximales Ideal oder Nullideal sein. Hiermit besitzt $\mathfrak{R}$ das Einheitselement, und ferner wird $\mathfrak{R}$ die direkte Summe von Idealen, in denen jedes Primideal das Nullideal oder ein maximales Ideal ist.

Es seien die Bedingungen hier vorausgesetzt. Im zweiten Fall stimmen die beiden Begriffe offenbar überein. Im ersten Fall ist jedes Primideal idempotent oder maximal. Nach dem in der Fussnote ausgesprochenen Satz[1] folgt daraus, dass jedes Sonosche primäre Ideal zugleich ein Noethersches Primärideal ist, und umgekehrt.

Reduktion eines Ideals durch primäre Ideale.

In diesem Paragraphen betrachten wir nur die primären Ideale im Sinne von Sono. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, so können wir nach dem Teilerkettensatz die Existenz der endlich vielen verschiedenen höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$ und ihre Eindeutigkeit ganz unabhängig von Frl. Noether beweisen und ferner ergibt sich

Satz 2. *Besitzt ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *die* ν *verschiedenen höchsten Primideale, so ist* $\mathfrak{a}$ *darstellbar als Durchschnitt von* ν *primären Idealen, die zu den höchsten Primidealen gehören, und dabei ist die Darstellung eine kürzeste.*[2]

Wenn wir nur die Darstellung durch eigentliche primäre Ideale betrachten, so gilt der folgende Satz, der dem Sonoschen Hauptsatz[3] entspricht.

Besitzt ein Ideal $\mathfrak{a}$, *das kein uneigentliches primäres Ideal ist,* ν *höchste Primideale, so ist* $\mathfrak{a}$ *darstellbar als Durchschnitt von* ν *eigentlichen primären Idealen, die zu den höchsten Primidealen gehören.*

Die Primärkomponenten in der Darstellung eines Ideals sind bekanntlich nicht allgemein eindeutig bestimmt. Aber dafür gilt der folgende

Satz 3. *Der Ring* $\mathfrak{R}$ *besitzt wenigstens zwei von* $\mathfrak{o}$ *verschiedene*

---

(1) Satz. *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein maximales Primideal von dem Ring* $\mathfrak{R}$ *mit Einheitsleement, so ist jeder Teiler einer Potenz xon* $\mathfrak{p}$ *ein Primärideal (im Sinne von Noether).* Vgl. S. Mori, Ueber Produktzerlegung der Ideale, S. 10.

(2) S. Mori. Zur Zerlegung der Ideale, Physico-Math. Soc. of Japan 3rd. Ser. Vol. 13, S. 305.

(3) „S." S. 203.

gegenseitig relativprime Primideale.[1] *Die Reduktion jedes Ideals als Durchschnitt der primären Ideale ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn in* $\mathfrak{R}$ *die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*[2]

1. $\mathfrak{R}$ *besitzt das Einheitselement.*

2. *Sind zwei Primideale* $\mathfrak{p}_1$ *und* $\mathfrak{p}_2$ *in* $\mathfrak{R}$ *gegenseitig relativprim, so sind sie teilerfremd, also ist* $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \mathfrak{o}$.

Zunächst nehmen wir an, dass die Reduktion jedes Ideals eindeutig bestimmt ist. Es seien $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zwei von $\mathfrak{o}$ verschiedene gegenseitig relativprime Primideale und es sei $\mathfrak{d} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2]$. Dann muss nach unserer Voraussetzung

$$\mathfrak{p}_1 = (\mathfrak{d}, \mathfrak{p}_1^2) = \ldots, \quad \mathfrak{p}_2 = (\mathfrak{d}, \mathfrak{p}_2^2) = \ldots.$$

sein. Im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{d}$ ergibt sich damit

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{p}_1' + \mathfrak{p}_2', \quad \mathfrak{p}_1' = \mathfrak{p}_1'^2, \quad \mathfrak{p}_2' = \mathfrak{p}_2'^2,$$

wo $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2'$ die $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ entsprechenden Primideale in $\mathfrak{R}'$ sind,[3] und folglich wird $\mathfrak{R}' = (\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2')$; also muss

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$$

sein, womit die zweite Bedingung notwendig ist.

Es sind zwei verschiedene Fälle denkbar; entweder nämlich ist das Nullideal primär, oder nicht. Im zweiten Fall wird nach Satz 2

$$(o) = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n] \quad n \geqq 2.$$

Aus unserer Voraussetzung folgt damit

$$\mathfrak{p}_i^{\lambda_i} = \mathfrak{p}_i^{\lambda_i+1} = \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Da aber $\mathfrak{o} = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ ist, so ergibt sich daraus

$$\mathfrak{o}^\lambda = \mathfrak{o}^{\lambda+1}$$

für eine hinreichend grosse ganze Zahl λ und folglich wird auch

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^\lambda + \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}^\lambda = (o).$$

---

(1) Sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zwei solche Primideale, dass $\mathfrak{p}_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_2)$, $\mathfrak{p}_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$ ist, so sind die beiden Primideale gegenseitig relativprim und es gilt auch die Umkehrung, falls $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ von $\mathfrak{o}$ verschieden sind. Vgl. „N." S. 45.

(2) Wenn in $\mathfrak{R}$ zwei von $\mathfrak{o}$ verschiedene gegenseitig relativprime Primideale nicht existieren, so soll jedes Ideal in $\mathfrak{R}$ primär sein. Zum Beispiel betrachten wir einen solchen Ring $\mathfrak{R}$, dass

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$$

ist, wo $\mathfrak{m}$ ein Körper und $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal bedeutet. Dann besitzt $\mathfrak{R}$ kein Primideal ausser $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{o}$ und jedes Ideal ist primär (im Sinn von Sono).

(3) „M." S. 176.

Ist $\mathfrak{n} \neq (o)$, so erhalten wir zwei verschiedene Reduktionen vom Nullideal durch primäre Ideale

$$(o) = [\mathfrak{p}_1^{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{\lambda_n}] = [(\mathfrak{p}_1^{\lambda_1}, \mathfrak{n}), \ldots, \mathfrak{p}_n^{\lambda_n}]$$

gegen die Voraussetzung, womit

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^{\lambda}$$

sein muss, also besitzt $\mathfrak{R}$ das Einheitselement.

Im ersten Fall sei $\mathfrak{n}$ die Gesamtheit aller nilpotenten Elemente aus $\mathfrak{R}$, dann wird $\mathfrak{R}/\mathfrak{n}$ keinen Nullteiler besitzen, da $\mathfrak{n}$ das zu (o) gehörige Primideal ist. Sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die von $\mathfrak{o}$ verschiedenen gegenseitig relativprimen Primideale, so soll $\mathfrak{n}$ durch $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ teilbar sein, da $\mathfrak{n}$ nilpotent ist. Wir können zwei Elemente p_1 und p_2 derart finden, dass

$$p_1 \equiv o \ (\mathfrak{p}_1), \ p_1 \not\equiv o \ (\mathfrak{p}_2); \ p_2 \equiv o \ (\mathfrak{p}_2), \ p_2 \not\equiv o \ (\mathfrak{p}_1)$$

ist. Setzen wir

$$p = p_1 p_2,$$

so ist

$$p \not\equiv o \ (\mathfrak{n}), \ \mathfrak{o}p \equiv o \ (\mathfrak{p}_1), \ \mathfrak{o}p \equiv o \ (\mathfrak{p}_2).$$

Ferner ist $\mathfrak{o}p$ kein primäres Ideal. Denn jede Potenz von p_1 und p_2 ist unteilbar durch $\mathfrak{o}p$ und es ist $p_1^2 p_2^2 \equiv o \ (\mathfrak{o}p)$. Für den Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{o}p$ können wir $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}'^2$ genau wie beim vorigen Beweise nachweisen. Folglich besitzt $\mathfrak{R}'$ das Einheitselement e' und wir erhalten damit

$$(1) \qquad p = e'p + r'p = ep.$$

Da $p \not\equiv o \ (\mathfrak{n})$ ist, so wird auch $e \not\equiv o \ (\mathfrak{n})$, sonst würde $p^{\rho} = o$, wo ρ eine solche ganze Zahl ist, dass $\mathfrak{n}^{\rho} = (o)$ ist. Aus (I) folgt $p(e - e^2) = o$, und folglich wird nach der Eigenschaft vom Primideal $\mathfrak{n}$

$$e - e^2 \equiv o \ (\mathfrak{n}), \ (e - e^2)^{\rho} = o,$$

also ist

$$(2) \qquad e^{\rho} = e^{\rho} e_1, \ e_1 \not\equiv o \ (\mathfrak{n})$$

wo e_1 ein Element von $\mathfrak{R}$ bedeutet. Ist r ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, so folgt aus (1)

$$p(r - er) = o, \ r - er \equiv o \ (\mathfrak{n}), \ (r - er)^{\rho} = o, \ r^{\rho} = cr',$$

wo r' ein Element von $\mathfrak{R}$ ist. Daher folgt $\mathfrak{o}^{\lambda} \equiv 0 \ (\mathfrak{o}e^{\rho})$ für eine hinreichend grosse Zahl λ, und daher folgt auch $e_1^{\lambda} = r_1 e^{\rho}$. Aus (2) ergibt sich damit

$$e_1^\lambda = e_1^{\lambda+1} = e_1^{2\lambda}, \quad e_1 \neq o,$$

also soll nach $\mathfrak{o}e^\rho = \mathfrak{o}e^\rho e_1^\lambda$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}', \quad \mathfrak{m}'^2 = \mathfrak{m}', \; \mathfrak{n}'^{\lambda'} = (o)$$

sein. Aber nach unserer Voraussetzung muss $\mathfrak{n}' = (o)$ sein, sonst hätten wir zwei verschiedene Reduktionen $\mathfrak{b} = [\mathfrak{p}_1^{\lambda'}, \mathfrak{p}_2^{\lambda'}] = [(\mathfrak{p}_1^{\lambda'}, \mathfrak{n}'), \mathfrak{p}_2^{\lambda'}]$ durch primäre Ideale. Also muss $\mathfrak{R}$ das Einheitselement e_1^λ besitzen, womit die erste Bedingung auch notwendig ist.

Es seien jetzt die Bedingungen vorausgesetzt. Es sei auch $\mathfrak{a}$ ein beliebiges nicht-primäres Ideal und seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$. Dann wird nach den vorausgestzten Bedingungen $(\mathfrak{p}_i^\lambda, \mathfrak{p}_j^\lambda) = \mathfrak{o}$ $(i \neq j)$ für jede ganze Zahl λ und folglich wird[1]

$$(3) \qquad (\mathfrak{p}_i^\lambda, \mathfrak{b}_i'') = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{b}_i'' = [\mathfrak{p}_1^\lambda, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}^\lambda, \mathfrak{p}_{i+1}^\lambda, \ldots, \mathfrak{p}_n^\lambda]$$

für jede ganze Zahl λ. Es seien

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n] = [\bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_n]$$

zwei Reduktion von $\mathfrak{a}$ durch primäre Ideale. Setzen wir ferner

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_i \, \mathfrak{b}_i] = [\bar{\mathfrak{q}}_i, \bar{\mathfrak{b}}_i], \quad \mathfrak{b}_i = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{q}_n],$$

$$\bar{\mathfrak{b}}_i = [\bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{i-1}, \bar{\mathfrak{q}}_{i+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_n],$$

so wird wegen (3) $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{b}_i) = \mathfrak{o}$, $(\bar{\mathfrak{q}}_i, \bar{\mathfrak{b}}_i) = \mathfrak{o}$. Ist $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{a}$, so wird damit

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{q}_i' + \mathfrak{b}_i' = \bar{\mathfrak{q}}_i' + \bar{\mathfrak{b}}_i',$$

wo die Ideale $\mathfrak{q}_i', \bar{\mathfrak{q}}_i', \mathfrak{b}_i', \bar{\mathfrak{b}}_i'$ die zu $\mathfrak{q}_i, \bar{\mathfrak{q}}_i, \mathfrak{b}_i, \bar{\mathfrak{b}}_i$ entsprechenden Ideale in $\mathfrak{R}'$ bedeuten und ferner sie sämtlich idempotent sind. Da eine Potenz des zu $\mathfrak{p}_i$ entsprechenden Primideals $\mathfrak{p}_i'$ durch $\mathfrak{q}_i'$ und $\bar{\mathfrak{q}}_i'$ teilbar ist, so sind $\mathfrak{b}_i'$ und $\bar{\mathfrak{b}}_i'$ direkt-unzerlegbar, und folglich wird $\mathfrak{q}_i' = \bar{\mathfrak{q}}_i'$ also ist $\mathfrak{q}_i = \bar{\mathfrak{q}}_i$. Die Bedingungen sind hiermit auch hinreichend, also ist unser Satz vollständig bewiesen.

Besitzt $\mathfrak{R}$ das Einheitselement und sind je zwei gegenseitig relativprime Primideale teilerfremd, so werden je zwei von $\mathfrak{o}$ verschiedene gegenseitig relativprime Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ auch teilerfremd sein. Denn, sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ $(\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_n')$ die höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}')$, so soll stets $(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j') = \mathfrak{o}$ sein. Es seien jetzt $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m]$, $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_n']$ die Reduktionen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, dann folgt damit $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j') = \mathfrak{o}$ und folglich wird[2]

(1), (2) „N." S. 51.

$$(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{a}') = \mathfrak{o} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

also muss auch $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') = \mathfrak{o}$ sein. Sind umgekehrt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ teilerfremd, so sind sie auch gegenseitig relativprim.[1] Im Ring mit Einheitselement stimmen die Begriffe gegenseitig relativprim und teilerfremd dann und nur dann überein, wenn je zwei gegenseitig relativprime Primideale teilerfremd sind. Damit können wir auch den obigen Satz in der Form aussprechen:

Satz 3'. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring, in dem wenigstens zwei von $\mathfrak{o}$ verschiedene gegenseitig relativpri . e Primideale existieren. Die Reduktion jedes Ideals aus $\mathfrak{R}$ durch primäre Ideale ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn in $\mathfrak{R}$ die beiden Begriffe gegenseitig relativprim und teilerfremd zusammen fallen.*

Beispiele: Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring, der sich als direkte Summe der Ideale von $\mathfrak{R}$ in folgender Form darstellen lässt:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_n + \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_i^2 \ (i = 1, 2, \ldots, n) \ n \geqq 2,$$
$$\mathfrak{n}^\rho = (o), \quad \mathfrak{n} \neq (o),$$

wo jedes vom Nullideal verschiedene Primideal von $\mathfrak{m}_i$ stets ein maximales Ideal von $\mathfrak{m}_i$ ist. Die Existenz eines solchen Ringes ist aber ersichtlich, da ein Sonoscher Ring dieselben Eigenschaften besitzen kann.[2] In diesem Ring ist die kürzeste Darstellung jedes Ideals durch grösste Primärideale (im Sinne von Noether) immer eindeutig bestimmt.[3] Aber in $\mathfrak{R}$ gilt nicht mehr die eindeutige Reduktion jedes Ideals durch primäre Ideale (im Sinne von Sono).

Es sei $\mathfrak{R}$ der Ring der ganzen rationalen Zahlen und sei auch $\mathfrak{R}[x]$ der Polynomring, der aus $\mathfrak{R}$ duach Adjunktion einer Unbestimmten x abgeleitet ist. Dann besitzt $\mathfrak{R}[x]$ das Einheitselement und ist ferner kommutativ. Ist p eine Primzahl und n $(\geqq 2)$ eine ganze Zahl, so ist $\mathfrak{a} = (px, x^n)$ ein Ideal in $\mathfrak{R}[x]$. Betrachten wir jetzt den Restklassenring

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}[x]/\mathfrak{a},$$

so ist $\mathfrak{p}' = (x)$ ein nilpotentes Primideal von $\mathfrak{R}'$. Da $\mathfrak{p}'$ nilpotent ist, so ist $\mathfrak{p}'$ teilbar durch jedes vom Nullideal verschiedene Primideal von $\mathfrak{R}'$, und daher folgt, dass jedes von $\mathfrak{p}' = (x)$ verschiedene Primideal aus

(1) „N." S. 51.
(2) S. Mori. Struktur des Sonoschen Ringes. S. 28.
(3) „M." S. 190.

$\mathfrak{R}'$ sich stets in der Form (p', x) darstellen lässt, wo p' eine Primzahl bedeutet. Im Ring $\mathfrak{R}'$ gilt mithin die eindeutige Reduktion jedes Ideals durch primäre Ideale (im Sinne von Sono), aber es gilt nicht mehr die Eindeutigkeit der kürzesten Darstellung jedes Ideals durch grösste Primärideale (im Sinne von Noether).[1]

Ueber minimale primäre Ideale eines Ideals.

Ist $\mathfrak{p}$ ein höchstes Primideal eines Ideals $\mathfrak{a}$ und ist

$$(\mathfrak{p}^\lambda, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{p}^{\lambda+1}, \mathfrak{a}) = \ldots .$$

für eine endliche ganze Zahl λ, so soll das primäre Ideal $(\mathfrak{p}^\lambda, \mathfrak{a})$ „*das zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige minimale primäre Ideal von* $\mathfrak{a}$" heissen. Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die höchsten Primideale eines Ideals $\mathfrak{a}$. Existiert das zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige minimale primäre Ideal $\mathfrak{q}_i$ von $\mathfrak{a}$, so lässt $\mathfrak{a}$ die eindeutige Reduktion $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n]$ durch minimale primäre Ideale (im Sinne von Sono) zu. Für solche Reduktion von Idealen gilt der folgende

Satz 4. *Jedes Ideal im Ring* $\mathfrak{R}$ *lässt dann und nur dann die eindeutige Reduktion durch minimale primäre Ideale zu, wenn für je zwei von* $\mathfrak{o}$ *verschiedene gegenseitig relativprime Primideale* $\mathfrak{p}_1$ *und* $\mathfrak{p}_2$ *immer* $\mathfrak{o} = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ *ist, und* $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_1$ *und* $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_2$ *ein Einheitselement besitzen.*

Zum Beweise nehmen wir zunächst an, dass für jedes höchste Primideal $\mathfrak{p}$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ das $\mathfrak{p}$ entsprechende minimale primäre Ideal von $\mathfrak{a}$ immer existiert. Sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zwei von $\mathfrak{o}$ verschiedene gegenseitig relativprime Primideale, und ist $\mathfrak{b} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2]$, so wird nach der Voraussetzung

$$(\mathfrak{p}_1^{\lambda_1}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{p}_1^{\lambda_1+1}, \mathfrak{b}) = \ldots, \quad (\mathfrak{p}_2^{\lambda_2}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{p}_2^{\lambda_2+1}, \mathfrak{b}) = \ldots,$$

und folglich ist

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1'^{\lambda_1} + \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{p}_2'^{\lambda_2} + \mathfrak{m}_2, \quad \mathfrak{p}_1'^{\lambda_1} = \mathfrak{p}_1'^{2\lambda_1}, \quad \mathfrak{p}_2'^{\lambda_2} = \mathfrak{p}_2'^{2\lambda_2},$$

$$(o) = [\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2']$$

wo $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$ die $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ entsprechenden Primideale von $\mathfrak{R}'$ bedeuten. Da aber $\mathfrak{p}_2'$ ein Primideal und $\mathfrak{p}_1' \not\equiv o \ (\mathfrak{p}_2')$ ist, so muss $\mathfrak{m}_1 \equiv o \ (\mathfrak{p}_2')$ sein. Daher folgt $\mathfrak{R}' = \mathfrak{p}_1' + \mathfrak{p}_2'$, und folglich werden

$$(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{p}_1 = (\mathfrak{p}_1^2, \mathfrak{b}) = \ldots, \quad \mathfrak{p}_2 = (\mathfrak{p}_2^2, \mathfrak{b}) = \ldots .$$

---

(1) „M." S 190.

Ferner folgt daraus, dass $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_2$ ein Einheitselement besitzen.

Es seien in $\mathfrak{R}$ die Bedingungen erfüllt, es sei auch $\mathfrak{a}$ ein nicht-primäres Ideal und es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$. Dann sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ von $\mathfrak{o}$ verschieden und auch gegenseitig relativ-prim. Da $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_1$ das Einheitselement e besitzt, so ist $\mathfrak{R}=(e, \mathfrak{p}_1)$. Aber aus unserer Voraussetzung folgt auch

$$e=p_2+p_1^{(2)}=p_3+p_1^{(3)}=\ldots=p_n+p_1^{(n)},$$

wo p_i ein Element aus $\mathfrak{p}_i$ bedeutet. Folglich wird auch

$$\mathfrak{o}=(\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1), \quad \mathfrak{o}=(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{p}_1), \quad \mathfrak{d}_1=[\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n].$$

Im allgemeinen erhalten wir

$$\mathfrak{o}=(\mathfrak{d}_i, \mathfrak{p}_i), \quad \mathfrak{d}_i=[\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n] \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Setzen wir jetzt

$$\mathfrak{d}=[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n],$$

so werden

$$\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}/\mathfrak{d}=\mathfrak{d}_i'+\mathfrak{p}_i', \quad \mathfrak{d}_i'=\mathfrak{d}_i'^2 \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

und folglich wird

$$\mathfrak{R}'=\mathfrak{d}_1'+\mathfrak{d}_2'+\ldots+\mathfrak{d}_n', \quad \mathfrak{d}_i'=\mathfrak{d}_i'^2.$$

Damit besitzt $\mathfrak{R}'$ das Einheitselement e', also ist $e'^2 \equiv e'$ $(\mathfrak{d})$. Da für eine endliche Zahl λ $\mathfrak{d}^\lambda \equiv o$ $(\mathfrak{a})$ ist, so soll

$$(1) \qquad (e'-e'^2)^\lambda \equiv o \ (\mathfrak{a}), \quad e'^\lambda \equiv ee'^\lambda \ (\mathfrak{a}), \quad e'^k \not\equiv o \ (\mathfrak{p}_i) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

sein. Für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$ ergibt sich damit

$$r-re' \equiv o \ (\mathfrak{d}), \quad (r-re')^\lambda \equiv o \ (\mathfrak{a}), \quad r^\lambda \equiv e'r' \ (\mathfrak{a}),$$

wo r' ein Element von $\mathfrak{R}$ bedeutet. Folglich wird

$$(2) \qquad \mathfrak{o}^\rho \equiv o \ ((\mathfrak{o}e'^\lambda, \mathfrak{a}))$$

für eine endliche ganze Zahl ρ. Ist $\mathfrak{m}$ die Gesamtheit aller Elemente m derart, dass $m \equiv em$ $(\mathfrak{a})$ ist, und $\mathfrak{n}$ die Gesamtheit aller Elemente n derart, dass $ne \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ ist, so wird offenbar $\mathfrak{a}=[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$. Da aber wegen (I) $\mathfrak{o}e'^\lambda \equiv o$ $(\mathfrak{m})$ ist, so müssen nach (2)

$$\mathfrak{o}^\rho \equiv 0 \ (\mathfrak{m}), \quad e^\rho \equiv e.e^\rho \ (\mathfrak{a}), \quad e^\rho \equiv e^{2\rho} \ (\mathfrak{a})$$

sein. Die eben gewonnenen Relationen ergeben

$$\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}/\mathfrak{a}=\mathfrak{m}''+\mathfrak{n}'',\ \mathfrak{m}''=\mathfrak{m}''^2,\ \mathfrak{n}''^{\rho}=(o).$$

Aus $\mathfrak{o}=(\mathfrak{d}_i, \mathfrak{p}_i)$ folgt damit

$$(3) \qquad \mathfrak{m}=(\mathfrak{d}_i^{\rho}, \mathfrak{p}_i^{\rho}, \mathfrak{a})=(\mathfrak{d}_i^{\rho+1}, \mathfrak{p}_i^{\rho+1}, \mathfrak{a})=\ldots\ldots$$

Andererseits ist aber nach Satz 2 $\mathfrak{a}=[(\mathfrak{p}_1^{\rho_1}, \mathfrak{a}), \ldots, (\mathfrak{p}_n^{\rho_n}, \mathfrak{a})]$ für hinreichend grosse Zahlen $\rho_1, \ldots, \rho_n$ und daraus folgt

$$\mathfrak{a}=[(\mathfrak{d}_i^{\rho'}, \mathfrak{a}),\ (\mathfrak{p}_i^{\rho'}, \mathfrak{a})]$$

für eine hinreichend grosse Zahl ρ', also muss nach (3)

$$(\mathfrak{p}_i^{\rho'}, \mathfrak{a})=(\mathfrak{p}_i^{\rho'+1}, \mathfrak{a})=\ldots.$$

sein. Damit ist die Reduktion jedes Ideals durch minimale primäre Ideale eindeutig bestimmt.

Spezialisieren wir Satz 4 auf den Fall, dass in $\mathfrak{R}$ das Nullideal kein primäres Ideal ist, so erhalten wir :

Satz 5. *Es sei das Nullideal im Ring $\mathfrak{R}$ kein primäres Ideal. Die Reduktion jedes Ideals von $\mathfrak{R}$ durch minimale primäre Ideale (im Sinne von Sono) ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn*

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{o}'+\mathfrak{n},\ \mathfrak{o}'=\mathfrak{o}'^2,\ \mathfrak{n}^{\rho}=(o)$$

ist, und wenn in $\mathfrak{o}'$ jede gegenseitig relativprimen Primideale immer teilerfremd sind.

Dass im Satz 4 die Existenz des Einheitselements nicht nötig ist, zeigt das folgende **Beispiel**: Die Gesamtheit $\mathfrak{R}$ aller geraden Zahlen bildet einen Ring. Wir werden aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion einer unbestimmten x den Polynomring $\mathfrak{R}[x]$ ableiten. Ist $\mathfrak{a}=(2x, x^n)$, so besitzt der Restklassenring $\mathfrak{R}[x]/\mathfrak{a}$ die im obigen Satz ausgesprochenen Eigenschaften, aber kein Einheitselement. In diesem Restklassenring gilt die eindeutige Reduktion jedes Ideals durch minimale primäre Ideale, dagegen gilt nicht mehr die eindeutige Zerlegung jedes Ideals durch grösste Primärideale (im Sinne von Noether), und auch nicht die eindeutige Zerlegung jedes Ideals durch primäre Ideale (im Sinne von Sono).

Es sei $\mathfrak{R}$ der Ring, der aus zwei Unbestimmten x und y abgeleitet ist, und sei $\mathfrak{a}=(x-x^2, xy, 2y-y^2)$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$. Dann wird der Restklassenring $\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ von der Form

$$\mathfrak{R}'=\mathfrak{m}+\mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2,\ \mathfrak{m}=(x),\ \mathfrak{m}_1=(y),$$

wo $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$ beide Primideale sind. Ferner gibt es in $\mathfrak{m}_1$ kein Einheitselement. Im Ring $\mathfrak{R}'$ gilt damit die Eindeutigkeit der Darstellung jedes Ideals als kürzesten Durchschnitt von grössten Primäridealen (im

Sinne von Noether), aber es gilt nicht mehr die eindeutig Reduktion jedes Ideals durch minimale primäre Ideale (im Sinn von Sono).

Herrn Professor Dr. M. Sono bin ich für seine Anregung zu dieser Arbeit und sein dauerndes Interesse an ihrem Fortgang zu grossem Dank verpflichtet.