Minimale Primärideale eines Ideals.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 9. 11. 1931.)

Ist in einem kommutativen Ring der Teilerkettensatz erfüllt, so gibt es für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus dem Ring ein Primärideal $\mathfrak{q}$ derart, dass $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist, dass es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}$ gibt, und dass das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal ein höchstes Primideal von $\mathfrak{a}$ ist.[1] Ich habe ein solches Primärideal „*minimales Primärideal von* $\mathfrak{a}$" genannt. In der vorliegenden Abhandlung wollen wir die Definition des minimalen Primärideals so erweitern, dass es keine Beschränkung für das zugehörige Primideal gibt. Auf Grund dieser Betrachtung werden wir die folgende erweiterte Definition aufstellen: *Ein primärer Teiler* $\mathfrak{q}$ *eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *heisst minimales Primärideal von* $\mathfrak{a}$, *wenn es kein Primärideal zwischen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{q}$ *gibt.* Ist dabei $\mathfrak{a}$ ein Primärideal, so verstehen wir unter dem minimalen Primärideal von $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{a}$ selbst. Zweck der folgenden Zeilen soll es in erster Linie sein, die Eigenschaften der oben definierten minimalen Primärideale eines Ideals und ihren Zusammenhang mit der kürzesten Darstellung des Ideals durch grösste Primärideale zu untersuchen.

Wir legen stets im folgenden nur einen kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ zugrunde, der den Teilerkettensatz erfüllt, und unter dem Einheitsideal $\mathfrak{o}$ verstehen wir, wie üblich, das aus allen Ringelementen bestehende Ideal.

I. Ueber die zu einem Ideal gehörigen Primärideale.

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus einem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$, für den der Teilerkettensatz erfüllt ist, so lässt $\mathfrak{a}$ eine kürzeste Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen grössten Primärideralen zu. Die Primärideale, die bei irgendeiner kürzesten Dar-

(1) S. Mori, Ueber Ringe, in denen die grössten Primärkompomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, Journal of Science of the Hiroshima University, Series A, **1** (1931).

stellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale auftreten, sollen als „*die zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Primärideale*" bezeichnet werden.

Satz I. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu einem Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal, so gehört* $\mathfrak{q}$ *dann und nur dann zum von* $\mathfrak{o}$ *verschiedenen Ideal* $\mathfrak{a}$, *wenn* $\mathfrak{q}$ *ein Teiler des Ideals* $\mathfrak{a}$ *ist, und wenn es ein Element* p *nur ausserhalb von* $\mathfrak{q}$ *gibt, für das*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (p)\,, \qquad p \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

ist.

Es sei $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primärideal, dann existiert eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale; $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l]$. Ferner existiert nach dem in der Fussnote angegebenen Satz[1] ein Element p derart, dass

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (p)\,, \qquad p \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})\,.$$

Wir nehmen hier an, dass für ein Element q aus $\mathfrak{q}$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (q)\,, \qquad q \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

ist. Da $q \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ ist, so soll q durch wenigstens eines aus $\mathfrak{q}_i\,(i = 1, 2, \ldots, l)$ unteilbar sein. Wir haben also etwa

$$q \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}_i) \ \ (i = 1, 2, \ldots, k)\,;$$

daraus folgen wegen der Eigenschaft der Primärideale $\mathfrak{q}_i$

$$\mathfrak{p} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i) \ \ (i = 1, 2, \ldots, k)\,,$$

wobei $\mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal bedeutet. Es sind aber $q \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)$ $(i = k+1, k+2, \ldots, l)$; hieraus ergibt sich wegen der Gleichung

$$\mathfrak{a} = \Big[[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{q}_l], [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_k]\Big]$$

$$q\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_k \equiv 0 \ (\mathfrak{a})\,.$$

Da $\mathfrak{p}_i\,(i = 1, 2, \ldots, k)$ echte Teiler von $\mathfrak{p}$ sind, so können wir ein Element q' finden, so dass

$$qq' \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \qquad \mathfrak{q}' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

(1) Vgl. S. Mori, Ueber Ringe. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ ist dann und nur dann ein zugehöriges Primideal eines von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Ideals $\mathfrak{a}$, wenn es ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Ideal $\mathfrak{b}$ derart gibt, dass $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ wird.

wird. Aus dieser Tatsache ergibt sich $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a} : (q)$ gegen die Voraussetzung. Hiermit soll stets $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a} : (q)$ für jedes durch $\mathfrak{a}$ unteilbare Element q aus $\mathfrak{q}$ sein; also sind die Bedingungen notwendig.

Existiert umgekehrt ein Element p nur ausserhalb von $\mathfrak{q}$, für das $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (p)$, $p \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ ist, so ist wegen des im vorigen Falle gebrauchten Satzes das Primideal $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal. Damit soll ein Primärideal, etwa $\mathfrak{q}'$, in der kürzesten Darstellung $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}', \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_l']$ durch grösste Primärideale zu $\mathfrak{p}$ gehören, und für eine endliche ganze Zahl n wird

$$(1) \qquad \mathfrak{p}^n[\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_l'] \equiv 0\ (\mathfrak{a}).$$

Ist ferner $\mathfrak{q}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$, so soll $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_l']$ auch ein Teiler von $\mathfrak{a}$ sein. Ist $\mathfrak{a}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$, so haben wir wegen (1)

$$a'\mathfrak{p}^n \equiv 0\ (\mathfrak{a}), \qquad a' \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}),$$

wobei a' ein Element aus $\mathfrak{a}'$ bedeutet. Es gibt damit ein Element b derart, dass

$$b\mathfrak{p} \equiv 0\ (\mathfrak{a}), \qquad b \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}), \qquad b \equiv 0\ (\mathfrak{a}')$$

sind. Dabei ist aber

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (b).$$

Sonst würde für ein Element b'

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{a} : (bb'), \qquad bb' \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}),$$

wo $\mathfrak{p}'$ ein echter primer Teiler von $\mathfrak{p}$ ist, und daraus folgte $bb' \not\equiv 0(\mathfrak{q}')$, da $bb' \equiv 0([\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_l'])$, $bb' \not\equiv 0(\mathfrak{a})$ sind. Daher hätten wir wegen der Eigenschft von $\mathfrak{q}'$

$$\mathfrak{p}'^n \equiv 0\ (\mathfrak{p})$$

mit Widerspruch. Es existiert nämlich ein Element b in $\mathfrak{q}$, für das $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (b)$, $b \not\equiv 0(\mathfrak{a})$ ist. Das widerspricht der Voraussetzung; also soll $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ sein.

Ferner ist $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_l']$ offenbar eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale. Hieraus folgt die Richtigkeit des Satzes.

Aus den hier abgeleiteten Eigenschaften von den zugehörigen Primäridealen und den zugehörigen Primidealen ergibt sich nun sofort der folgende neue Beweis für die Noetherschen Hauptsätze.

Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ vom Einheitsideal verschieden, so existiert ein Element p derart, dass

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (p)\,, \qquad p \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

ist, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist.[1] Ein solches Primideal heisst „*das zu* $\mathfrak{a}$ *gehörige Primideal*", und das Element p soll „*ein dem Primideal* $\mathfrak{p}$ *zugeordneter Nullteiler in bezug auf* $\mathfrak{a}$" bezeichnet werden.

Satz 2. *Sind* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ *die zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen verschiedenen Primideale, und bedeutet* p_i *den* $\mathfrak{p}_i$ *zugeordneten Nullteiler in bezug auf* $\mathfrak{a}$, *und ist* $\mathfrak{t}_i = ((\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_1), (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_2), \ldots, (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_i))$, *so wird für* $n \geqq 2$

$$\left[\mathfrak{t}_{n-1}, (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_n)\right] = \mathfrak{a}\,.$$

Ist dabei p_i *dem Einheitsideal* $\mathfrak{o}$ *zugeordnet, so nehmen wir* $(\mathfrak{a}, (p_i))$ *anstatt* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_i)$.

Indem wir zum Beweis vollständige Induktion anwenden, nehmen wir an, dass die Behauptung stets gilt, wenn die Anzahl der Ideale $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_i)$ kleiner als n ist.

Wäre $[\mathfrak{t}_{n-1}, (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_n)] \neq \mathfrak{a}$, so würde

$$(1) \qquad r_n p_n = r_1 p_1 + \ldots + r_{n-1} p_{n-1} + a \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})\,,$$

wo r_i eine ganze Zahl oder ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet, je nachdem ob $\mathfrak{p}_i$ das Einheitsideal ist, oder nicht, und ferner a ein Element aus $\mathfrak{a}$ ist. Dabei soll wenigstens ein Glied, etwa $r_1 p_1$, der Gleichung (1) durch $\mathfrak{a}$ unteilbar sein. Wenn $\mathfrak{p}_n$ durch $\mathfrak{p}_1$ teilbar ist, so folgte durch Multiplikation von (1) mit $\mathfrak{p}_1$

$$r r_n p_n = r r_2 p_2 + \ldots + r r_{n-1} p_{n-1} + a'\,,$$

wobei r ein durch $\mathfrak{p}_n$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}_1$ ist. Ferner soll dabei $r r_n p_n \not\equiv 0 (\mathfrak{a})$ sein. Denn, da $\mathfrak{p}_n$ von $\mathfrak{o}$ verschieden ist, so ist r_n ein durch $\mathfrak{p}_n$ unteilbares Element, und $r \not\equiv 0 (\mathfrak{p}_n)$. Also hätten wir

$$\left[(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_n), \left((\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_2), \ldots, (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_{n-1})\right)\right] \neq \mathfrak{a}$$

gegen die Voraussetzung. Im anderen Falle folgte auch durch Multiplikation mit $\mathfrak{p}_n$

$$r' r_1 p_1 + \ldots + r' r_{n-1} p_{n-1} = a''\,, \qquad r' r_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1)\,,$$

(1) S. Mori, Ueber Ringe. § 3.

wo r' ein Element aus $\mathfrak{p}_n$ ausserhalb $\mathfrak{p}_1$ ist; was auch nicht möglich ist. Damit soll $\mathfrak{a} = [\mathfrak{t}_{n-1}, (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_n)]$ sein.

Es ist nur noch zu zeigen, dass für $n = 2$ die Behauptung gilt. Das ist aber klar nach dem oben bewiesenen Verfahren.

Der Satz 2 ermöglicht uns in Verbindung mit der Voraussetzung vom Teilerkettensatz den Endlichkeitsbeweis für die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale.

Die Anzahl der zu $\mathfrak{a}$ gehörigen verschiedenen Primideale ist endlich.

Ich wiederhole hier einen einfachen Beweis von

Fundamentalsatz. *Jedes Ideal lässt eine kürzeste Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches von grössten Primäridealen zu. Dabei sind die zu den Primärkomponenten gehörigen Primideale eindeutig bestimmt.*

Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ alle zu $\mathfrak{a}(\neq \mathfrak{o})$ gehörigen verschiedenen Primideale. Ist $\mathfrak{m}_i$ ein maximales Ideal, das ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist und keinen $\mathfrak{p}_i$ zugeordneten Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{a}$ enthält, so wird $\mathfrak{m}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a}$ selbst, je nachdem $n > 1$ oder $n = 1$ ist[1].

Es sei nun

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (p_i), \qquad p_i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}).$$

Ist $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{o}$, so wird $[(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_i), \mathfrak{m}_i] = \mathfrak{a}$; da für jedes Element r ausserhalb $\mathfrak{p}_i$ $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (rp_i)$ ist. Daraus folgt $\mathfrak{m}_i \mathfrak{o}p_i \equiv 0(\mathfrak{a})$; also wird

$$\mathfrak{m}_i \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i).$$

Die Beziehung gilt auch für $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}$. Ist p_i' ein Element aus $\mathfrak{p}_i$ ausserhalb von $\mathfrak{m}_i$, und ist $p_i'^k \not\equiv 0(\mathfrak{m}_i)$ für jedes k, so folgt aus dem Teilerkettensatz

$$\mathfrak{t}_i = \mathfrak{m}_i : \mathfrak{o}p_i'^m = \mathfrak{m}_i : \mathfrak{o}p_i'^{m+1} = \mathfrak{m}_i : \mathfrak{o}p_i'^{m+2}$$

für eine endliche Zahl m. Da $\mathfrak{o}p_i'^m p_i \equiv 0(\mathfrak{a})$ ist, so soll $\mathfrak{t}_i$ ein echter Teiler von $\mathfrak{m}_i$ sein. Nach der Eigenschaft von $\mathfrak{m}_i$ folgt auch

$$\bar{p}_i = rp_i'^{m+1} + m_i, \qquad rp_i'^{m+1} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{m}_i),$$

wobei $\bar{p}_i$ ein $\mathfrak{p}_i$ zugeordneter Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{a}$, r ein Element aus $\mathfrak{R}$, und m_i ein Element aus $\mathfrak{m}_i$ ist. Daraus folgt

$$rp_i'^{m+2} \equiv 0 \ (\mathfrak{m}_i).$$

(1) Für $n > 1$ vgl. den Satz 2, und für $n = 1$ vgl. etwa S. Mori, Ueber Ringe. § 3.

Es wird also $r \not\equiv 0(\mathfrak{m}_i : \mathfrak{o}p_i'^m)$, $r \equiv 0(\mathfrak{m}_i : \mathfrak{o}p_i'^{m+2})$ mit Widerspruch. Hiermit soll eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}_i$ durch $\mathfrak{m}_i$ teilbar sein. Wäre für p_i' und ein Element r ausserhalb $\mathfrak{p}_i(\neq \mathfrak{o})$

$$p_i' r \equiv 0 \ (\mathfrak{m}_i), \qquad p_i' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i), \qquad p_i' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{m}_i),$$

so würde wegen
$$\bar{p}_i = r' p_i' + \alpha p_i' + m_i$$
$$r\bar{p}_i \equiv 0 \ (\mathfrak{m}_i),$$

wo r' ein Element aus $\mathfrak{R}$, α eine ganze Zahl ist. Das ist aber unmöglich, da $\bar{p}_i$ ein $\mathfrak{p}_i$ zugeordneter Nullteiler ist. Aus den oben bewiesenen Eigenschaften von $\mathfrak{m}_i$ ergibt sich, dass in jedem Falle $\mathfrak{m}_i$ ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal ist.

Es ist noch zu zeigen, dass $\mathfrak{a} = [\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n]$ wird, und dass die Darstellung eine kürzeste durch grösste Primärideale ist. Wäre $\mathfrak{d} = [\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n] \neq \mathfrak{a}$, so würde für ein Element d aus $\mathfrak{d}$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (d), \qquad d \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a});$$

was nicht möglich ist, da $\mathfrak{p}$ mit einem aus $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ identisch ist. Hiermit soll $\mathfrak{a} = [\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n]$ sein.

Wäre $\mathfrak{d}_i \equiv 0 \ (\mathfrak{m}_i)$ für $\mathfrak{d}_i = [\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_{i-1}, \mathfrak{m}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{m}_n]$,

so würde wegen
$$\mathfrak{d}_i = \Big[[\mathfrak{m}_{s_1}, \ldots, \mathfrak{m}_{s_k}], [\mathfrak{m}_{t_1}, \ldots, \mathfrak{m}_{t_l}]\Big]$$
$$[\mathfrak{m}_{t_1}, \ldots, \mathfrak{m}_{t_l}] \equiv 0 \ (\mathfrak{m}_i),$$

wo $\mathfrak{p}_i$ kein Teiler des zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}_{s_i}$ von $\mathfrak{m}_{s_i}$ ist, während $\mathfrak{p}_i$ ein Teiler des zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}_{t_i}$ von $\mathfrak{m}_{t_i}$ ist. Ist aber $\mathfrak{p}_j \equiv 0$ $(\mathfrak{p}_i)$ $(i \neq j)$, so muss $p_i \equiv 0 \ (\mathfrak{m}_j)$ sein, da $\mathfrak{m}_j$ ein Primärideal ist. Damit wäre $p_i \equiv 0 \ ([\mathfrak{m}_{t_1}, \ldots, \mathfrak{m}_{t_l}])$ mit Widerspruch. Also ist die Darstellung eine kürzeste, und ferner ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier $\mathfrak{m}$ nicht mehr primär.

Es sei uun $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{n'}']$ eine andere kürzeste Darstellung durch grösste Primärideale und sei auch $\mathfrak{p}_i'$ das zu $\mathfrak{q}_i'$ gehörige Primideal. Dann wird $\mathfrak{p}_i'$ das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideal;[1] also soll jedes $\mathfrak{p}_i'$ mit einem aus $\mathfrak{p}_j$ identisch sein. Wäre $n' < n$, so würde

$$p_n \mathfrak{q}_{s_1}' \ldots \mathfrak{q}_{s_k}' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}),$$

(1) S. Mori, Ueber Ringe. § 3.

wo $\mathfrak{p}_n$ kein Teiler von $\mathfrak{p}'_{s_i}$, und $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{a} : (p_n)$ ist. Ist $\mathfrak{p}_n$ ein Teiler von $\mathfrak{p}'_{ti}$, so wird wegen der Eigenschaft vom Primärideal $\mathfrak{q}'_{ti}$

$$p_n \mathfrak{q}'_{s_1} \ldots . \mathfrak{q}'_{s_k} \equiv 0 \ (\mathfrak{q}'_{t_i}) \ (i = 1, 2, \ldots . , l) ;$$

daraus folgte nämlich $p_n \mathfrak{q}'_{s_1} \ldots . \mathfrak{q}'_{s_k} \equiv 0 \ (\mathfrak{a})$ mit Widerspruch. Hiermit ist der Fundamentalsatz in allen Teilen bewiesen.

Satz 3. *Die Gesamtheit aller Nullteiler aus dem Ring $\mathfrak{R}$ bildet die endlich vielen Primideale $\mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, \ldots . , m)$*[1], *und für jedes $\mathfrak{p}_i$ existiert ein Element p_i derart, dass $\mathfrak{p}_i = (0) : (p_i)$, $p_i \neq 0$ ist.*

Da die Anzahl der zum Nullideal gehörigen Primideale endlich ist, so können wir alle zu (0) gehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots . , \mathfrak{p}_m$ finden, die durch kein zu (0) gehöriges Primideal ausser sich selbst teilbar sind. Nach der Definition des zugehörigen Primideals existiert für jedes $\mathfrak{p}_i$ ein Element p_i, so dass

$$\mathfrak{p}_i = (0) : (p_i) , \qquad p_i \neq 0 \ (i = 1, 2, \ldots . , m)$$

ist. Also ist jedes Element aus $\mathfrak{p}_i$ stets ein Nullteiler.

Gäbe es einen Nullteiler r ausserhalb der primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots . , \mathfrak{p}_m$, so würde für ein Element r'

$$rr' = 0 , \qquad r' \neq 0 .$$

Damit existierte ein Primideal $\mathfrak{p}'$ derart, dass

$$\mathfrak{p}' = (0) : (r'') , \qquad r'' \neq 0 , \qquad \mathfrak{p}' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i) \ (i = 1, 2, \ldots . , m)$$

sind. Da aber jedes zu (0) gehörige Primideal durch einem aus $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots . , m)$ teilbar sein soll, so ist damit ein Widerspruch nachgewiesen.

Zusatz. *Sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots . , \mathfrak{p}_m$ die niedersten Primideale eines Ideals $\mathfrak{a}$, und ist $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots . , m)$, so wird $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] = \mathfrak{a}$ $(i \neq j)$.*

Denn, sonst würde $(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) \, a' \equiv 0 \ (\mathfrak{a})$, $a' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})$ mit Widerspruch.

---

(1) Die angegebenen Primideale $\mathfrak{p}_i$ sind identisch mit den durch W. Krull eingeführten niedersten Primidealen vom Nullideal. W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Math. Anna. **101**, § 1.

2. Minimale Primärideale eines Ideals.

Definition. *Ein Primärideal* $\mathfrak{q}$ *heisst „minimales Primärideal eines Ideals* $\mathfrak{a}$*,“ wenn* $\mathfrak{q}$ *ein Teiler von* $\mathfrak{a}$ *ist, und wenn es kein Primärideal zwischen* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{a}$ *(einschl.* $\mathfrak{a}$*) gibt.*

Ist $\mathfrak{a}$ ein Primärideal, so soll $\mathfrak{a}$ als minimales Primärideal von sich selbst bezeichnet werden. Für die derart definierten minimalen Primärideale gilt folgender

Satz 4. *Es sei* $\mathfrak{q}$ *ein zum Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal, und sei auch* $\mathfrak{a}$ $(\neq \mathfrak{o})$ *ein beliebiges, durch* $\mathfrak{q}$ *teilbares Ideal. Ist* $\mathfrak{p}$ *vom Einheitsideal verschieden, so ist* $\mathfrak{q}$ *dann und nur dann das minimale Primärideal von* $\mathfrak{a}$*, wenn es ein durch* $\mathfrak{p}$ *unteilbares Element* r *gibt, derart, dass* $r\mathfrak{q} \equiv 0\ (\mathfrak{a})$ *ist. Ist* $\mathfrak{p}$ *mit dem Einheitsideal identisch, so ist* $\mathfrak{q}$ *dann und nur dann das minimale Primärideal von* $\mathfrak{a}$*, wenn für eine endliche Zahl* ρ

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^{\rho}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^{\rho+1}) = \ldots \neq \mathfrak{o}$$

ist.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist klar, falls $\mathfrak{a}$ ein Primärideal ist. Im folgenden verstehen wir damit unter $\mathfrak{a}$ ein nicht-primäres Ideal.

Es sei nun $\mathfrak{q}$ ein minimales Primärideal von $\mathfrak{a}$, und sei das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ verschieden. Da für den Exponent ρ von $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{p}^{\rho} \equiv 0\ (\mathfrak{q})$ ist, so wird

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho}) \equiv 0\ (\mathfrak{q})\,.$$

Nach unserer Voraussetzung gibt es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{q}$ und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho+m})$ für jedes m. Da ferner für jedes m $\mathfrak{p}$ das zugehörige halbprime Ideal von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho+m})$ ist, so folgt

$$(1) \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho+m}) = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1 \ldots, \mathfrak{q}_l]\,,$$

wobei die Darstellung eine kürzeste durch grösste Primärideale bedeutet.[1]

Wenn für eine endliche Zahl $k\,(\neq 0)$ $\mathfrak{q} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho+k})$ ist, so wird

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho+k}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho+k-1}) = \ldots = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho})\,.$$

Damit existiert ein echter Teiler $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$, der die Beziehung

$$\left[(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho}), \mathfrak{a}'\right] = \mathfrak{a}\,, \qquad \mathfrak{a}' \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$$

(1) S. Mori, Ueber Ringe. § 2.

erfüllt. Denn $\mathfrak{p}$ ist von $\mathfrak{o}$ verschieden, und es gibt ein Element e in $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^\rho)$ derart, dass für jedes Element q aus $\mathfrak{q}$

$$eq \equiv q \ (\mathfrak{a})$$

ist.[1] Ist $\mathfrak{a}'$ die Gesamtheit aller Elemente a' von der Art, dass $ea' \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ ist, so wird

$$\left[(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^\rho), \mathfrak{a}'\right] = \mathfrak{a}\,, \qquad \mathfrak{a}' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})\,.$$

In diesem Falle gibt es damit ein Element r, das die im Satz ausgesprochene Bedingung erfüllt.

Im anderen Fall ist

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho+m}) \neq \mathfrak{q} \quad \text{für jedes} \quad (m \neq 0)\,.$$

Da $\mathfrak{a}$ nicht primär ist, so wird wegen (1) für jedes $s\,(\neq 0)$

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{s\rho+1}) = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_t']\,.$$

Daraus folgt die Existenz eines Elementes r derart, dass

$$(2) \qquad r\mathfrak{q} \equiv 0 \ \left((\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{s\rho+1})\right), \qquad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})\,,$$

und folglich wird

$$(2') \qquad r\mathfrak{p}^\rho \equiv 0 \ \left((\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{s\rho+1})\right), \qquad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})\,.$$

Ist $\mathfrak{p}^{s\rho+1} \equiv 0\ (\mathfrak{a})$, so besitzt r die im Satz ausgesprochene Eigenschaft. Damit wollen wir im folgenden nur den Fall untersuchen, dass für jedes $s\,(\neq 0)$ $\mathfrak{p}^{s\rho+1} \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ ist. Sei nämlich

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^\rho) = \left(\mathfrak{a}, (p_1), \ldots\ldots, (p_t)\right)\,.$$

Und sei auch $s > t$, dann wird $s \geqq 2$. Da jedes element r' aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{s\rho+1})$ in der Form

$$(3) \qquad r' \equiv a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots\ldots + a_t p_t \ (\mathfrak{a})$$

darstellbar ist. Dabei sind a_i die Elemente aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^\rho)$. Aus (2′) und (3) folgen auch

(1) S. Mori, Über Ringe. § 4.

$$
\begin{aligned}
rp_1 &\equiv a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \ldots\ldots + a_{1t}p_t \quad (\mathfrak{a}) , \\
rp_2 &\equiv a_{21}p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2t}p_t \quad (\mathfrak{a}) , \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
rp_t &\equiv a_{t1}\mathfrak{p}_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{tt}p_t \quad (\mathfrak{a}) ,
\end{aligned}
$$

wobei a_{ij} die Elemente aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho})$ sind. Setzen wir nun

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a_{11}-r , & a_{12} , & \ldots & a_{1t} \\
a_{21} , & a_{22}-r , & \ldots & a_{2t} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{t1} , & a_{t2} , & \ldots & a_{tt}-r
\end{vmatrix} ,
$$

so erhalten wir durch Elimination

$$\Delta p_i \equiv 0 \quad (\mathfrak{a}) \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, t) ,$$

dabei $\Delta \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist, da $r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist. Daraus folgt unmittelbar

$$\Delta(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{s\rho+1}) \equiv 0 \quad (\mathfrak{a}) ,$$

und folglich wird wegen (2)

$$r\Delta\mathfrak{q} \equiv 0 \quad (\mathfrak{a}) , \qquad r\Delta \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p}) .$$

Hiermit ist die Bedingung notwendig.

Existiert umgekehrt ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r derart, dass $r\mathfrak{q} \equiv 0 \ (\mathfrak{a})$ ist, so gibt es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}$. Denn, gäbe es ein Primärideal $\mathfrak{q}'$ zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a}$, so würde

$$r \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p}) , \qquad r^n \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}')$$

gegen die Eigenschaft des Primideals $\mathfrak{p}$. Also ist die Bedingung auch hinreichend.

Es ist noch den zweiten Teil des Satzes zu zeigen. Dazu nehmen

wir an, dass das zum minimalen Primärideal $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{o}$ identisch ist. Dann wird für den Exponent ρ

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^{\rho}) \equiv 0 \ (\mathfrak{q}) .$$

Da für jedes n $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^{n})$ ein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges Primärideal ist, und ferner es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a}$ gibt, so soll

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{o}^{\rho}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{o}^{\rho+1}, \mathfrak{a}) = \ldots . \neq \mathfrak{o}$$

sein. Denn, wäre $\mathfrak{q} = \mathfrak{o}$, so würde $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ gegen die Voraussetzung; da es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{o}$ gibt.

Wird umgekehrt die obige Beziehung vorausgesetzt, so existiert ein durch $\mathfrak{q}$ teilbares Element e, so dass für jedes Element q aus $\mathfrak{q}$ $eq \equiv q \ (\mathfrak{a})$ ist; daraus folgt für ein durch $\mathfrak{q}$ unteilbares Element r

$$e(r-er) \equiv 0 \ (\mathfrak{a}) , \qquad r-er \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}) .$$

Hiermit ist offenbar $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges minimales Primärideal von $\mathfrak{a}$. Der Satz ist also richtig.

Zusatz. *Ist $\mathfrak{q}$ ein minimales Primärideal eines Ideals $\mathfrak{a}$, so ist das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ ein höchster Primideal von $\mathfrak{a}$, oder das Einheitsideal.*[1]

Ist $\mathfrak{p}$ vom Einheitsideal verschieden, so gibt es nach Satz 4 kein Primideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}$, also ist $\mathfrak{p}$ ein höchstes Primideal von $\mathfrak{a}$.

Satz 5. *Jedes minimale Primärideal eines Ideals $\mathfrak{a}$ tritt stets bei jeder kürzesten Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale auf.*

Ist $\mathfrak{a}$ ein Primärideal, so ist die Behauptung klar. Im folgenden sei damit $\mathfrak{a}$ nicht primär.

Ist das Primideal, welches zu einem minimalen Primärideal $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ gehört, mit dem Einheitsideal identisch, so wird nach Satz 4

$$(1) \qquad \mathfrak{q} = (\mathfrak{o}^{\rho}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{o}^{\rho+1}, \mathfrak{a}) = \ldots . \neq \mathfrak{o} .$$

Hiermit können wir einen echten Teiler $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ finden, so dass

$$(2) \qquad [\mathfrak{q}, \mathfrak{a}'] = \mathfrak{a} , \qquad (\mathfrak{q}, \mathfrak{a}') = \mathfrak{o} , \qquad \mathfrak{a}'^{\rho} \equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

---

(1) Die allgemeinere Definition des minimalen Primärideals ist dann und nur dann von der engeren verschieden, wenn für ein Ideal $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{o} \neq (\mathfrak{o}^{\rho}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{o}^{\rho+1}, \mathfrak{a}) = \ldots\ldots \neq \mathfrak{a}$$

ist.

sind.[1] Daraus folgt die Existenz eines Elementes r, das die Bedingung $r\mathfrak{o} \equiv 0\ (\mathfrak{a})$, $r \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ erfüllt; also ist $\mathfrak{o}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal. Bei einer beliebigen kürzesten Darstellung $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l]$ gehört daher ein Primärideal, etwa $\mathfrak{q}_1$, zu $\mathfrak{o}$, und weiter folgt aus (1) $\mathfrak{q} \equiv 0\ (\mathfrak{q}_1)$. Wäre $\mathfrak{q}_1$ ein echter Teiler von $\mathfrak{q}$, so gäbe es wegen (2) ein Element r' in $\mathfrak{q}_1$ derart, dass $r'\mathfrak{o} \equiv 0\ (\mathfrak{a})$, $r' \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$. Daraus folgte nach der Eigenschaft der Primärideale $\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l$, $r' \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, und folglich würde $\mathfrak{a} \neq [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l]$ mit Widerspruch. Daher folgt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$.

Es sei nun das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ verschieden, und sei $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l]$ eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale. Da nach Zusatz unter Satz 4 $\mathfrak{p}$ ein höchstes Primideal von $\mathfrak{a}$ ist, so gehört $\mathfrak{p}$ auch zu einem, etwa $\mathfrak{q}_1$, aus $\mathfrak{q}_i$. Aus $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_l \equiv 0\ (\mathfrak{q})$ folgt wegen der Eigenschaft des Primärideals $\mathfrak{q}$

$$\mathfrak{q}_1 \equiv 0\ (\mathfrak{q}).$$

Da $\mathfrak{q}$ aber ein minimales Primärideal von $\mathfrak{a}$ ist, so soll $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$ sein, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Satz 6. *Die kürzeste Darstellung eines Ideals $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn $\mathfrak{a}$ sich als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von den minimalen Primäridealen von $\mathfrak{a}$ darstellen lässt.*

Nach Satz 5 ist offenbar die Bedingung hinreichend.

Es sei nur noch zu zeigen, dass die Bedingung auch notwendig ist. Dazu nehmen wir an, dass $\mathfrak{a}$ sich als Durchschnitt der minimalen Primärideale von $\mathfrak{a}$ nicht darstellen lässt. Dann soll wenigstens ein Primärideal $\mathfrak{q}_i$ aus der kürzestern Darstellung $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_i, \ldots, \mathfrak{q}_l]$ nicht minimal sein. Daraus folgt die Existenz eines Primärideals $\mathfrak{q}_i'$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}_i$, und weiter ergibt sich, dass $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_i', \ldots, \mathfrak{q}_l]$ auch eine kürzeste Darstellung durch grösste Primärideale ist. $\mathfrak{a}$ besitzt daher zwei verschiedene kürzeste Darstellungen durch grösste Primärideale; nämlich sind wir damit am Ziel.

Mit Hilfe von Satz 6 und dem Fundamentalsatz ergibt sich schliesslich

Satz 7. *Ein Ideal lässt sich auf eine und nur eine Weise, oder unendlich viele verschiedene Weisen, als kürzesten Durchschnitt von grössten Primäridealen darstellen.*

---

(1) Vgl. den Beweis des Satzes 4.