Struktur des Sonoschen Ringes.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 5. 5. 1932.)

Unter dem Titel „*On Congruences*" hat Prof. Sono seine Idealtheorie im kommutativen Ring entwickelt, in dem die Existenz einer Hauptreihe, die mit jedem vom Nullideal verschiedenen Ideal beginnt, vorausgesetzt wird,[1] und nachher hat Frl. Noether auch gezeigt, dass die Voraussetzung der Existenz einer Hauptreihe im Restklassenring gleichwertig dem Doppelkettensatz ist[2]. In der vorliegenden Untersuchung werde ich einen mehr konkreten Einblick in die Struktur des Sonoschen Ringes geben und einige Eigenschaften der Hauptreihen von den zu demselben Primideal gehörigen Primäridealen untersuchen.

Im folgenden wird der allgemeine kommutative Ringbereich $\mathfrak{R}$ zugrunde gelegt, der nur dem *Teilerkettensatz* genügen muss, dass jede Kette von Idealen im Endlichen abbricht, bei der jedes Ideal ein echter Teiler des vorangehenden ist.

Neue Definition für die Darstellung eines Ideals durch grösste Primärideale.

Sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die zugehörigen verschiedenen Primideale eines von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Ideals $\mathfrak{a}$, so existiert eine kürzeste Darstellung $\mathfrak{a}=[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n]$, wobei $\mathfrak{q}_i$ ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal von der Eigenschaft ist, dass für jedes durch $\mathfrak{a}$ unteilbare Element q_i aus $\mathfrak{q}_i$ stets $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{a} : (q_i)$ ist.[3] Aus der Eigenschaft von $\mathfrak{p}_i$ folgt die Existenz eines Elementes p_i derart, dass

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (p_i), \quad p_i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

(1) M. Sono, On Congruences 1., 2., 3., Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University (1917–19).

(2) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **96** (1926).

(3) S. Mori, Minimale Primärideale eines Ideals, dieses Journal, **2**, S. 22.

ist.[1] Nach dem Teilerkettensatz folgt hieraus auch die Existenz eines zu $\mathfrak{p}_i$ gehörigen maximalen Primärideals $\mathfrak{Q}_i$, das ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, von der Art, dass für jedes durch $\mathfrak{a}$ unteilbare Element q_i aus $\mathfrak{Q}_i$ stets $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{a} : (q_i)$ ist. Sind $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n$ die so zu $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ gehörigen Primärideale, so wird auch

$$(1) \qquad \mathfrak{a} = [\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n]$$

Denn, wenn $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n]$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, so existiert in $\mathfrak{a}'$ ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element a' derart, dass $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (a')$ ist. Dabei muss $\mathfrak{p}$ auch ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal sein;[2] also ist $\mathfrak{p}$ identisch mit einem, etwa $\mathfrak{p}_i$, aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$. Nach der Eigenschaft von $\mathfrak{Q}_i$ soll a' durch $\mathfrak{Q}_i$ unteilbar sein; das widerspricht der Tatsache, dass $\mathfrak{a}' \equiv 0 (\mathfrak{Q}_i)$ ist. Hiermit ist die Darstellung (1) als richtig und ferner als eine kürzeste erwiesen.[3] Ist ein Ideal $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{Q}_i$, so wird

$$\mathfrak{a} \neq [\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{b}, \mathfrak{Q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{Q}_n].$$

Denn in $\mathfrak{b}$ gibt es ein Element b derart, dass $b \not\equiv 0 (\mathfrak{a})$, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (b)$ ist.[4] Sind $\mathfrak{p}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_e}$ aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ alle echten Teiler von $\mathfrak{p}_i$, so ist

$$\mathfrak{Q}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{Q}_{i_e} b \not\equiv 0 (\mathfrak{a}).$$

Daraus folgt die Existenz eines Elements b' derart, dass

$$b' \not\equiv 0 (\mathfrak{a}), \; b' \equiv 0 (\mathfrak{b}), \; b' \equiv 0 (\mathfrak{Q}_j) \; (j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$$

ist. Wir können somit zusammenfassend sagen:

Die Darstellung $\mathfrak{a} = [\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n]$ *durch die zu verschiedenen Primidealen gehörigen Primärideale ist eine kürzeste, und kein* $\mathfrak{Q}_i$ *lässt sich durch einen echten Teiler ersetzen. Die Darstellung heisst in diesem Fall „kürzeste Darstellung von* $\mathfrak{a}$ *durch grösste Primärideale.“*[5]

Bei dieser Definition gilt die eindeutige Darstellbarkeit jedes Ideals durch grösste Primärideale in etwas breiterem Ring als den, in dem die eindeutige Darstellbarkeit durch Noethersche grösste Primärideale gilt. Weitergehende Untersuchungen dieses Problems beabsichtige ich in einigen weiteren Abhandlungen folgen zu lassen.

Struktur des Sonoschen Ringes.

Ein echter Teiler $\mathfrak{b}$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ heisst „*minimaler Teiler vom*

(1) S. Mori, Ueber Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, dieses Journal, **1**, S. 170.

(2) Do.

(3), (4) Vgl. Minimale Primärideale eines Ideals, S. 26.

(5) Vgl. E. Noeter, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen **83**, S. 42.

Ideal $\mathfrak{a}$," wenn jeder echte Teiler von $\mathfrak{a}$ kein echtes Vielfaches von $\mathfrak{b}$ ist. Ist r ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbars Element und ist n die kleinste, von Null verschiedene positive ganze Zahl, für welche $nr \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ ist, so heisst n die „*Ordnung von* r *in bezug auf* $\mathfrak{a}$." Ist r ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element, so heisst r „*Totalnullteiler in bezug auf* $\mathfrak{a}$," wenn $\mathfrak{o}r \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ ist. Durch Einführung der obigen Begriffe und Benutzung der neuen Definition für die Kürzeste Darstellung jedes Ideals durch grösste Primärideale können wir den folgenden Satz beweisen.

Satz I. *Ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *besitzt dann und nur dann einen minimalen Teiler* r, *wenn ein zu* $\mathfrak{a}$ *gehöriges Primideal ein maximales Ideal ist, oder wenn ein Totalnullteiler von endlicher Ordnung in bezug auf* $\mathfrak{a}$ *existiert.*

Wir nehmen zunächst an, dass $\mathfrak{a}$ einen minimalen Teiler $\mathfrak{a}'$ besitzt. Es sei $\mathfrak{a} = [\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n]$ eine körzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale, dann ist $\mathfrak{a}'$ unteilbar durch eines, etwa $\mathfrak{Q}_n$, aus $\mathfrak{Q}_i$ $(i=1, \ldots, n)$, und folglich soll

$$(1) \qquad \mathfrak{a} = [\mathfrak{a}', \mathfrak{Q}_n]$$

sein, denn $\mathfrak{a}'$ ist ein minimaler Teiler von $\mathfrak{a}$. Ferner ist $\mathfrak{t} = (\mathfrak{a}', \mathfrak{Q}_n)$ auch ein minimaler Teiler von $\mathfrak{Q}_n$.[1]

Es sind nun zwei Fälle denkbar: Entweder nämlich gehört $\mathfrak{Q}_n$ zu $\mathfrak{o}$, oder nicht. Im ersten Fall ist $\mathfrak{t}$ auch ein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges Primärideal, und folglich gibt es in $\mathfrak{t}$ einen Totalnullteiler $\bar{r}$ in bezug auf $\mathfrak{a}$, da $\mathfrak{t}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{Q}_n$ ist.[2] Es sei damit

$$\bar{r} = q_n + a',$$

wo q_n ein Element aus $\mathfrak{Q}_n$, a' ein Element aus $\mathfrak{a}'$ ist. Aus $\mathfrak{o}\bar{r} \equiv 0\,(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \equiv 0\,(\mathfrak{Q}_n)$ folgt damit

$$(2) \qquad \mathfrak{o}a' \equiv 0\,(\mathfrak{Q}_n), \quad a' \not\equiv 0\,(\mathfrak{a}).$$

Andererseits ist aber $\mathfrak{o}a' \equiv 0\,(\mathfrak{a}')$; daher folgt wegen (1), (2)

$$\mathfrak{o}a' \equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

Aus unserer Voraussetzung, dass $\mathfrak{a}'$ ein minimaler Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, ergibt sich für eine Primzahl p

$$pa' \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \quad a' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}).$$

Wir haben daher einen Totalnullteiler a' von endlicher Ordnung in bezug auf $\mathfrak{a}$.

---

(1) M. Sono, On Congrunences. Satz. *Es seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei Ideale, und es sei auch* $\mathfrak{v} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, $\mathfrak{t} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. *Wenn* $\mathfrak{a}$ *ein minimaler Teiler von* $\mathfrak{v}$ *ist, so wird* $\mathfrak{t}$ *auch ein minimaler Teiler von* $\mathfrak{b}$.

(2) Vgl. den vorigen Paragraphen.

Im zweiten Fall sei $\mathfrak{p}_n$ das zu $\mathfrak{Q}_n$ gehörige Primideal. Besitzt $\mathfrak{p}_n$ einen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler $\mathfrak{b}$, so wird für ein durch $\mathfrak{Q}_n$ uuteilbares Element t aus $\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{t}=(\mathfrak{b}t, \mathfrak{Q}_n)=(\mathfrak{o}t, \mathfrak{Q}_n),$$

da $\mathfrak{Q}_n$ ein Primärideal ist. Daraus folgt

$$bt\equiv rt\,(\mathfrak{Q}_n),\ (r-b)\,t\equiv 0\,(\mathfrak{Q}_n),$$

wobei b ein durch $\mathfrak{Q}_n$ unteilbares Element aus $\mathfrak{b}$, r ein durch $\mathfrak{b}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Da $\mathfrak{Q}_n$ ein Primärideal ist, so folgt daraus

$$r-b\equiv 0\,(\mathfrak{p}_n),\ r\equiv 0\,(\mathfrak{b})$$

gegen die obige Voraussetzung. Hiermit muss $\mathfrak{p}_n$ ein maximales Ideal sein.

Es sei $\mathfrak{a}=[\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n]$ eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale und sei $\bar{r}$ ein Totalnullteiler von endlicher Ordnung in bezug auf $\mathfrak{a}$. Dann ist $\mathfrak{o}$ das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideal und für eine endliche ganze Zahl k ist $k\bar{r}\equiv 0\,(\mathfrak{a})$. Ferner gehört eine, etwa $\mathfrak{Q}_n$, aus den Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{o}$ und $\bar{r}\not\equiv 0\,(\mathfrak{Q}_n)$ ist. Es sei $k=k'p$, wo p eine Primzahl ist, dann ist $k'\bar{r}\not\equiv 0\,(\mathfrak{a})$, und ferner ist $\mathfrak{t}=(\mathfrak{Q}_n, (k'\bar{r}))$ ein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges Primärideal und ein minimaler Teiler von $\mathfrak{Q}_n$. Setzen wir nun

$$\mathfrak{a}'=[\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_{n-1}, \mathfrak{t}],$$

so ist offenber $\mathfrak{a}\equiv 0\,(\mathfrak{a}')$. Da $\mathfrak{o}(k'\bar{r})\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ ist, so soll $k'\bar{r}\equiv 0\,(\mathfrak{Q}_i)$ $(i=1, \ldots, (n-1))$ sein, denn $\mathfrak{Q}_i$ die Primärideale sind; also soll $k'\bar{r}\equiv 0\ (\mathfrak{a}')$, $k'\bar{r}\not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ sein. Hiermit ist $\mathfrak{a}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ und es gibt kein Ideal zwischen $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}$; womit $\mathfrak{a}'$ ein minimaler Teiler von $\mathfrak{a}$ ist.

Es sei nun das zu $\mathfrak{Q}_n$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}_n$ ein maximales Ideal. Wenn $\mathfrak{p}_n=\mathfrak{Q}_n$ ist, so setzen wir $\mathfrak{o}=\mathfrak{t}$. Dann gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{Q}_n$. Im anderen Fall können wir ein Element p_n in $\mathfrak{p}_n$ finden, so dass

$$\mathfrak{p}_n p_n=0\,(\mathfrak{Q}_n),\ p_n\not\equiv 0\,(\mathfrak{Q}_n)$$

ist. Bilden wir ein Ideal $\mathfrak{t}=(\mathfrak{Q}_n, \mathfrak{o}p_n)$, so ist $\mathfrak{t}$ auch ein zu $\mathfrak{p}_n$ gehöriges Primärideal. Denn, da $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_n$ ein Körper ist, so ist es unmöglich, dass für ein durch $\mathfrak{p}_n$ unteilbares Element r und ein durch $\mathfrak{t}$ unteilbares Element p_n' aus $\mathfrak{p}_n$

$$rp_n'\equiv 0\ (\mathfrak{t})$$

ist; sonst würde

$$rp_n'=q_n+r'p_n,\ r'\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_n),$$

da $\mathfrak{Q}_n$ ein Primärideal ist, daraus folgte

$$\mathfrak{p}_n r p_n' \equiv 0 \ (\mathfrak{Q}_n), \ \mathfrak{p}_n p_n' \equiv 0 \ (\mathfrak{Q}_n).$$

Folglich würde

$$r' p_n' = q_n' + r' r'' p_n, \ r' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_n), \ r'' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_n), \ q_n' \equiv 0 \ (\mathfrak{Q}_n),$$

dabei bedeutet r'' ein Element von der Art, dass $r' \equiv r r'' \ (\mathfrak{p}_n)$ ist. Da $\mathfrak{Q}_n$ ein Primärideal ist, so folgte daraus

$$p_n' - r'' p_n \equiv 0 \ (\mathfrak{Q}_n), \ p_n' \equiv 0 \ (\mathfrak{t})$$

gegen die Voraussetzung. Weiter gibt es offenbar kein Ideal zwischen $\mathfrak{Q}_n$ und $\mathfrak{t}$, da $\mathfrak{p}_n p_n \equiv 0 \ (\mathfrak{Q}_n)$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_n$ ein Körper ist. Setzen wir wieder

$$\mathfrak{a}' = [\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_{n-1}, \mathfrak{t}],$$

so ist $\mathfrak{a}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$, denn aus der Eigenschaft der kürzester Darstellung von $\mathfrak{a}$ soll $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ verschieden sein. Da $\mathfrak{t}$ ein minimaler Teiler von $\mathfrak{Q}_n$ ist, so folgt aus $\mathfrak{a} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{Q}_n]$, $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{b}, \mathfrak{t}]$, $\mathfrak{b} = [\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_{n-1}]$, dass es kein Ideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ gibt; womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

Mit Hilfe dieses Satzes gelangen wir leicht zum

Satz 2. *Im Ring $\mathfrak{R}$ gibt es dann und nur dann eine Hauptreihe, die mit jedem vom Nullideal verschiedenen Ideal aus $\mathfrak{R}$ beginnt, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen*[1] *erfüllt sind:*

1. *Jedes vom Nullideal und $\mathfrak{o}$ verschiedene Primideal ist zugleich ein maximales Ideal.*

2. *Für jedes zu $\mathfrak{o}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q} (\neq (0))$ ist der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ stets endlich. M. a. W.: Für jedes Ideal $\mathfrak{q} (\neq (0))$ von zweiter Art ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ immer endlich.*

Es sei im Ring $\mathfrak{R}$ die Existenz einer Hauptreihe vorausgesetzt, die mit jedem vom Nullideal verschiedenen Ideal beginnt. Es sei $\mathfrak{q}$ auch ein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges, von (0) vershiedenes Primärideal. Dann soll eine Hauptreihe $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n, \mathfrak{o}$ existieren. Da jedes Element aus $\mathfrak{q}_1$ der Totalnullteiler in bezug auf $\mathfrak{q}$ ist, so muss die Ordnung jedes Elementes aus $\mathfrak{p}_1/\mathfrak{q}$ endlich sein; sonst wäre $\mathfrak{q}_1$ kein minimaler Teiler von $\mathfrak{q}$. Damit besitzt $\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}$ nur endlich viele verschiedene Elemente. Auf gleiche Weise erkennen wir, dass der Restklassenring $\mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1$ auch endlich ist. Indem wir in solcher Weise fortfahren, gelangen wir zum Resultat, dass alle

(1) Die Bedingungen sind äquivalenz mit den wohl bekannten Noetherschen Bedingungen:

1. Teilerkettensatz: Jede Kette von Idealen, bei der jedes Ideal ein echter Teiler des vorangehenden ist, bricht im Endlichen ab.

2. Vielfachen-Kettensatz modulo jedem vom Nullideal verschiedenen Ideal.

Restklassenringe $\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{o}/\mathfrak{q}_n$ sämtlich endlich sind. Daraus folgt, dass die zweite Bedingung notwendig ist. Ist $\mathfrak{p}$ ein vom Nullideal und $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal, und ist $\mathfrak{b}$ ein minimaler Teiler von $\mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{b}=\mathfrak{o}$. Denn, ist $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{o}$, so wird für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element b aus $\mathfrak{b}$

$$rb\equiv p'b \ (\mathfrak{p}),\ r\not\equiv 0 \ (\mathfrak{b}),\ p'\equiv 0 \ (\mathfrak{b}),\ p'\not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}),$$

da $(\mathfrak{o}b, \mathfrak{p})=(\mathfrak{b}b, \mathfrak{p})=\mathfrak{b}$ ist. Daraus folgt

$$r-p'\equiv 0 \ (\mathfrak{p}),\ r\equiv 0 \ (\mathfrak{b})$$

gegen die Voraussetzung. Jedes vom Nullideal verschiedene Primideal besitzt damit kein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Ideal als echten Teiler.

Es seien jetzt die Bedingungen vorausgesetzt. Ist $\mathfrak{a}$ ein vom Nullideal verschiedenes Ideal, so gibt es eine kürzeste Darstellung und jedes zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideal ist ein maximales Ideal, oder das Einheitsideal. Ist $\mathfrak{a}$ kein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges Primärideal, so existiert damit nach Satz I ein minimaler Teiler von $\mathfrak{a}$. Im anderen Fall ist nach der Bedingung $2\ \mathfrak{R}'=\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ endlich, und damit existiert ein Totalnullteiler von endlicher Ordnung in bezug auf $\mathfrak{a}$. Die Bedingungen sind hiermit auch hinreichend.

Um einen Einblick in die verschiedenen möglichen Ringtypen zu gewinnen, haben wir den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Sonoscher Ring.*

1. *Ist das Nullideal kein Primideal, so wird*

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\ldots\ldots+\mathfrak{m}_n+\mathfrak{n},$$

wobei jedes Ideal $\mathfrak{m}_i$ ein Ring, in dem es nur Nullteiler und Einheiten gibt, und $\mathfrak{n}$ das nilpotente Ideal ist.

2. *Ist* (0) *Primideal und gibt es kein Primideal ausser* (0) *und* $\mathfrak{o}$, *und*

(a) *existiert das Einheitselement, so ist $\mathfrak{R}$ ein Körper,*

(b) *existiert kein Einheitselement, so besitzt $\mathfrak{R}$ die folgenden Eigenschaften:* (*I*) *Für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$ gilt stets $\lambda r=er$, $\lambda>1$, wo λ eine bestimmte ganze Zahl, e ein bestimmtes Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet.* (2) *Für jede Elemente a und b $(\neq 0)$ gibt es ein Element b' so dass $a^n=bb'$ ist.*[1]

Der erste Teil des Satzes folgt leicht aus dem in der Fussnote ausgesprochenen Satz[2] und aus der Eigenschaft des Sonoschen Ringes.

(1) In diesem Fall ist $\mathfrak{R}$ ein $\mathfrak{R}$-adischer Ring.

(2) S. Mori, Ueber Teilerfremdheit von Idealen, dieses Journal **2**, S. 105. Satz. *Ist jedes Primideal* $(\neq\mathfrak{o})$ *aus $\mathfrak{R}$ zugleich ein maximales Ideal, so wird $\mathfrak{o}^\lambda=\mathfrak{o}^{\lambda+1}$ für eine endliche ganze Zahl λ.*

Der zweite Teil ist auch einleuchtend.[1]

Wir werden nun den letzten Teil beweisen. Da kein von (0) und $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal und kein Einheitselement in $\mathfrak{R}$ existiert, so wird für jedes vom Nullideal verschiedene Ideal $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{o}^{\rho} \equiv 0 \ (\mathfrak{a}),$$

wo ρ eine endliche ganze Zahl bedeutet. Für jede Elemente a und $b\,(\neq 0)$ existiert damit ein solches Element b', dass $a^n = bb'$ ist. Setzen wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}f$, wo $f(\neq 0)$ ein Element aus $\mathfrak{R}$ ist, so ist $\mathfrak{a}$ von (0) verschieden, denn das Nullideal ist prim. Ist $f \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$, so wird $f = fr'$, wo r' ein Element aus $\mathfrak{R}$ ist, und folglich ist r' das Einheitselement gegen die Voraussetzung. Hiermit ist f durch $\mathfrak{a}$ unteilbar. Da nach Satz 2 aber der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ endlich ist, so muss für eine endliche Zahl λ

$$\lambda f = ef, \ \lambda > 1$$

sein, wo e ein Element aus $\mathfrak{R}$ ist. Daher folgt für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$

$$\lambda r = er, \ \lambda > 1.$$

Umgekehrt gilt der folgende

Satz 4. *Existiert für jede Elemente a und $b(\neq 0)$ aus $\mathfrak{R}$ stets ein solches Element b', dass*

$$a^n = bb'$$

ist, so gibt es in $\mathfrak{R}$ kein Primideal $(\neq (0))$ ausser $\mathfrak{o}$, und $\mathfrak{R}$ ist nilpotent, oder besitzt keinen Nullteiler. Ist insbesondere n stets gleich 1, *so ist $\mathfrak{R}$ ein Körper.*

Zum Beweis des ersten Teils nehmen wir an, dass $\mathfrak{R}$ nicht nilpotent ist. Dann ist kein Element nilpotent; sonst würde $\mathfrak{R}$ nilpotent. Wenn $ab = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ ist, so folgt aus $b^n = aa'$

$$b^{n+1} = baa' = 0$$

gegen die Tatsache, dass kein Element nilpotent ist. Hiermit gibt es in $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler. Im zweiten Teil besitzt $\mathfrak{R}$ ein nicht-nilpotentes Element, da für ein von Null verschiedenes Element e die Gleichung $e = ee'$ gilt. Folglich gibt es in $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler; also muss $\mathfrak{R}$ ein Körper sein.

Hauptreihen von Primäridealen.

In diesem Paragraphen wollen wir nur die zum von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Primideal gehörigen Primärideale betrachten.

(1) Vgl. etwa. S. Mori, Ueber Ringe., S. 177.

Definition. *Eine Reihe von Primäridealen von* $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$$

heisst eine „Hauptreihe von $\mathfrak{q}_n$, *die mit* $\mathfrak{q}$ *beginnt.“ wenn jedes ein echter Teiler des vorhergehenden ist und wenn kein Primärideal von* $\mathfrak{R}$ *dazwischen geschaltet werden kann, das in* $\mathfrak{q}_i$ *enthalten ist und* $\mathfrak{q}_{i-1}$ *enthält.*

Satz 5. *Sind* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei zu einem von* $\mathfrak{o}$ *verschiedenen Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehörige verschiedene Primärideale, und ist* $\mathfrak{q}'$ *der echte Teiler von* $\mathfrak{q}$, *so existiert eine Hauptreihe*

$$\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}'$$

von endlicher Länge.

Es sei ρ der Exponent von $\mathfrak{q}$, dann wird

$$\mathfrak{p}^\rho \equiv 0 \ (\mathfrak{q}), \ \mathfrak{p}^{\rho-1} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}).$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{p}^\sigma \mathfrak{q}' \equiv 0 \ (\mathfrak{q}), \ \mathfrak{p}^{\sigma-1}\mathfrak{q}' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q})$$

für eine ganze Zahl $\sigma(\leqq \rho)$, und daher folgt auch die Existenz eines Elementes q_1 von der Art, dass

$$(1) \qquad \mathfrak{p} q_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{q}), \ q_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}), \ q_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{q}')$$

ist. Ist $\mathfrak{a}_1 = (\mathfrak{q}, (q_1))$ kein Primärideal, so wird für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r der Idealquotient $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 : (r)$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}_1$. Ist $\mathfrak{a}_2$ noch kein Primärideal, so ist auch für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r' der Idealquotient $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1 : (rr')$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}_2$. Aber nach dem Teilerkettensatz erhalten wir endlich ein Primärideal $\mathfrak{q}_1$ und ein Element r_1 von der Art, dass

$$(2) \qquad r_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \ \mathfrak{q}_1 r_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1)$$

ist. Da $\mathfrak{a}_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{q}')$ und $\mathfrak{q}'$ ein Primärideal ist, so muss $\mathfrak{q}_1$ durch $\mathfrak{q}'$ teilbar sein. Existiert ein Primärideal $\mathfrak{q}_1'$ derart, dass

$$\mathfrak{q} < \mathfrak{q}_1' < \mathfrak{q}_1$$

ist, so muss q_1 durch $\mathfrak{q}_1'$ unteilbar sein; sonst würde $\mathfrak{q}_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_1')$ gegen die Voraussetzung, da $\mathfrak{q}_1'$ ein Primärideal ist. Ferner können wir in $\mathfrak{q}_1'$ ein durch $\mathfrak{q}$ unteilbares Element q_1' finden, und aus (2) folgt

$$(3) \qquad r_1 q_1' = q + (r + \alpha) q_1 \quad q_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}_1'), \ q_1' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}),$$

dabei ist r ein Element aus $\mathfrak{R}$, q ein Element aus $\mathfrak{q}$ und α eine ganze Zahl. Durch Multiplikation von (3) mit einem durch $\mathfrak{p}$ unteilbaren Element r' folgt

$$r'' q_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_1'),$$

wo $r''=r'(r+\alpha)$ ein Element aus $\mathfrak{R}$ ist. Da q_1 durch das Primärideal $\mathfrak{q}_1'$ unteilbar ist, so soll

$$r''\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

sein. Aus (1), (2), und (3) folgt damit

$$r_1r'q_1'\equiv 0 \ (\mathfrak{q}),\ r_1r'\not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}),\ q_1'\not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}).$$

Das widerspricht der Tatsache, dass $\mathfrak{q}$ ein Primärideal ist; womit es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$ gibt.

Falls es noch ein Primärideal zwischen $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}'$ gibt, so finden wir in derselben Weise ein neues Primärideal $\mathfrak{q}_2$, so dass es kein Primärideal aus $\mathfrak{R}$ zwischen $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ gibt; und indem wir eine endliche Anzahl von Malen fortfahren, gelangen wir nach dem Teilerkettensatz zu einem Schluss. Also erhalten wir eine Hauptreihe von Primäridealen

$$\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}'$$

von endlicher Länge.

In Analogie mit dem Beweise von Prof, Sono[1] wollen wir die Eindeutigkeit der Längen der Hauptreihen, die mit demselben Primärideal beginnen. Dazu müssen wir zunächst den folgenden Satz zu beweisen suchen.

Satz 6. *Sind* $\mathfrak{q}_1$ *und* $\mathfrak{q}_2$ *zwei zu demselben Primideal* $\mathfrak{p}(\neq\mathfrak{o})$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{d}$ *ihr Durchschnitt,* $\mathfrak{q}$ *das zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige minimale Primärideal*[2] *von* $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ *und gibt es ferner kein Primärideal zwischen* $\mathfrak{d}$ *und* $\mathfrak{q}_1$ *so gibt es auch kein Primärideal zwischen* $\mathfrak{q}_2$ *und* $\mathfrak{q}$.

Der Durchschnitt $\mathfrak{d}$ ist offenbar ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal. Ist $\mathfrak{q}_1$ durch $\mathfrak{q}_2$, oder $\mathfrak{q}_2$ durch $\mathfrak{q}_1$ teilbar, so ist der Satz einleuchtend. Im folgenden nehmen wir hiermit an, dass $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ durcheinander unteilbar sind. Es sei nun $\mathfrak{q}'$ ein Primärideal derart, dass

$$\mathfrak{q}_2<\mathfrak{q}'<\mathfrak{q}$$

ist. Ist $\mathfrak{q}_1=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}']$, so wird $\mathfrak{q}_1\equiv 0 \ (\mathfrak{q}')$, $(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)\not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}')$ und folglich wird $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'$ gegen unsere Voraussetzung, da $\mathfrak{q}$ das minimale Primärideal von $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ ist. Damit muss $\mathfrak{d}'=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}']$ ein echtes Vielfaches von $\mathfrak{q}_1$ und ein Teiler von $\mathfrak{d}$ sein. Nach unserer Voraussetzung soll damit

$$(1) \qquad \mathfrak{d}=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}']$$

sein. Aus der Eigenschaft von $\mathfrak{q}$ folgt die Existenz eines Elementes r derart, dass

(1) M. Sono, On Congruences, S. 217.

(2) Da $\mathfrak{p}$ das höchste Primideal von $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ ist, so ist die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ das minimale Primärideal von $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$. Vgl. S. Mori, Minimale Primärideale eines Ideals, S. 31.

(2) $$\mathfrak{q}'r \equiv 0 \ ((\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)), \ \mathfrak{q}'r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}_2), \ r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

ist; denn $\mathfrak{q}_2$ ist ein Primärideal und $\mathfrak{q}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{q}_2$. In $\mathfrak{q}'r$ können wir damit ein durch $\mathfrak{q}_2$ unteilbares Element q' finden. Dabei soll $q' \not\equiv 0 \, (\mathfrak{q}_1)$ sein; sonst würde nach (1)

$$q' \equiv 0 \ (\mathfrak{d}), \ q' \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_2)$$

im Widerspruch. Aus (2) folgt hiermit

(3) $$q' = q_1 + q_2, \ q_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{d}), \ q_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{d}),$$

wo q_1, q_2 die Elemente aus $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ sind. Da $\mathfrak{q}_2 \equiv 0 \, (\mathfrak{q}')$ ist, so soll $q' - q_2 \equiv 0$ $(\mathfrak{q}')$ sein, und damit folgt aus (1) und (3)

$$q_1 = q' - q_2 \equiv 0 \ (\mathfrak{d}).$$

Das ist aber unmöglich. Hieraus folgt also, dass zwischen $\mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}$ kein Primärideal existiert; womit der Satz bewiesen ist.

Aus Satz 6 ergibt sich nun der

Satz 7. *Die Längen zweier Hauptreihen desselben Primärideals* $\mathfrak{q}'$, *die mit demselben Primärideal* $\mathfrak{q}$ *beginnen, stimmen überein.*[1]

Der Satz ist selbstverständlich, wenn es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ gibt. Zum Beweis des Satzes wenden wir vollständige Induktion an. Der Satz sei bewiesen, falls die Länge einer Hauptreihe von $\mathfrak{q}'$ nicht grösser als eine bestimmte ganze Zahl n ist. Es seien

(1) $$\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{n-1}, \mathfrak{q}'$$

(2) $$\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1' \ldots, \mathfrak{q}_{m-1}, \mathfrak{q}'$$

zwei Hauptreihen von $\mathfrak{q}'$. Ist $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_1'$, so gilt $n = m$ nach Voraussetzung. Im anderen Fall bilden wir das minimale Primärideal $\mathfrak{q}_2''$ von $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_1')$. Dann gibt es nach Satz 6 kein durch $\mathfrak{q}_2''$ teilbares Primärideal, das ein echter Teiler von $\mathfrak{q}_1$ oder $\mathfrak{q}_1'$ ist. Wir können daher zwei Hauptreihen

(3) $$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2'', \ldots, \mathfrak{q}_{l-1}'', \mathfrak{q}'$$

(4) $$\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2'', \ldots, \mathfrak{q}_{l-1}'', \mathfrak{q}'$$

bilden und nach unserer Voraussetzung folgt $n = l$ aus (1) und (3), also folgt $n = l = m$ aus (2) und (4). Die Längen der Hauptreihen stimmen damit überein.

Definition. *Ist ein Primärideal* $\mathfrak{q}'$ *ein echter Teiler eines Primärideals* $\mathfrak{q}$ *und gibt es kein Primärideal aus* $\mathfrak{R}$ *zwischen* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$, *so heisst* $\mathfrak{q}'$ *ein „minimaler primärer Teiler von* $\mathfrak{q}$.“

(1) Dabei gehören $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zum selben Primideal.

Falls ein Primärideal und sein minimaler primärer Teiler zu den verschiedenen Primidealen gehören, so gilt der folgende

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zum Primideal* $(\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o})$ *gehöriges Primärideal und gehört der minimale primäre Teiler* $\mathfrak{q}'$ *von* $\mathfrak{q}$ *zum von* $\mathfrak{p}$ *verschiedenen Primideal* $\mathfrak{p}'$, *so soll*

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{p}' = \mathfrak{q}', \ \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$$

sein.

Wegen $\mathfrak{q} \equiv 0 \ (\mathfrak{q}')$ soll $\mathfrak{p}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ sein. Es sei ρ der Exponent von $\mathfrak{q}'$ und sei $(\mathfrak{p}'^{\rho+k}, \mathfrak{q}) \neq (\mathfrak{p}'^{\rho+k+1}, \mathfrak{q})$ für jede ganze Zahl k. Es sei zunächst auch $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{o}$. Dann ist $(\mathfrak{p}'^{\rho+k}, \mathfrak{q})$ kein Primärideal und $\mathfrak{q}'$ ist das minimale Primärideal dieses Ideals. Hiermit existiert ein Element r derart, dass

$$\mathfrak{q}' r \equiv 0 \ ((\mathfrak{p}'^{\rho+k}, \mathfrak{q})), \ r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}')$$

ist.[1] Setzen wir

$$\mathfrak{p}' = (p_1', \ldots, p_n', \mathfrak{p}), \ k > n\rho,$$

so werden

$$(1) \qquad r p_i'^{\rho} \equiv a_{i1} p_1'^{\rho} + a_{i2} p_2'^{\rho} + \ldots + a_{in} p_n'^{\rho} \ (\mathfrak{p}) \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo a_{ij} die Elemente aus $\mathfrak{p}'$ sind. Durch Elimination von $p_2'^{\rho}, \ldots, p_n^{\rho}$ aus (1) ergibt sich

$$p_1'^{\rho}(r^n - a) \equiv 0 \ (\mathfrak{p}),$$

wobei a ein Element aus $\mathfrak{p}'$ bedeutet. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $p_1' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist, so erhalten wir

$$r^n - a \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \ r^n \equiv 0 \ (\mathfrak{p}'),$$

was unmöglich ist. Damit ist

$$(\mathfrak{p}'^{\lambda}, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}'^{\lambda+1}, \mathfrak{q})$$

für eine endliche ganze Zahl λ, und daher folgt auch

$$(\mathfrak{p}'^{\lambda}, \mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}'^{\lambda+1}, \mathfrak{p}).$$

Da $\mathfrak{p}$ aber ein Primideal ist, so wird

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{p}' = (\mathfrak{p}'^{\lambda}, \mathfrak{p})$$

gegen die Voraussetzung; also muss $\mathfrak{o} = \mathfrak{p}'$ sein. In diesem Fall ist $\mathfrak{q}' = (\mathfrak{q}'^2, \mathfrak{q})$, so wird auch

(1) S. Mori, Minimale Primärideale., S. 28.

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{q}',\ \mathfrak{p}=\mathfrak{q},$$

da $\mathfrak{q}'$ der minimale primäre Teiler von $\mathfrak{q}$ ist.

Mit Hilfe des Satzes gelangen wir zum

Satz 9. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zum Primideal* $\mathfrak{p}(\neq\mathfrak{o})$ *gehöriges Primärideal, so besitzt* $\mathfrak{q}$ *dann und nur dann einen einzigen minimalen primären Teiler, wenn es kein Primärideal zwischen* $\mathfrak{t}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{q}$ *gibt.*

Zunächst werden wir beweisen, dass $\mathfrak{t}$ ein Primärideal ist. Ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$, so wird $\mathfrak{t}=\mathfrak{o}$ und folglich ist unsere Behauptung einleuchtend. Wenn $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$ ist, so wird offenbar $\mathfrak{t}\equiv 0\ (\mathfrak{p})$. Ist $\mathfrak{t}$ nicht primär, so wird

$$pr\equiv 0\,(\mathfrak{t}),\ p\not\equiv 0\,(\mathfrak{t}),\ r\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}),$$

wo p ein Element aus $\mathfrak{p}$, r ein Element aus $\mathfrak{R}$ ist. Daraus folgt wegen $\mathfrak{t}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$

$$pr\mathfrak{p}\equiv 0\ (\mathfrak{q}),\ r\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}).$$

Da $\mathfrak{q}$ aber ein Primärideal ist, so soll $p\mathfrak{p}\equiv 0\ (\mathfrak{q})$ sein, und daher folgt

$$p\equiv 0\ (\mathfrak{t})$$

gegen die obige Voraussetzung. Damit muss $\mathfrak{t}$ Primärideal sein.

Es sei $\mathfrak{q}'$ ein einziger minimaler primärer Teiler von $\mathfrak{q}$. Ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$, so ist $\mathfrak{q}'=\mathfrak{o}$ nach Satz 8, und folglich gibt es zwischen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{q}$ kein Primärideal. Es sei jetzt $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}$ verschieden. Dann muss $\mathfrak{q}'\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ sein, sonst würde ein von $\mathfrak{q}'$ verschiedener minimaler primärer Teiler $\mathfrak{q}''$ von $\mathfrak{q}$ existieren.[1] Da $\mathfrak{t}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{q}$ ist, so können wir in $\mathfrak{t}$ ein durch $\mathfrak{q}$ unteilbares Element q_1 finden. Bilden wir das minimale Primärideal $\mathfrak{q}_1$ von $(\mathfrak{q},(q_1))$, so soll nach der Voraussetzung $\mathfrak{q}'=\mathfrak{q}_1$ sein.[2] Da die Auswahl von q_1 aus $\mathfrak{t}$ beliebig und $q_1\equiv 0\ (\mathfrak{q}')$ ist, so muss

$$\mathfrak{t}\equiv 0\ (\mathfrak{q}')$$

sein. Andererseits ist aber

$$\mathfrak{q}'r\equiv 0\ ((\mathfrak{q},q_1)),\ \mathfrak{p}\mathfrak{q}'r\equiv 0\ (\mathfrak{q}),$$

wo r ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element bedeutet. Aus $r\not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ folgt $\mathfrak{p}\mathfrak{q}'\equiv 0\ (\mathfrak{q})$; also ist

$$\mathfrak{q}'\equiv 0\ (\mathfrak{t}).$$

Folglich ist $\mathfrak{q}'=\mathfrak{t}$, womit die oben ausgesprochene Bedingung notwendig ist.

---

(1), (2) Vgl. den Beweis des Satzes 5.

Es sei nun vorausgesetzt, dass es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{q}$ gibt. Ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$, so ist die Bedingung offenbar hinreichend. Im anderen Fall ist $\mathfrak{t}\equiv 0\ (\mathfrak{p})$. Ist $\mathfrak{q}''$ ein minimaler primärer Teiler von $\mathfrak{q}$, so muss $\mathfrak{q}''$ gemäss Satz 8 zu $\mathfrak{p}$ gehören, und folglich ist

$$\mathfrak{t}=\mathfrak{q}'', \quad \text{oder} \quad \mathfrak{q}=[\mathfrak{t}, \mathfrak{q}''],$$

da $\mathfrak{t}$ das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal ist. Im letzten Fall existiert ein Element q'' von der Art, dass

$$\mathfrak{p}q''\equiv 0\ (\mathfrak{q}),\ q''\not\equiv 0\ (\mathfrak{q}),\ q''\equiv 0\ (\mathfrak{q}'')$$

ist. Daher folgt $q''\equiv 0\ (\mathfrak{t})$, also wird $\mathfrak{q}\neq[\mathfrak{t}, \mathfrak{q}'']$ gegen die obige Voraussetzung, womit der letzte Fall unmöglich ist. Hiermit besitzt $\mathfrak{q}$ einen einzigen minimalen primären Teiler $\mathfrak{t}$.

Hauptreihen der zu $\mathfrak{o}$ gehörigen Primärideale.

Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges Primärideal und besitzt der Restklassenring $R/\mathfrak{q}$ endlich viele Elemente, so stimmen die Längen der Hauptreihen von $\mathfrak{o}$, die mit $\mathfrak{q}$ beginnen, überein. Ferner stimmen auch die Restklassenringe zweier aufeinanderfolgenden Primärideale der Reihen in ihrer Gesamtheit, aber nicht notwendig in ihrer Reihenfolge, überein.[1] Ist aber $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ nicht endlich, so gibt es wenigstens ein Element r von unendlicher Ordnung in bezug auf $\mathfrak{q}$.

Definition. *Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges Primärideal und ist die Ordnung jedes durch $\mathfrak{q}$ unteilbaren Elementes in bezug auf $\mathfrak{q}$ unendlich, so heisst $\mathfrak{q}$ das „zu $\mathfrak{o}$ gehörige Primärideal erster Art.“*

Für die Primärideale erster Art gelten auch die folgenden Sätze wie im vorigen Paragraphen.

Ist $\mathfrak{q}$ das zu $\mathfrak{o}$ gehörige Primärideal der ersten Art, so existiert eine Hauptreihe von den Primäridealen der ersten Art $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{o}$.

Sind $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ zwei zu $\mathfrak{o}$ gehörige Primärideale von ersten Art und ist $\mathfrak{d}=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2]$ und $\mathfrak{q}$ das minimale Primärideal der ersten Art von $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2)$ und gibt es kein Primärideal der ersten Art zwischen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{q}_1$, so gibt es auch kein Primärideal der ersten Art zwischen $\mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}$.

Mit Hife des Satzes können wir wie beim Beweis des Satzes 7 den folgenden Satz beweisen.

Die Längen der zwei Hauptreihen von $\mathfrak{o}$, die mit demselben Primärideal von der ersten Art beginnen, stimmen überein.

(1) M. Sono, On Congruences, S. 220.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. M. Sono für das rege Interesse und die vielfachen Anregungen, die er mir zu dieser Arbeit gegeben hat, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.