Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen.

Von

Shinziro MORI und Takeo DODO.

(Eingegangen am 20. 9. 1936.)

Für die im Titel erwähnten Bedingungen hat B. L. van der Waerden den folgenden merkwürdigen Satz bewiesen(1):

Wenn in einem Ring der Teilerkettensatz gilt, ein Einheitselement vorhanden ist, jedes Hauptideal einem Produkt von höheren Primidealen äquivalent ist und wenn für Hauptideale die Quasiteilbarkeit mit Teilbarkeit gleichbedeutend ist, so ist der Ring ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenring und umgekehrt.

Diese gegebenen Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit beruhen aber auf den Eigenschaften der Hauptideale. Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist nach einer von van der Waerden ganz unabhängigen Beweismethode die Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit anzugeben, die von den Eigenschaften der symbolischen Potenzen der Primideale abhängen.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus dem Ring $\mathfrak{R}$, so besitzt $\mathfrak{p}^r$ eine einzige, und zwar zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente $\mathfrak{p}^{(r)}$; diese wird nach W. Krull(2) die „*symbolische r-te Potenz von* $\mathfrak{p}$" genannt, und sie besitzt die folgende wichtige Eigenschaft:

$\mathfrak{p}^{(r)}$ *ist die Gesamtheit aller Elemente aus* $\mathfrak{p}$, *die durch Multiplikation mit geeignetem durch* $\mathfrak{p}$ *unteilbarem Element aus* $\mathfrak{R}$ *in Elemente von* $\mathfrak{p}^r$ *verwandelt werden können.*

Im folgenden behandeln wir nur den kommutativen Ring mit Einheitselement, aber ohne Nullteiler, in dem der Teilerkettensatz gilt. Wir wollen diesen Ring „*Integritätsbereich mit Teilerkettensatz*" nennen

---

(1) B. L. van der Waerden, Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz-abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen **101** (1929), 293.

B. L. van der Waerden, Zur Idealtheorie der ganz-abgeschlossenen Ringe, Math. Annalen **101** (1929), 309.

(2) W. Krull, *Idealtheorie* (1935), 37.

und ihn mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen. Betrachten wir aber statt der von Null verschiedenen Ideale, bzw. Elemente die regulären Ideale, bzw. Elemente, so überzeugen wir uns leicht, dass im Ring mit Nullteiler gleichfalls alle jene Resultate gelten, die wir in dieser Arbeit für den Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ gewinnen werden.

Über symbolische Potenzen eines Primideals.

In diesem Paragraphen wird die Struktur des Primideals $\mathfrak{p}$ im Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ mit Teilerkettensatz, für das kein weiteres Primärideal zwischen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ eingeschaltet werden kann, untersucht, und der Vereinfachung halber werden wir zunächst den folgenden einfachen Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz. *Ist r ein durch ein Primideal $\mathfrak{p}\big(\neq (0)\big)$ unteilbares Element aus $\mathfrak{J}$, so ist es unmöglich, dass für eine ganze Zahl m*

$$(r)\mathfrak{p}^m \equiv 0 \ \ (\mathfrak{p}^{m+1})$$

ist.

Denn, wäre $(r)\mathfrak{p}^m \equiv 0$ $(\mathfrak{p}^{m+1})$, so würde man wegen des vorausgesetzten Teilerkettensatzes erhalten

$$rb_i = p_{i1}b_1+p_{i2}b_2+\ldots\ldots+p_{in}b_n \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,n)\,,$$

wobei $\mathfrak{p}^m=(b_1, b_2,\ldots\ldots, b_n)$ ist und p_{ik} die Elemente aus $\mathfrak{p}$ bedeuten. Durch Elimination von $b_2,\ldots\ldots, b_n$ ergäbe sich

$$b_1\begin{vmatrix} p_{11}-r, & p_{12}, & \ldots\ldots, & p_{1n} \\ p_{21}, & p_{22}-r, & \ldots\ldots, & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}, & p_{n2}, & \ldots\ldots, & p_{nn}-r \end{vmatrix} = 0\,,$$

oder $r^n \equiv 0$ $(\mathfrak{p})$. Das widerspricht der Voraussetzung, dass r durch $\mathfrak{p}$ unteilbar ist.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal aus dem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$. Wenn kein weiteres Primärideal zwischen den symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}^{(1)}=\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ eingeschaltet werden kann, so gibt es auch kein Primärideal zwischen den sukzessiven symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}^{(i)}$ und $\mathfrak{p}^{(i+1)}$, und ferner muss ein beliebiges zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal mit einer symbolischen Potenz identisch sein.*

Bekanntlich sind alle symbolische Potenzen von $\mathfrak{p}$ voneinander verschieden,[1] wenn $\mathfrak{p} \neq (0)$ ist.

Da nach unserer Voraussetzung kein Primärideal zwischen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ eingeschaltet wird, so gibt es in $\mathfrak{p}$ ein Element p derart, dass

$$(1) \qquad p \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(2)}), \qquad (r)\mathfrak{p} \equiv 0 \ \Big(\big((p), \mathfrak{p}^2\big)\Big)$$

ist, wo r ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{J}$ bedeutet. Daher folgt $(r)\mathfrak{p}^2 \equiv 0 \ \Big(\big((p)\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^3\big)\Big)$, und nach (1) ergibt sich daraus $(r^2)\mathfrak{p}^2 \equiv 0 \ \Big(\big((p^2), \mathfrak{p}^3\big)\Big)$. Auf dieselbe Weise erhalten wir im allgemeinen

$$(2) \qquad (r^i)\mathfrak{p}^i \equiv 0 \ \Big(\big((p^i), \mathfrak{p}^{i+1}\big)\Big).$$

Dabei muss $p^i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{i+1})$ sein. Sonst wäre $(r^i)\mathfrak{p}^i \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{i+1})$ für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r^i; was aber nach dem Hilfssatz unmöglich ist.

Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, für welches $\mathfrak{p}^{(i)} \supset \mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^{(i+1)}$ gilt, so muss $i+1$ der Exponent von $\mathfrak{q}$ sein, und wir können in $\mathfrak{q}$ ein durch $\mathfrak{p}^{(i+1)}$ unteilbares Element p' finden. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{q}'$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente des Ideals $\big((p'), \mathfrak{p}^{i+1}\big)$, so soll

$$(3) \qquad \mathfrak{p}^{(i)} \supset \mathfrak{q} \supseteqq \mathfrak{q}' \supset \mathfrak{p}^{(i+1)}$$

sein. Nach (2) folgt daraus

$$(4) \qquad (r'')\mathfrak{q}' \equiv 0 \ \Big(\big((p^i), \mathfrak{p}^{i+1}\big)\Big)$$

für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r''. Also ist

$$\big((p^i), \mathfrak{p}^{i+1}\big) \supseteqq \big((r''p'), \mathfrak{p}^{i+1}\big) \supset \mathfrak{p}^{i+1}.$$

Dabei ist $r''p' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{i+1})$, sonst wäre $p' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(i+1)})$. Ferner muss $\mathfrak{q}'$ auch die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\big((r''p'), \mathfrak{p}^{i+1}\big)$ sein, da $r'' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist. Aus (4) folgt leicht

$$r''p' \equiv ap^i \ (\mathfrak{p}^{i+1}), \qquad a \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

(1) W. Krull, loc. cit. 37.

für ein Element a aus $\mathfrak{J}$. Durch Multiplikation mit a erhalten wir aus (2)

$$(ar^i)\,\mathfrak{p}^i \equiv 0 \ \Big(\big((r''p'),\, \mathfrak{p}^{i+1}\big)\Big), \qquad ar^i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

und daraus ergibt sich ein Widerspruch $\mathfrak{p}^{(i)} \equiv 0 \ (\mathfrak{q}')$ mit (3). Hiermit ist die Annahme einer Existenz des Primärideals $\mathfrak{q}$ derart, dass $\mathfrak{p}^{(i)} \supset \mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^{(i+1)}$ ist, falsch; also ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Es sei $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal mit dem Exponent m. Dann ist

$$\mathfrak{p}^{(m)} \equiv 0 \ (\mathfrak{q})\,, \qquad \mathfrak{p}^{(m-1)} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q})\,.$$

Im Fall $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{(m)}$ ist unsere Behauptung schon einleuchtend. Wir nehmen nun $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}^{(m)}$ an, und beweisen, dass wir damit zu einem Widerspruch gelangen werden. Es sei also q ein durch $\mathfrak{p}^{(m)}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{q}$, dann gilt immer

$$r_o q \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^m) \tag{5}$$

für jedes durch $\mathfrak{p}$ unteilbare Element r_o. Aus (1) erhalten wir $(r^2)\,\mathfrak{p} \equiv 0 \ \Big(\big((rp),\, (r)\,\mathfrak{p}^2\big)\Big)$ und daraus folgt $(r^2)\,\mathfrak{p} \equiv 0 \ \Big(\big((p),\, \mathfrak{p}^3\big)\Big)$. Im allgemeinen gilt

$$(r^i)\,\mathfrak{p} \equiv 0 \ \Big(\big((p),\, \mathfrak{p}^{i+1}\big)\Big)\,. \tag{6}$$

Da q ein Element aus $\mathfrak{p}$ ist, so folgt aus (5) und (6)

$$r^{m-1}q \equiv 0 \ \Big(\big((p),\, \mathfrak{p}^m\big)\Big), \qquad r^{m-1}q \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^m)\,.$$

Sonach können wir nach (2)

$$\bar{r}q \equiv \bar{r}_s p^s + \bar{r}_{s+i} p^{s+i} + \ldots . (\mathfrak{p}^m)\,, \qquad (o < s < m) \tag{7}$$

setzen, wobei alle $\bar{r}$ ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element bedeuten. Durch Multiplikation mit p^{m-s-1} erhalten wir daraus $\bar{r}qp^{m-s-1} \equiv \bar{r}_s p^{m-1} \ (\mathfrak{p}^{(m)})$ und zwar muss $\bar{r}_s p^{m-1} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(m)})$ sein; sonst wäre $r'\bar{r}_s p^{m-1} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^m)$, $r' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$, also nach (2) $r'\bar{r}_s r^{m-1}\mathfrak{p}^{m-1} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^m)$, $r'\bar{r}_s r^{m-1} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$; was dem Hilfssatz widerspricht. Das Element $\bar{r}qp^{m-s-1}$ ist sonach durch $\mathfrak{p}^{m-1}$ teilbar, aber durch $\mathfrak{p}^{(m)}$ unteilbar; also ist

$$\mathfrak{p}^{m-1} \geqq \big((\bar{r}qp^{m-s-1}), \mathfrak{p}^m\big) > \mathfrak{p}^m, \qquad \big((\bar{r}qp^{m-s-1}), \mathfrak{p}^m\big) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(m)}).$$

Nach dem oben gewonnenen Resultate muss die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}'$ von $\big((\bar{r}qp^{m-s-1}), \mathfrak{p}^m\big)$ mit $\mathfrak{p}^{(m-1)}$ identisch sein. Anderseits ist aber $\mathfrak{q}' \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$, da $\big((\bar{r}qp^{m-s-1}), \mathfrak{p}^m\big) \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$ ist. Hiermit erhalten wir den Widerspruch, dass $\mathfrak{p}^{(m-1)} \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$ ist, womit unser Satz in seinen allen Teilen vollständig bewiesen ist.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal ausser (0) in $\mathfrak{J}$, und gibt es kein Primärideal zwischen den symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$, so muss $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal*[1] *in $\mathfrak{J}$ sein.*

Zum Beweise nehmen wir an, dass $\mathfrak{p}$ ein echter Teiler eines Primideals $\mathfrak{p}'$ ist. Dann können wir folgende zwei Fälle unterscheiden:

1. Es sei $\mathfrak{p}' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(m)})$ und $\mathfrak{p}' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(m+1)})$. Dann ist

$$(r)\mathfrak{p}' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^m), \qquad (r)\mathfrak{p}' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{m+1})$$

für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r, und die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\big((r)\mathfrak{p}', \mathfrak{p}^{m+1}\big)$ ist nach Satz 1 mit $\mathfrak{p}^{(m)}$ identisch. Es ist nämlich

$$(1) \qquad (r')\mathfrak{p}^m \equiv 0 \ \big((\mathfrak{p}', \mathfrak{p}^{m+1})\big),$$

wo r' ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element bedeutet. Setzen wir nun $\mathfrak{d} = [\mathfrak{p}', \mathfrak{p}^m]$, so ist nach dem Teilerkettensatz $\mathfrak{p}^m = \big(\mathfrak{d}, (p_1), (p_2), \ldots\ldots, (p_s)\big)$ und alle $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_s$ müssen durch $\mathfrak{p}'$ unteilbar sein, da $\mathfrak{p}^m \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}')$ ist. Daraus ergibt sich nach (1)

$$\begin{aligned} r'p_1 &\equiv p'_{11}p_1 + \ldots\ldots + p'_{1s}p_s \ (\mathfrak{p}') \\ r'p_2 &\equiv p'_{21}p_1 + \ldots\ldots + p'_{2s}p_s \ (\mathfrak{p}') \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r'p_s &\equiv p'_{s1}p_1 + \ldots\ldots + p'_{ss}p_s \ (\mathfrak{p}') \end{aligned}$$

wo p'_{ij} Elemente aus $\mathfrak{p}$ sind. Durch Elimination von $p_2, p_3, \ldots\ldots, p_s$ erhalten wir

$$p_1(r'^s - p) \equiv 0 \ (\mathfrak{p}'), \qquad p \equiv 0 \ (\mathfrak{p}).$$

---

(1) Wenn ein Primideal $\mathfrak{p}$ (ausser (0)) in $\mathfrak{J}$ kein echtes Primunterideal besitzt, so heisst $\mathfrak{p}$ „*minimal in $\mathfrak{J}$*.“

Da p_1 aber durch $\mathfrak{p}'$ unteilbar ist, so folgt daraus

$$r'^s - p \equiv 0 \ (\mathfrak{p}'), \qquad r'^s \equiv 0 \ (\mathfrak{p}).$$

Das widerspricht der Tatsache, dass $r' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist. Also kann dieser Fall nicht vorkommen.

2. Es sei stets $\mathfrak{p}' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(i)})$ für jede ganze Zahl i. Dann ist nach Satz 1 $\mathfrak{p}'$ immer durch jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal teilbar. Nach dem Primäridealsatz von Krull(1) muss $\mathfrak{p}'$ damit Nullideal sein.

Es muss also $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$ sein.

Satz 3. *Gibt es kein Primärideal zwischen den zwei symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ eines vom Nullideal verschiedenen Primideals $\mathfrak{p}$, so ist*

$$pp' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(\lambda+\mu-1)})$$

für ein beliebiges durch $\mathfrak{p}^{(\lambda)}$ bzw. $\mathfrak{p}^{(\mu)}$ unteilbares Element p bzw. p' aus $\mathfrak{p}$.

Beim Beweise setzen wir voraus, dass p bzw. p' durch $\mathfrak{p}^{(\lambda_1-1)}$ bzw. $\mathfrak{p}^{(\mu_1-1)}$ teilbar aber durch $\mathfrak{p}^{(\lambda_1)}$ bzw. $\mathfrak{p}^{(\mu_1)}$ unteilbar ist. Dabei muss nach unserer Annahme

(1) $$2 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda, \qquad 2 \leqq \mu_1 \leqq \mu$$

sein. Aus unseren Voraussetzungen folgt einerseits, dass nach Satz 2 $\mathfrak{p}$ zum Ideal (p) gehören muss, und anderseits, dass es nach Satz 1 kein Primärideal zwischen $\mathfrak{p}^{(\lambda_1-1)}$ und $\mathfrak{p}^{(\lambda_1)}$ gibt. Aus $p \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(\lambda_1-1)})$, $p \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(\lambda_1)})$ folgt somit, dass $\mathfrak{p}^{(\lambda_1-1)}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von (p) sein muss. Für (p') erhalten wir auch dieselbe Beziehung. Nach dem wohlbekannten Satz von E. Noether erhalten wir hiermit die kürzesten Darstellungen als Durchschnitt von Primäridealen

(2) $$(p) = [\mathfrak{p}^{(\lambda_1-1)}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m] \qquad (p') = [\mathfrak{p}^{(\mu_1-1)}, \mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{m'}].$$

Aus der ersten Darstellung ergibt sich

$$\mathfrak{p}^{(\lambda_1-1)}. \mathfrak{q}_1. \ldots . \mathfrak{q}_m \equiv 0 \ \big((p)\big), \qquad \mathfrak{p}^{\lambda_1-1}. \mathfrak{q}_1. \ldots . \mathfrak{q}_m \equiv 0 \ \big((p)\big).$$

(1) W. Krull, loc. cit., 36. Primäridealsatz: Im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ mit dem Teilerkettensatz ist der Durchschnitt $\mathfrak{d}$ aller zu einem festen Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale stets gleich (0).

Da aber $\mathfrak{q}_1 \ldots . \mathfrak{q}_m \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist, so gibt es ein Element r_1 derart, dass

(3) $$(r_1)\mathfrak{p}^{\lambda_1 - 1} \equiv 0 \ \bigl((p)\bigr), \qquad r_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

ist. Aus der zweiten Darstellung von (2) folgt in gleicher Weise

(4) $$(r_2)\mathfrak{p}^{\mu_1 - 1} \equiv 0 \ \bigl((p')\bigr), \qquad r_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}).$$

Wäre nun $pp' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(\lambda+\mu-1)})$, so wäre

(5) $$rpp' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{\lambda+\mu-1})$$

für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r. Also ergäbe sich aus (3), (4) und (5)

$$(r')\mathfrak{p}^{\lambda_1+\mu_1-2} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{\lambda+\mu-1})$$

für ein Element $r' = rr_1r_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$. Da aber nach (1) $\lambda_1+\mu_1-2 < \lambda+\mu-1$ ist, so erhielten wir daraus einen Widerspruch mit dem Hilfssatz.

Satz 4. *Zwischen* $\mathfrak{p}^{(1)}$ *und* $\mathfrak{p}^{(2)}$ *kann ein weiteres Primärideal dann und nur dann nicht eingeschalttet werden, wenn alle zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale irreduzibel sind.*(1)

Wenn zwischen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ kein Primärideal eingeschaltet werden kann, so gelten die Kongruenzen (2) und (6) im Beweise des Satzes 1; also ist

(1) $$(r^i)\mathfrak{p}^i \equiv 0 \quad \Bigl(\bigl((p^i), \mathfrak{p}^{i+1}\bigr)\Bigr)$$

(2) $$(r^i)\mathfrak{p} \equiv 0 \quad \Bigl(\bigl((p), \mathfrak{p}^{i+1}\bigr)\Bigr)$$

für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r. Es seien nun a_1 und a_2 zwei beliebige durch $\mathfrak{p}^{(m)}$ $(m \geqq 2)$ unteilbare Elemente aus $\mathfrak{p}$. Dann wird nach (2)

$$r^{m-1}a_1 \equiv 0 \ \Bigl(\bigl((p), \mathfrak{p}^m\bigr)\Bigr), \qquad r^{m-1}a_2 \equiv 0 \ \Bigl(\bigl((p), \mathfrak{p}^m\bigr)\Bigr).$$

Daraus folgt nach (1)

(1) Ein Ideal heisst *irreduzibel*, wenn es als Durchschnitt zweier echter Teiler nicht dargestellt werden kann. Vgl. W. Gröbner, Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen, Math. Annalen **110** (1934), 197.

$$(3) \qquad r'a_1 \equiv r'_{s_1}p^{s_1}+r'_{s_1+i_1}p^{s_1+i_1}+\ldots\ldots (\mathfrak{p}^m)$$

$$r''a_2 \equiv r''_{s_2}p^{s_2}+r''_{s_2+i_2}p^{s_2+i_2}+\ldots\ldots (\mathfrak{p}^m),$$

wobei $r', r'_{s_1}, \ldots\ldots; r'', r''_{s_2}, \ldots\ldots$ durch $\mathfrak{p}$ unteilbare Elemente bedeuten. Da a_1 und a_2 durch das Primärideal $\mathfrak{p}^{(m)}$ unteilbar sind, so muss $r'a_1 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}^m)$, $r''a_2 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}^m)$ und folglich

$$1 \leqq s_1 < m, \qquad 1 \leqq s_2 < m$$

sein. Aus (3) folgt leicht

$$(4) \qquad r'r''_{s_2}a_1p^{m-s_1-1} \equiv r'_{s_1}r''_{s_2}p^{m-1} \equiv r''r'_{s_1}a_2p^{m-s_2-1} \ (\mathfrak{p}^m).$$

Wäre $r'_{s_1}r''_{s_2}p^{m-1} \equiv 0$ $(\mathfrak{p}^{(m)})$, so wäre $\bar{r}r'_{s_1}r''_{s_2}p^{m-1} \equiv 0$ $(\mathfrak{p}^m)$, $\bar{r} \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p})$, also nach (1) $(\bar{r}r'_{s_1}r''_{s_2}r^{m-1})\,\mathfrak{p}^{m-1} \equiv 0$ $(\mathfrak{p}^m)$, $\bar{r}r'_{s_1}r''_{s_2}r^{m-1} \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p})$, was aber nach dem Hilfssatz unmöglich ist. Somit muss

$$(5) \qquad r'_{s_1}r''_{s_2}p^{m-1} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(m)})$$

sein. Setzen wir

$$\mathfrak{a}_1 = \left((a_1), \mathfrak{p}^{(m)}\right), \qquad \mathfrak{a}_2 = \left((a_2), \mathfrak{p}^{(m)}\right),$$

so sind sie ein echter Teiler von $\mathfrak{p}^{(m)}$, und nach (4) und (5) muss der Durchschnitt $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}^{(m)}$ sein. Aus dieser Tatsache folgt leicht die Irreduzibilität aller $\mathfrak{p}^{(m)}$. Denn, wenn in der Darstellung $\mathfrak{p}^{(m)} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}^{(m)}$ sind, so müssen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein, da $\mathfrak{p}^{(m)}$ primär ist.

Sind alle zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale irreduzibel, so gibt es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$. Denn, wäre $\mathfrak{q}$ ein solches Primärideal, dass $\mathfrak{p}^{(1)} \supset \mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^{(2)}$ wäre, so könnten wir ein Element p bzw. q in $\mathfrak{p}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{q}$ finden, das durch $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{p}^{(2)}$ unteilbar wäre. Es sei nun

$$\mathfrak{a}_1 = \left((p), \mathfrak{p}^{(2)}\right), \qquad \mathfrak{a}_2 = \left((q), \mathfrak{p}^{(2)}\right),$$

dann wäre für ein gemeinsames Element g von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$

$$g \equiv r_1p \equiv r_2q \ (\mathfrak{p}^{(2)}).$$

Nach $p \not\equiv 0$ $(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^{(2)}$ folgte daraus $r_1 \equiv 0$ $(\mathfrak{p})$, und folglich $g \equiv 0$ $(\mathfrak{p}^{(2)})$.

Also wäre

$$\mathfrak{p}^{(2)} = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]$$

und dabei wären $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ beide ein echter Teiler von $\mathfrak{p}^{(2)}$, und wir hätten einen Widerspruch mit unserer Voraussetzung.

Aus dem Beweise des eben formulierten Theorems erhalten wir auch den folgenden Satz.

Satz 5. *Zwischen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ kann ein Primärideal dann und nur dann nicht eingeschaltet werden, wenn $\mathfrak{p}^{(2)}$ irreduzibel ist.*[1]

Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit des Integritätsbereiches $\mathfrak{J}$.

Nach den Vorbereitungen im vorigen Paragraphen wollen wir an unsere Hauptaufgabe, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die ganze Abgeschlossenheit von $\mathfrak{J}$ anzugeben, herantreten.

Satz 6. *Ist $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen und ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ minimal in $\mathfrak{J}$, so kann kein weiteres Primärideal zwischen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ eingeschaltet werden.*

Wir setzen die Existenz eines solchen Primärideals $\mathfrak{q}'$ voraus, so dass

$$\mathfrak{p}^{(1)} \supset \mathfrak{q}' \supset \mathfrak{p}^{(2)}$$

ist. Dann gibt es ein Element p in $\mathfrak{q}'$, das nicht in $\mathfrak{p}^{(2)}$ liegt, und wir erhalten eine kürzeste Darstellung von (p) durch grösste Primärkomponenten

$$(1) \qquad (p) = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m]$$

und dabei muss eine von den Primärkomponenten $\mathfrak{q}_i$, etwa $\mathfrak{q}$, ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal sein, da $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ minimal ist. Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_m$ die anderen zugehörigen Primideale von (p). Aus (1) folgt $\mathfrak{q}.\mathfrak{q}_1 \ldots\ldots \mathfrak{q}_m \equiv 0 \ \big((p)\big)$, aber $\mathfrak{q}_1 \ldots\ldots \mathfrak{q}_m \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$. Aus $(p) \equiv 0 \ (\mathfrak{q}')$ folgt somit $\mathfrak{q} \equiv 0 \ (\mathfrak{q}')$, also ist $\mathfrak{p}^{(1)} \supset \mathfrak{q}' \geqq \mathfrak{q}$. Da $\mathfrak{p}$ das zu (p) gehörige minimale Primideal ist, so gibt es nach (1) ein Element p' mit den Eigenschaften

$$(2) \qquad (p')\mathfrak{p} \equiv 0 \ \big((p)\big), \qquad p' \not\equiv 0 \ \big((p)\big).$$

---

(1) Dieser Satz folgt auch aus Satz 4a von Gröbner. Vgl. W. Gröbner, loc. cit., 205.

Nach $(p) \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$ folgt somit $(p') \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$, da $\mathfrak{p} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q})$ ist. Aus $(p')\mathfrak{p} \equiv 0 \ \big((p)\big)$ erhalten wir ein Ideal $\mathfrak{a}$ derart, dass

$$(3) \qquad (p')\,\mathfrak{p} = (p)\,\mathfrak{a}$$

ist. Wäre nun $\mathfrak{a} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$, so wäre nach (3) $p'p_1 = pa$ für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element a aus $\mathfrak{a}$, und es müsste p_1 ein Element aus $\mathfrak{p}$ sein. Daraus ergäbe sich $pa = p'p_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^2)$ und folglich hätten wir $p \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(2)})$, da a durch $\mathfrak{p}$ unteilbar wäre. Was aber der obigen Voraussetzung $p \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(2)})$ widerspricht. Deshalb muss $\mathfrak{a} \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ sein, also folgt aus (3) $(p')\,\mathfrak{a} \equiv 0 \ \big((p)\,\mathfrak{a}\big)$. Ist $a_1, a_2, \dots, a_n$ eine Basis für $\mathfrak{a}$, so erhalten wir

$$p'a_i = r_{i1}pa_1 + r_{i2}pa_2 + \dots + r_{in}pa_n \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,,$$

wo r_{ik} die Elemente aus $\mathfrak{J}$ bedeuten. Setzen wir $p' = p\alpha$, so wird α ein Element aus dem Quotientenkörper von $\mathfrak{J}$ und es ergibt sich

$$\alpha a_i = r_{i1}a_1 + r_{i2}a_2 + \dots + r_{in}a_n \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,.$$

Durch Elimination erhalten wir

$$\alpha^n + r_1\alpha^{n-1} + \dots + r_n = 0\,,$$

dabei sind r_i die Elemente aus $\mathfrak{J}$. Wegen der ganzen Abgeschlossenheit muss α ganz, also p' durch p teilbar sein. Das ist aber nach (2) unmöglich. Sonach gibt es kein Primärideal $\mathfrak{q}'$ von der Art, dass $\mathfrak{p}^{(1)} \supset \mathfrak{q}' \supset \mathfrak{p}^{(2)}$ ist.

Satz 7. *Ist $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen, so ist jedes zugehörige Primideal eines Hauptideals stets in $\mathfrak{J}$ minimal.*

Es sei $(p) = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_m]$ eine unverkürzbare Darstellung eines Hauptideals (p). Unter den zugehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_\nu$ gibt es ein minimales in $\mathfrak{J}$, da ein isoliertes zugehöriges Primideal eines Hauptideals minimal in $\mathfrak{J}$ ist.[1] Es sei nun $\mathfrak{p}_k$ nicht minimal in $\mathfrak{J}$, dann wird es ein minimales in $\mathfrak{J}$ geben, das zu (p) gehört und durch $\mathfrak{p}_k$ teilbar ist. Dieses sei etwa $\mathfrak{p}_1$. Da $\mathfrak{p}_k$ das zu (p) gehörige Primideal ist, so gibt es ein Element p', so dass

(1) W. Krull, loc. cit., 37. Hauptidealsatz: Jedes minimal Primoberideal $\mathfrak{p}$ eines Hauptideals von $\mathfrak{J}$ ist auch in $\mathfrak{J}$ minimal.

$$\mathfrak{p}_k = (p) : (p'), \qquad p' \not\equiv 0 \ \big((p)\big)$$

ist.[1] Dabei muss $p' \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_1)$, also $p' \equiv 0$ $(\mathfrak{p}_1)$ sein, da $(p) \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_1)$ und $\mathfrak{p}_k \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_1)$ ist. In einer kürzeste Darstellung von (p')

$$(p') = [\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{m'}']$$

muss eine Komponente $\mathfrak{q}_1'$ zu $\mathfrak{p}_1$ gehören, und aus $p' \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_1)$ folgt $\mathfrak{q}_1' \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_1)$. Nach Satz 1 und Satz 6 folgt

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1^{(\rho)} \qquad \mathfrak{q}_1' = \mathfrak{p}_1^{(\rho')},$$

da $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_1'$ zum minimalen Primideal $\mathfrak{p}_1$ in $\mathfrak{J}$ gehören. Dabei bedeutet ρ bzw. ρ' den Exponent von $\mathfrak{q}_1$ bzw. $\mathfrak{q}_1'$, und ferner ist

$$\text{(2)} \qquad \rho' \geqq \rho,$$

weil $\mathfrak{q}_1' \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_1)$ ist. Aus $\mathfrak{p}_k = (p) : (p')$, $\mathfrak{p}_1 \equiv 0$ $(\mathfrak{p}_k)$ folgt $(p')\mathfrak{p}_1 \equiv 0$ $\big((p)\big)$, also ist $(p')\mathfrak{p}_1 = (p)\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$. Wäre $\mathfrak{a} \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_1)$, so wäre $p'p_1 = pa$ für ein durch $\mathfrak{p}_1$ unteilbares Element a aus $\mathfrak{a}$, wobei p_1 ein Element aus $\mathfrak{p}_1$ ist. Aus den obigen Darstellungen von (p) und (p') durch Primärideale ergäbe sich nach (1)

$$rp \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1^{\rho}), \qquad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1),$$
$$r'p' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1^{\rho'}), \qquad r' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1).$$

Danach folgte aus $p'p_1 = pa$ durch Multiplikation mit rr'

$$parr' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1^{\rho'+1}), \qquad arr' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1).$$

Damit ergäbe sich $p \equiv 0$ $(\mathfrak{p}^{(\rho'+1)})$, also nach (2) $p \equiv 0$ $(\mathfrak{p}_1^{(\rho+1)})$. Das wäre aber nach der Eindeutigkeit der isolierten Primärkomponenten in der kürzesten Darstellung von (p) unmöglich. Sonach muss $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{p}_1$ teilbar sein. Es sei nun $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ eine Basis für $\mathfrak{a}$, dann ergibt sich aus den gleichen Schlüssen wie bei Satz 6 $p' \equiv 0$ $\big((p)\big)$. Das widerspricht dem vorher gewonnenen Resultate $p' \not\equiv 0$ $\big((p)\big)$. Hiermit kann kein nicht-minimales Primideal in $\mathfrak{J}$ zum Hauptideal gehören.

---

(1) S. Mori, Über Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, dieses Journal **1** (1931), 170.

Satz 8. *Ist jedes zum Hauptideal gehörige Primideal stets in $\mathfrak{J}$ minimal und kann kein Primärideal zwischen den symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ des beliebigen minimalen Primideals $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ je eingeschaltet werden, so ist $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen.*

Zum Beweise nehmen wir an, dass $\mathfrak{J}$ nicht ganz abgeschlossen sei. Dann gibt es in $\mathfrak{J}$ zwei Elemente p und q derart, dass

$$(1) \qquad \left(\frac{p}{q}\right)^n + r_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + r_n = 0, \qquad p \not\equiv 0 \ \big((q)\big),$$

wobei r_i die Elemente aus $\mathfrak{J}$ bedeuten. Aus (1) ergibt sich

$$(2) \qquad p^n + r_1 p^{n-1} q + \dots + r_n q^n = 0$$

und folglich ist $p^n \equiv 0 \ \big((q)\big)$. Damit erhalten wir nach der im Satz ausgesprochenen ersten Voraussetzung die kürzesten Darstellungen durch grösste Primärkomponenten

$$(p) = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_m, \dots, \mathfrak{q}_n], \qquad (q) = [\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \dots, \mathfrak{q}_m'],$$

wobei $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{q}_i'$ zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige Primärideale sind. Nach Satz 1 folgen aus der im Satz ausgesprochenen zweiten Voraussetzung, dass $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{(a_i)}$ $\mathfrak{q}_i' = \mathfrak{p}_i^{(b_i)}$ ist. Hiermit erhalten wir zwei kürzeste Darstellungen

$$(3) \qquad (p) = [\mathfrak{p}_1^{(a_1)}, \dots, \mathfrak{p}_m^{(a_m)}, \dots, \mathfrak{p}_n^{(a_n)}] \qquad (q) = [\mathfrak{p}_1^{(b_1)}, \dots, \mathfrak{p}_m^{(b_m)}].$$

Danach ist es wegen $p \not\equiv 0 \ \big((q)\big)$ unmöglich, dass für alle $i = 1, 2, \dots, m$ $a_i \geqq b_i$ ist. Somit können wir $a_1 < b_1$ voraussetzen. Aus (3) haben wir

$$\begin{aligned} p^{n-1} q &\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1^{(a_1(n-1)+b_1)}), \\ p^{n-2} q^2 &\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1^{(a_1(n-2)+2b_1)}), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p q^{n-1} &\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1^{(a_1+(n-1)b_1)}), \\ q^n &\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1^{(nb_1)}). \end{aligned}$$

Dabei ist aber nach $a_1 < b_1$

$$a_1(n-1) + b_1 < a_1(n-2) + 2b_1 < \dots < nb_1.$$

Also aus (2) folgt

$$p^n \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1^{(a_1(n-1)+b_1)}).$$

Das ist unmöglich, da aus (3) $p \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_1^{(\alpha_1+1)})$ und aus Satz 3 $p^n \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_1^{(n\alpha_1+1)})$ folgt. Deshalb muss $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen sein.

Das Gesamtresultat unserer Untersuchung über die Beziehung zwischen ganzer Abgeschlossenheit von $\mathfrak{J}$ und symbolischen Potenzen der Primideale fassen wir in die folgenden Sätze zusammen:

Hauptsatz. *Notwendig und hinreichend, damit der Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen sei, ist, dass kein Primärideal zwischen den symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ des zu einem beliebigen Hauptideal gehörigen Primideals $\mathfrak{p}$ je eingeschaltet werden kann.*

Denn, nach Sätzen 6 und 7 ist die Bedingung notwendig und umgekehrt ist die Bedingung nach Sätzen 2 und 8 auch hinreichend.

Nach Satz 5 können wir den soeben gewonnenen Hauptsatz auch in folgender Weise formulieren:

Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Integritätsbereich ganz abgeschlossen ist, ergibt sich, dass die symbolische Potenz $\mathfrak{p}^{(2)}$ eines zu einem beliebigen Hauptideal gehörigen Primideals $\mathfrak{p}$ immer irreduzibel sein muss.[1]

---

(1) Nach W. Gröbner ist für die Gültigkeit der ganzen Abgeschlossenheit in $\mathfrak{J}$ notwendig, aber nicht hinreichend, dass jedes Hauptideal aus $\mathfrak{J}$ regulär (im Sinne von Gröbner) ist. Vgl. W. Gröbner, loc. cit., 222. Die Regularität eines Hauptideals bedeutet, dass die zu ihm gehörigen Primideale minimal in $\mathfrak{J}$ sind, und dass seine isolierten Primärkomponenten irreduzibel sind. Daraus folgt aber nicht, dass die symbolische Potenz $\mathfrak{p}^{(2)}$ eines minimalen Primideals in $\mathfrak{J}$ stets irreduzibel ist.