宇宙論に現はれてゐる種々のリーマン空間を特徴附ける方程式

竹 野 兵 一 郎

(昭和 17 年 6 月 1 日受附)

§1. 緒論。 重力場の理論及び宇宙論に於ては，問題となつてゐる物理系の時空構造を與へるものとして種々の四次元リーマン空間が考へられてゐる。例へばアインシュタイン型空間や，デ・ジッター型空間等がこれである。

本論文の第一部に於ては是等の空間を特徴附け且總括する二つの新らしい方程式について研究し，第二部に於ては曲率テンソルから作られる或る行列の固有値の性質に依つて是等の空間を分類することを試みる。

第 一 部

§2. 方程式 $\nabla_h K_{ij}^{\ \ lm}=0$. 本論文に於て扱はれる線素はすべて球對稱のものである。こゝに球對稱とは (r,θ,φ) 空間の普通の回轉群に對して不變であることを意味し，此樣な g_{ij} の一般なるものは次式で與へられる[1]

$$ds^2=-A(r,t)dr^2-B(r,t)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)+C(r,t)dt^2, \qquad (ds_0^2)$$

さて宇宙論に於て最も良く用ひられる空間は (i) デ・ジッター型空間, (ii) 平坦空間 [(i) 及び (iii) の特別な場合], (iii) アインシュタイン型空間, の三つである。そして (i), (ii), (iii) は夫々方程式

$$K_{ijlm}=k^2(g_{im}g_{jl}-g_{il}g_{jm}) \qquad (2.1)$$

$$K_{ijlm}=0 \qquad (2.2)$$

$$K_{ijlm}=16g\epsilon_{ijpu}\epsilon_{lmqv}\varphi^u\varphi^v g^{pq}, \quad \nabla_i\varphi^k=0 \qquad (2.3)$$

に依つて特徴附けられ，且つそれ等の線素は $B=r^2$ なる球對稱の形に於て夫々

$$ds^2=-\frac{dr^2}{1-k^2r^2}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\varphi^2+(1-k^2r^2)dt^2, \qquad (ds_1^2)$$

$$ds^2=-dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\varphi^2+dt^2, \qquad (ds_2^2)$$

---

(1) 竹野, 本誌, 8 (1938), 271, (W.G. No. 33).

$$ds^2=-\frac{dr^2}{1-\dfrac{r^2}{R^2}}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+dt^2\,, \qquad (ds_3^2)$$

で與へられる。[1]

(2.1), (2.2), (2.3) より分るやうに是等の線素は何れも次の方程式を滿足する。

$$\nabla_h K_{ij}^{\cdot\cdot lm}=0 \qquad (F_1)$$

逆に吾々は次の定理を證明することが出來る。

定理 1. **$B\neq$ 常數なる球對稱線素で (F_1) を滿足する一般なる形は, $B=r^2$ なる座標系に於ては變換 $t=\varphi(\bar{t})$ を除いて ds_ρ^2 $(\rho=1,2,3)$ により與へられる。なほこの座標系に於て (F_1) は $\partial_h K_{ij}^{\cdot\cdot lm}=0$ と一致する。**

證明。 $B\neq$ 常數なる故任意の量の球對稱性を失ふことなしに $B=r^2$ なる座標系を選ぶことが出來る。此の座標系に於ては

$$\left\{\begin{smallmatrix}1\\11\end{smallmatrix}\right\}=\frac{A'}{2A}\,,\quad \left\{\begin{smallmatrix}4\\11\end{smallmatrix}\right\}=\frac{\dot{A}}{2C}\,,\quad \left\{\begin{smallmatrix}2\\12\end{smallmatrix}\right\}=\left\{\begin{smallmatrix}3\\13\end{smallmatrix}\right\}=\frac{1}{r}\,,\quad \left\{\begin{smallmatrix}1\\14\end{smallmatrix}\right\}=\frac{\dot{A}}{2A}\,,\quad \left\{\begin{smallmatrix}4\\14\end{smallmatrix}\right\}=\frac{C'}{2C}\,,$$

$$\left\{\begin{smallmatrix}1\\22\end{smallmatrix}\right\}=-\frac{r}{A}\,,\quad \left\{\begin{smallmatrix}3\\23\end{smallmatrix}\right\}=\cot\theta\,,\quad \left\{\begin{smallmatrix}1\\33\end{smallmatrix}\right\}=-\frac{r}{A}\sin^2\theta\,,\quad \left\{\begin{smallmatrix}2\\33\end{smallmatrix}\right\}=-\sin\theta\cos\theta\,,$$

$$\left\{\begin{smallmatrix}1\\44\end{smallmatrix}\right\}=\frac{C'}{2A}\,,\quad \left\{\begin{smallmatrix}4\\44\end{smallmatrix}\right\}=\frac{\dot{C}}{2C} \qquad (2.4)$$

$$K_{12}^{\cdot\cdot12}=K_{13}^{\cdot\cdot13}=-\frac{A'}{2A^2r}\,,\quad K_{24}^{\cdot\cdot24}=K_{34}^{\cdot\cdot34}=\frac{C'}{2ACr}\,,\quad K_{23}^{\cdot\cdot23}=\frac{1-A}{r^2A}$$

$$K_{14}^{\cdot\cdot14}=-\frac{1}{4AC}\left(\frac{2\ddot{A}C-\dot{A}\dot{C}}{C}-\frac{2C''C-C'^2}{C}+\frac{A'C'-\dot{A}^2}{A}\right),$$

$$K_{12}^{\cdot\cdot24}=K_{13}^{\cdot\cdot34}=-\frac{\dot{A}}{2ACr} \qquad (2.5)$$

となり他の成分は 0 となる。[2] (2.4) を (F_1) に代入し $(i,j,l,m)=(2,3,2,3)$, $(1,2,1,2)$, $(2,4,2,4)$, $(1,4,1,4)$ とおけば夫々

$$\partial_h K_{23}^{\cdot\cdot23}=0\,,\quad \dot{A}=0\,,\quad A^{-1}=1-pr^2\,,\quad (p \text{ は常數})$$

$$\partial_h K_{12}^{\cdot\cdot12}=0\,,$$

---

(1) 竹野, 本誌, 8 (1938), 223, (W.G. No. 30).
(2) 竹野, 前揭, (W.G. No. 33) 278.

$$\partial_h K_{2i}^{\cdot\cdot 24}=0\,,\quad C=b(t)(1-pr^2)^{-\frac{a}{p}}\,,\quad \begin{pmatrix} a \text{ は任意常數} \\ b \text{ は任意函數} \end{pmatrix}$$

$$\partial_h K_{14}^{\cdot\cdot 14}=0\,,\quad \frac{a(1+ar^2)}{1-pr^2}=\text{常數}$$

となる。之から $\partial_h K_{ij}^{\cdot\cdot lm}=0$ が得られ，且つ最後の式から

$$(イ)\ a=-p\,,\quad \text{又は}\quad (ロ)\ a=0$$

となる。依つて變換 $\sqrt{b}\,dt=d\bar{t}$ を行ひ (イ) に於ては $p=k^2$ 又は 0, 又 (ロ) に於ては $p=\dfrac{1}{R^2}$ とおくならば直ちに ds_1^2, ds_2^2, ds_3^2 が得られる。證明終り。

この結果は波動幾何學的宇宙論に於て運動量密度ベクトル $u^i\equiv\psi^\dagger A\gamma^i\psi$ が測地曲線を與へるといふ假定のもとに得られた結果と同一である。[1] 又同じ結果は柴田氏により (r,θ,ϕ) 空間に於ける原點 $(r=0)$ を移動さす運動の存在及び g_{ij} が靜的であるといふ二つの條件のもとで得られ,[2] 且又著者により方程式 $\nabla_i v_j=\beta g_{ij}$ を空間が共形的に平坦且靜的であるといふ假定のもとに解くことによつても得られてゐる。[3] 但し今度の定理 1 に於ては A が靜的であることは假定ではなくて (F_1) よりの必然的の結果であることは注目すべきである。

次に吾々は $B=$常數なる球對稱線素について考へやう。此樣な線素は通常の相對性理論に於ては殆んど用ひられてゐないが波動幾何學では時々使用されて居る。

定理 2. **$B=$常數なる球對稱線素で (F_1) を滿足するものゝ一般形は (r,t) の變換を除いて**

$$ds^2=\frac{1}{pr^2}(-dr^2+dt^2)-B(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (ds_4^2)$$

又は

$$ds^2=-dr^2+dt^2-B(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (ds_5^2)$$

で與へられる。なほこの座標系に於ては (F_1) は $\partial_h K_{ij}^{\cdot\cdot lm}=0$ と一致する。

證明。 $B=$常數のときは次式が成立する。[4]

$$\left\{{}^{1}_{11}\right\}=\frac{A'}{2A}\,,\quad \left\{{}^{4}_{11}\right\}=\frac{\dot{A}}{2C}\,,\quad \left\{{}^{1}_{14}\right\}=\frac{\dot{A}}{2A}\,,\quad \left\{{}^{4}_{14}\right\}=\frac{C'}{2C}\,,\quad \left\{{}^{3}_{23}\right\}=\cot\theta$$

$$\left\{{}^{2}_{33}\right\}=-\sin\theta\cos\theta\,,\quad \left\{{}^{1}_{44}\right\}=\frac{C'}{2A}\,,\quad \left\{{}^{4}_{44}\right\}=\frac{\dot{A}}{2A} \qquad (2.6)$$

(1) 柴田隆史, 本紀要, **8** (1938), 201, (W.G. No. 29).
(2) 柴田隆史, 本紀要, **11** (1942), 231, (W.G. No. 48).
(3) 竹野, 本紀要, **11** (1942), 215, (W.G. No. 47).
(4) 竹野, 前掲, (W.G. No. 33), 278.

$$K_{14}^{\cdot\cdot 14}=-\frac{1}{4AC}\left(\frac{2\ddot{A}C-\dot{A}\dot{C}}{C}-\frac{2C''C-C'^2}{C}+\frac{A'C'-\dot{A}^2}{A}\right),\qquad K_{23}^{\cdot\cdot 23}=-\frac{1}{B} \tag{2.7}$$

そして他の成分は 0 となる。(F_1) 及 (2.6) より容易に $\partial_h K_{ij}^{\cdot\cdot lm}=0$ を得，從つて $K_{14}^{\cdot\cdot 14}=$常數$=p$ となる。依つて (θ,ϕ) 空間と (r,t) 空間とは互に獨立な二次元の定曲率空間で，各々のスカラー曲率は夫々 $\dfrac{2}{B}$, $-2p$ となる。故に ds^2 は適當な (r,t) の變換によつて，$p\neq 0$ の時は ds_4^2 に；又 $p=0$ の時には ds_5^2 に變換することが出來る。[1]　　　　證明終り。

ds_4^2, ds_5^2 は ds_1^2, ds_2^2, ds_3^2 と共にボルン型電磁氣を有する宇宙模型の線素として著者により得られたものである。[2]

以上の結果を綜合するならば次のことを知る。

宇宙模型を與ふべき幾何學的空間は，宇宙の歪を表はすと考へられる曲率テンソルが座標に無關係な意味に於て一定であることにより特徴附けられる。

§3. **方程式** $\Gamma_h K_i^{\cdot m}=0$. (F_1) を添數 j, l について縮合すると (F_1) よりも條件の弱い式

$$\Gamma_h K_i^{\cdot m}=0 \tag{F_2}$$

が得られる。本節では (F_2) の解について研究する。

定理 3. $B\neq$**常數なる球對稱線素で** (F_2) **を滿足する一般形は** $B=r^2$ **なる座標系に於ては變換** $t=\varphi(\bar{t})$ **を除いて** ds_1^2, ds_2^2, ds_3^2 **及び**

$$ds^2=-\frac{dr^2}{1-\dfrac{m}{r}}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+\left(1-\frac{m}{r}\right)dt^2, \tag{ds_6^2}$$

$$ds^2=-\frac{dr^2}{1-k^2r^2-\dfrac{m}{r}}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+\left(1-k^2r^2-\frac{m}{r}\right)dt^2, \tag{ds_7^2}$$

によつて與へられる。なほこの座標系では (F_2) **は** $\partial_h K_i^{\cdot m}=0$ **と一致する。**

ds_6^2 は $K_{ij}=0$ のシュワルツシルドの解で ds_7^2 はデ・ジッターの線素とシュワルツシルドの線素とを結合したものである。

---

(1) 竹野，本誌，**10** (1940), 182, (W.G. No. 39).
(2) 竹野，本誌，**9** (1939), 195, (W.G. No. 35).

證明。 (F_2) に (2.4), (2.5) を代入し $(i, m)=(2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,4), (4,4)$ とおけば次式を得る。

$$K_1^{\cdot 1}=K_2^{\cdot 2}=K_3^{\cdot 3}=\text{常數},\quad K_1^{\cdot 4}=0,\quad C'(K_1^{\cdot 1}-K_4^{\cdot 4})=0,\quad K_4^{\cdot 4}=\text{常數} \tag{3.1}$$

そして $K_1^{\cdot 4}=0$ より $\dot{A}=0$ 即ち A が靜的であることが分る。

(i) $C'=0$ のとき。$C=C(t)$ なる故 t の單位の變換により $C=1$ なる座標系をとる。すると

$$K_1^{\cdot 1}=-2K_{12}^{\cdot\cdot 12}=\frac{A'}{A^2 r},\quad K_4^{\cdot 4}=0,\quad K_2^{\cdot 2}=-K_{12}^{\cdot\cdot 12}-K_{23}^{\cdot\cdot 23},$$
$$\left(K_{23}^{\cdot\cdot 23}=\frac{1-A}{r^2 A}\right) \tag{3.2}$$

故に (3.1) を用ひ $K_1^{\cdot 1}=\dfrac{2}{R^2}$ とおけば直ちに ds_3^2 及び ds_2^2 $\left(ds_3^2 \text{ で } \dfrac{1}{R^2}=0 \text{ の場合}\right)$ を得る。逆に ds_3^2, ds_2^2 が (F_2) を滿足することは明かである。

(ii) $C'\neq 0$ のとき。(3.1) より $K_1^{\cdot 1}=K_2^{\cdot 2}=K_3^{\cdot 3}=K_4^{\cdot 4}=\text{常數}=3k^2$ を得る。故に

$$K_{12}^{\cdot\cdot 12}=K_{24}^{\cdot\cdot 24} \quad (3.3\,\mathrm{a}),\qquad K_{14}^{\cdot\cdot 14}=K_{23}^{\cdot\cdot 23} \quad (3.3\,\mathrm{b})$$

となる。(3.3 a) より $CA(r)=\varphi(t)$, 從つて t の單位を適當にとることにより $AC=1$ にとることが出來る。すると (3.3 b) 及び $K_2^{\cdot 2}=3k^2$ より夫々

$$\frac{C''}{2}+\frac{C'}{r}=-3k^2,\qquad \frac{C}{r^2}+\frac{C'}{r}=-3k^2+\frac{1}{r^2} \tag{3.4}$$

となり，從つて $C=1-k^2r^2-\dfrac{m}{r}$ 即ち ds_7^2 を得る。ds_7^2 に對する $K_{ij}^{\cdot\cdot lm}$ の 0 でない成分は

$$K_{12}^{\cdot\cdot 12}=K_{13}^{\cdot\cdot 13}=K_{24}^{\cdot\cdot 24}=K_{34}^{\cdot\cdot 34}=-k^2+\frac{m}{2r^3}.$$
$$K_{23}^{\cdot\cdot 23}=K_{14}^{\cdot\cdot 14}=-k^2-\frac{m}{r^3} \tag{3.5}$$

である。故に
$$K_i^{\cdot j}=3k^2\delta_i^j \tag{3.6}$$

となり ds_7^2 が (F_2) を滿足することは明らかである。

定理 4. $B=$**常數なる球對稱線素で** (F_2) **を滿足する一般の形は** (r, t) **の變換を除いて** ds_1^2 **及び** ds_5^2 **で與へられる。なほ此の座標系で** (F_2) **は** $\partial_h K_i^{\cdot m}=0$ **と一致する。**

證明。 (2.6) を (F_2) に代入すれば前と同様に

$$K_{2}^{\cdot 2}=K_{3}^{\cdot 3}=-K_{23}^{\cdot\cdot 23}=\text{常數}=\frac{1}{B},\quad K_{1}^{\cdot 1}=K_{4}^{\cdot 4}=-K_{14}^{\cdot\cdot 14}=\text{常數}=-p,$$
$$K_{1}^{\cdot 4}=0 \tag{3.7}$$

依つて定理 2 に於けると同様にして ds_4^2 及び ds_5^2 を得る。逆に是等の線素が (F_2) を滿足することは明らかである。

以上の結果を綜合すると分るやうに (F_2) は (F_1) よりも丁度 ds_6^2 及び ds_7^2 を許すだけ緩い條件を與へる。[1] このことは頗る興味あるものである。

第 二 部

§4. **方程式 $F(\lambda)=0$.** 四次元リーマン空間 V_4 に於ける $K_{ij}^{\cdot\cdot lm}$ の添數 (i,j), (l,m) を次のやうに附けかへる。[2]

$$(1,2)\equiv 1,\quad (1,3)\equiv 2,\quad (1,4)\equiv 3,\quad (2,3)\equiv 4,\quad (2,4)\equiv 5,\quad (3,4)\equiv 6. \tag{4.1}$$

すると例へば $K_{12}^{\cdot\cdot 12}=K_{1}^{\cdot 1}$, $K_{32}^{\cdot\cdot 34}=-K_{4}^{\cdot 6}$ となる。

そこで

$$\text{行列 } [K_{a}^{\cdot b}]\equiv\begin{bmatrix} K_{1}^{\cdot 1} & \cdots & K_{6}^{\cdot 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{1}^{\cdot 6} & \cdots & K_{6}^{\cdot 6}\end{bmatrix},\qquad a,b=1,2,\ldots,6 \tag{4.2}$$

とおき, (4.2) の特有方程式

$$F(\lambda)\equiv|\lambda E-[K_{a}^{\cdot b}]|=0 \tag{F_3}$$

を考へると次の定理を得る。

定理 5. (F_3) の根即ち $[K_{a}^{\cdot b}]$ の固有値は座標系に無關係である。[3]

證明。 座標變換

$$x^i=x^i(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^4),\quad (|\underline{x}_j^i|\neq 0)\quad \text{こゝに}\quad \underline{x}_j^i=\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^j} \tag{4.3}$$

により $K_{ij}^{\cdot\cdot lm}$ が $\bar{K}_{ij}^{\cdot\cdot lm}$ に變換されるとすると

$$\bar{K}_{a}^{\cdot b}=\bar{K}_{ij}^{\cdot\cdot lm}=K_{pq}^{\cdot\cdot rs}\underline{x}_i^{[p}\underline{x}_j^{q]}\bar{x}_{[r}^{l}\bar{x}_{s]}^{m}=K_{c}^{\cdot d}\underline{x}_a^c\bar{x}_d^b \tag{4.4}$$

こゝに $a=(i,j)$, $b=(l,m)$, $c=(p,q)$, $d=(r,s)$, 且つ

$$\underline{x}_a^c=2\underline{x}_i^{[p}\underline{x}_j^{q]},\quad \bar{x}_d^b=2\bar{x}_{[r}^{l}\bar{x}_{s]}^{m};\quad \bar{x}_r^l=\frac{\partial\bar{x}^l}{\partial x^r} \tag{4.5}$$

---

(1) (F_1) で h と m について縮合すれば $\nabla_s K_{ij}^{\cdot\cdot ls}=0$ を得る。此の式はビアンキの恒等式により $\nabla_{[i}K_{j]}^{\cdot l}=0$ と等値となり, 從つて (F_2) よりも更に緩い條件の式を與へる。

(2) すべて $i<j$, $l<m$ なる形に直して考へる。なほ此の番號の附けかへ方は任意である。此の思想は次の論文で發展せられてゐる。竹野, 本誌, **12** (昭和 17 年), 109.

(3) 此の定理は勿論 n 次元に擴張できる。

今
$$[\bar{x}_b^a]\equiv\begin{bmatrix}\bar{x}_1^1 & \cdots & \bar{x}_6^1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{x}_1^6 & \cdots & \bar{x}_6^6\end{bmatrix},\qquad [\underline{x}_b^a]\equiv\begin{bmatrix}\underline{x}_1^1 & \cdots & \underline{x}_6^1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \underline{x}_1^6 & \cdots & \underline{x}_6^6\end{bmatrix} \tag{4.6}$$
とおけば容易に(1)
$$[\bar{K}_a^{\cdot b}]=[\bar{x}_b^a][K_a^{\cdot b}][\underline{x}_b^a]=[\underline{x}_b^a]^{-1}[K_a^{\cdot b}][\underline{x}_b^a]$$
となり，是より定理の正しいことは明らかである。

§**5. 球對稱線素。 I.** 本節に於ては球對稱線素 ds_0^2 に就いて考へやう。簡單のため次のやうにおく。(2)
$$K_1^{\cdot 1}=K_2^{\cdot 2}=\alpha,\quad K_5^{\cdot 5}=K_6^{\cdot 6}=\beta;\quad K_1^{\cdot 5}=K_2^{\cdot 6}=\gamma,$$
$$K_6^{\cdot 1}=K_6^{\cdot 2}=\delta=-\frac{C}{A}\gamma;\quad K_3^{\cdot 3}=\xi,\quad K_4^{\cdot 4}=\eta \tag{5.1}$$
A が靜的であるときには $\gamma=\delta=0$ なる故 (F_3) の根は
$$\lambda=(\alpha,\alpha,\beta,\beta,\xi,\eta) \tag{5.2}$$
となる。次に任意の ds_0^2 に對する (F_3) は (5.1) により
$$(\lambda-\xi)(\lambda-\eta)\{\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta-\gamma\delta\}^2=0 \tag{5.3}$$
となる。故に

定理 6. ds_0^2 **に對する方程式** (F_3) **は二組の二重根を持つ。そしてもし複素根を持つならばその數は 4 である。**

此の二重根が實なる條件は
$$(\alpha-\beta)^2\geqq 4\frac{C}{A}\gamma^2 \tag{5.4}$$
である。

ds_0^2 で特に $B=$常數のときには (2.7) に依り $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0,\ \eta=-\dfrac{1}{B},$ $\xi=\xi(r,t)$ なる故

定理 7. $B=$**常數なる球對稱線素に對する** (F_3) **は 0 を四重根として，又 0 でない常數を一つの根として持つ。**

この定理の逆も亦成立する。即ち

定理 7′. (F_3) **が 0 を四重根として，又 0 でない常數を一つの根として持つやうな球對稱線素の** B **は常數である。**

證明。 先づ $\eta=0$ と假定する。$B\neq 0$ なる故 B は常數であり得ない。故

---

(1) $\bar{x}_b^a\underline{x}_c^b=\delta_c^a=\underline{x}_b^a\bar{x}_c^b$ 故に $[\bar{x}_b^a][\underline{x}_b^a]=E$.

(2) 此樣におくことの出來る理由は，竹野，前掲，W.G. No. 35, 200, より明らかである。

に r と t の變換により $B=r^2$ なる座標系をとる。この變換に於て $\eta=0$ は不變である。故に $A=1$, 從つて $\alpha=0$. 依つて 0 は (F_3) の少くとも三重根となる。今更に $\beta=0$ とすれば $C'=0$ となり 0 は六重根となり (V_4 は平坦となる), 假定に反する。$\beta\neq 0$, $\xi=0$ とすれば $2C''C-C'^2=0$, 故に

$$ds^2=-dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+(ar+b)^2dt^2 \tag{5.5}$$

こゝに $a(\neq 0)$, b は t の任意函數, となる。是から $\beta=\dfrac{a}{(ar+b)r}\neq$ 常數, 及び $\lambda=(0,0,\beta,\beta,0,0)$ を得る。之も亦假定に反する。

故に $\eta\neq 0$ なることを知る。今 $B=r^2$ とする。假定及び (5.3) より

$$\alpha+\beta=0\,,\qquad \alpha\beta-\gamma\delta=0 \tag{5.6}$$

然るに $\eta=\eta(r)$ のときには A も亦 $A(r)$ となる故 $\gamma=\delta=0=\alpha=\beta$, 從つて $A'=C'=0=\xi$。故に

$$ds^2=-pdr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+C(t)dt^2\,,\qquad (p=\text{常數}\neq 1)$$

故に $\lambda=(0,0,0,0,0,\eta)$, $\eta=\dfrac{1-p}{pr^2}\neq$ 常數。故にこれも假定に反する。從つて η は靜的であり得ない。故に $\xi=$ 常數 $\neq 0$ となり (5.6) より $A=\varphi(t)C$ を得る。依つて t の單位を更へて $A=C$ なる座標系をとる。再び (5.6) より $A'=\epsilon\dot{A}$, $(\epsilon^2=1)$, 即ち A は $(r+\epsilon t)$ の函數となり (2.5) より $\xi=0$ とならねばならない。然るにこれは不合理である。

結局以上を綜合して $B=$ 常數を得る。　　　　　　　　　　　證明終り。

定理 7 及び 7′ から容易に次の定理が得られる。

定理 8. (F_3) **の根が** $(0,0,0,0,0,q)$, $(0,0,0,0,p,q)$, $(0,0,0,0,p,-p)$, **こゝに** p,q **は 0 でない常數, で與へられる球對稱線素の一般形は** (r,t) **の變換を除いて夫々** ds_5^2 $\left(\text{但し } B=-\dfrac{1}{q}\right)$, ds_6^2 $\left(\text{但し } B=-\dfrac{1}{q}\right)$, **及び**

$$ds^2=\frac{R^2}{r^2}(-dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+dt^2)\,,\qquad \left(R^2=\frac{1}{p}\right), \tag{ds_8^2}$$

で與へられる。

定理 9.　　$$ds^2=-A(r,t)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2)+dt^2\,, \tag{ds_9^2}$$

に對する (F_3) **は三重根, 二重根, 單根を一箇宛持つ。特に** ds_9^2 **の中で**

$$ds^2=-\frac{e^{2g(t)}}{\left[1+\dfrac{r^2}{4R^2}\right]^2}(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2)+dt^2 \tag{ds_{10}^2}$$

に對しては三重根を二箇持つ。[1]

證明。ds_9^2 に對する $K_a^{\cdot b}$ の 0 でない成分は

$$\alpha=\frac{1}{4A^3r}[2AA'-2A'^2r+2rAA''-r A\dot{A}^2],\qquad \beta=\xi=\frac{1}{4A^2}[\dot{A}^2-2A\ddot{A}]$$

$$\gamma=\frac{1}{2A^2}[A\dot{A}'-\dot{A}A'],\qquad \eta=\frac{1}{4A^3r}[4AA'+rA'^2-rA\dot{A}^2] \tag{5.7}$$

今この式で $A=e^{2\eta}\left[1+\dfrac{r^2}{4R^2}\right]^{-2}$ とおくと

$$\gamma=0=\delta,\quad \alpha=\eta;\quad \text{故に}\quad \lambda=[\alpha(r,t),\alpha,\alpha;\beta(r,t),\beta,\beta], \tag{5.8}$$

となる。從つて定理の眞なることを知る。

ds_{10}^2 は相對論的宇宙論で使用される線素で ds_1^2, ds_2^2, ds_3^2 の定義する空間は何れも ds_{10}^2 の定義する空間の中の特別なものである。

§6. 球對稱線素。II. 本節では物理學で取扱はれる種々の球對稱線素で B ≒ 常數なるものに對する λ を，$B=r^2$ が成立する座標系を用ひて求める。

容易に證明出來るやうに[2]

定理 10. 一つの常數 ($=-k^2$, 又は $=0$) を (F_3) の六重根として持つ球對稱線素の一般形は (r,t) の變換を除いて ds_1^2 又は ds_2^2 で與へられる。

次に

定理 11. 0 及び一つの 0 でない常數を (F_3) の二つの三重根として持つ球對稱線素の一般形は (r,t) の間の變換を除いて ds_3^2 で與へられる。

證明。0 でない三重根を $-\dfrac{1}{R^2}$ とする。定理 7 により B は常數でない故 $B=r^2$ なる座標系をとる。今 $\eta=0$ とすれば $A=1$, 從つて $\gamma=\alpha=0$. 故に $\beta=\xi=-\dfrac{1}{R^2}$. 然るに $\beta=-\dfrac{1}{R^2}$ より $C=a(t)e^{-\frac{r^2}{R^2}}$, $\xi=-\dfrac{1}{R^2}\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right)$ ≒ 常數を得る。之は不合理である。

故に $\eta=-\dfrac{1}{R^2}$ でなくてはならぬ。是より $A^{-1}=1-\dfrac{r^2}{R^2}$ 及び $\alpha=-\dfrac{1}{R^2}$, 故に $\beta=\xi=0$, 從つて $C=C(t)$ を得る。故に t の單位の變換により ds_3^2 を得る。　證明終り。

---

(1) §7 參照。

(2) 定理 7 により B ≒ 常數である。又竹野，本誌，7 (1937), 43, (W.G. No. 11) 參照。

定理 12. **ρ(≒常数) を (F_3) の四重根として持ち, -2ρ を二重根として持つ球對稱線素の一般形は (r, t) の變換を除いて ds_6^2 で與へられる。但し $B=r^2$ なる座標系で A は靜的であるとする。**

證明。 $B=r^2$ なる座標系の存在は定理 7 より明かである。$\gamma=\delta=0$ であるから起り得る場合は次の三つとなる。

(イ) $\alpha=\beta=\rho,\ \xi=\eta=-2\rho,$ (ロ) $\alpha=\xi=\eta=\rho,\ \beta=-2\rho$

(ハ) $\beta=\xi=\eta=\rho,\quad \alpha=-2\rho$

(イ) の場合。容易に $K_i^j=0$ を得る。(1) 之より ds_6^2 を得る。$\left(\text{なほ } \rho=\dfrac{m}{2r^3}\right.$ となる$\Big)$。

(ロ) の場合。$\alpha=\eta$ より $A^{-1}=1+pr^2$, (p=常数) を得る。之より $\alpha=p$=常數となる。これは假定に反す。

(ハ) の場合。$\alpha=-2\eta$ より $A^{-1}=1-\dfrac{p}{r^4}$, (p は常數), 及び $\rho=-\dfrac{p}{r^6}$ を得る。是と $\beta=\rho$ とより $C=\varphi(t)\left(1-\dfrac{p}{r^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ を得る。從つて $\xi=\dfrac{p}{r^6}\left(5-\dfrac{2p}{r^4}\right)\left(1-\dfrac{p}{r^4}\right)^{-1}\neq\rho$, 之は不合理である。依つて (ロ), (ハ) の場合は起り得ない。

證明終り。

同樣にして次の二つの定理を證明することが出來る。(證明は省略する)。

定理 13. **$(\rho-k^2)$ を (F_3) の四重根として, $(-2\rho-k^2)$ を二重根として (但し ρ≒常數) 有する球對稱線素の一般形は (r, t) の變換を除いて ds_7^2 により與へられる。但し $B=r^2$ なる座標系に於て A は靜的であるとする。**

此の時にも $\rho=\dfrac{m}{2r^3}$ である。

定理 14. **一つの常數及び常數でない (r, t) の函數を (F_3) の二つの三重根として有する球對稱線素の一般形は (r, t) の變換を除いて**

$$ds^2=-\frac{dr^2}{1-\dfrac{r^2}{R^2}}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+\left(a-b\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2dt^2, \quad (ds_{11}^2)$$

こゝに a 及び b は t の任意の函數である, で與へられる。但し A は $B=r^2$ なる座標系で靜的であるとする。

---

(1). §8 參照。

ds_{11}^2 に於て a, b が共に常數ならば即ち $K_{ij}=0$ のシュワルツシルドの解に對する內部解となる。ds_1^2, ds_2^2, ds_3^2 は何れもこの特別な場合である。

§7. 附記。 I. ds_{10}^2 は $\frac{1}{R^2}=0$ 又は $\frac{1}{R^2}\neq 0$ に從ひ, (r, t) の變換により夫々

$$ds^2=h(t)(-dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+dt^2) \qquad (ds_{12}^2)$$

又は $$ds^2=f(X)(-dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+dt^2), \quad (X\equiv t^2-r^2), \quad (ds_{13}^2)$$

に變換し得る。(1) ds_{12}^2 に對しては

$$\alpha=\eta=-\frac{\dot{h}^2}{4h^3}, \quad \beta=\xi=\frac{\dot{h}^2-h\ddot{h}}{2h^3}, \quad \gamma=\delta=0$$

$$\lambda=[\alpha(t), \alpha, \alpha;\ \beta(t), \beta, \beta] \tag{7.1}$$

となり, ds_{13}^2 に對しては

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=-\frac{1}{f^3}\{2ff'-2r^2ff''+2r^2f'^2+t^2f'^2\}. \qquad \left(f'=\frac{df}{dX}\right)\\ \beta&=\frac{1}{f^3}\{-2ff'-2t^2ff''+2t^2f'^2+r^2f'^2\}, \qquad \gamma=-\delta=\frac{rt}{f^3}(3f'^2-2ff'')\end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

となり $$\alpha+\beta=\xi+\eta, \qquad \alpha\beta-\gamma\delta=\xi\eta \tag{7.3}$$

なる關係が恒等的に成立する。依つて ds_{13}^2 に對する λ は (5.3) により

$$\lambda=[\xi(X), \xi, \xi;\ \eta(X), \eta, \eta] \tag{7.4}$$

なることを知る。

なほ (7.3) の第一式に對して次の定理が成立する。

定理 15. **球對稱線素 ds_0^2 が共形的に平坦なる空間を與へるための必要且十分なる條件は**

$$\alpha+\beta=\xi+\eta \tag{7.5}$$

なることである。

證明。 (7.5) は明らかに

$$-K_{1212}-\frac{B}{C}K_{1414}+\frac{A}{C}K_{2424}+\frac{A}{B\sin^2\theta}K_{2323}=0 \tag{7.6}$$

と等値である。依つて定理の成立することが分る。(2)

§8. 附記。 II. $K_1^{\cdot 1}=-(2\alpha+\xi)$ 等の關係を利用すれば「$K_i^{\cdot j}=0$ は

(1) 竹野, 前掲, W.G. No. 39, 206.

(2) 竹野, 前掲, W.G. No. 39, 184.

$$\xi=\eta=-2\alpha=-2\beta, \qquad \gamma=\delta=0 \tag{8.1}$$

と等値である」ことを容易に證明し得る。

なほ等向座標に於けるシュワルツシルドの線素

$$ds^2=-\sigma^4(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2)+\frac{\tau^2}{\sigma^2}dt^2 \qquad (ds^2_{14})$$

こゝに $\sigma\equiv1+\dfrac{m}{4r}$, $\tau\equiv1-\dfrac{m}{4r}$, に於ては

$$\xi=\eta=-2\alpha=-2\beta=-\frac{m}{r^3\sigma^6}, \qquad \gamma=\delta=0$$

となる。