Greenの定理に就て

小笠原藤次郎

(昭和 17 年 6 月 8 日受附)

J. P. Schauder[1] は Gross-Jansen の測度論を根據として或る條件を滿足する有限面測度の境界をもつ有界領域の場合に就て，空間積分と面積分との關聯を表すものとして知られてゐる Green の定理の成立する條件を精密にした。その後 J. F. Randolph[2] は 2 次元空間の有界領域につき Schauder の證明を簡單にした。本論文では境界が低次元零測度の集合を除いた各點で局所的に Lipschitz 條件を滿足するといふ假定のもとに Green の定理を論ずることを目的とする。但境界が有限面測度をもつといふ假定はしない。その證明法は Kolmogoroff の測度論[3] をもとにして，上述の Schauder-Randolph の方法に據る。

1. A. Kolmogoroff の測度論。[4]

n 次元 Euclid 空間 R^n, n は 1 より大な整數，の解析集合を E 及びそれに添數又は肩符をつけたもので表し，R^n の二點 p, q の距離を $d(p, q)$ で表すことにする。E から E' 全體への一價寫像 $p'=\varphi(p)$, $p \in E$, $p' \in E'$ につき，任意二點 $p_1, p_2 \in E$ とその像 $p'_1, p'_2 \in E'$ との間に $d(p'_1, p'_2) \leqq ad(p_1, p_2)$ が成立つ正の常數 a が存在するとき $\varphi(p)$ は Lipschitz 條件を滿足する，或は $\varphi(p)$ は有界伸長寫像である，そして E' は E の有界伸長像といふ。特に $a=1$ のとき非伸長寫像及び非伸長像といふ言葉を使ふ。さて R^n のすべての E に負ならざる有限數又は無限數 $\mu(E)$ が對應し

(1) E_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, $\sum E_n \supset E$ のとき $\sum \mu(E_n) \geqq \mu(E)$,

(2) E_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, が互に素で $\sum E_n \subset E$ のとき $\sum \mu(E_n) \leqq \mu(E)$.

(3) E' が E の非伸長像のとき $\mu(E') \leqq \mu(E)$.

(4) E が k 次元單位區間，$0 < k \leqq n$, のとき $\mu(E)=1$.

---

(1) Fund, Math. **8** (1926), 1-48.
(2) Transactions A. M. S., **38** (1936), 531-548.
(3) Math. Ann. **107** (1933), 351-366.
(4) 同上。

が成立つとき Kolmogoroff に從つて $\mu(E)$ は k 次元測度函數であるといはれる。Kolmogoroff は k 次元測度函數に就て次の事實を證明した[1] 即ち，k 次元測度函數には最大のもの $\overline{\mu}(E)$ と最小のもの $\underline{\mu}(E)$ が存在し，任意の $\mu(E)$ に對し $\overline{\mu}(E) \geqq \mu(E) \geqq \underline{\mu}(E)$ が成立つ。特に E が k 次元空間の解析集合 T の有界伸長像のとき $\overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E)$ が成立し，もし T から E への寫像 $x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots x_n = x_n(t_1, t_2, \dots, t_k)$ が一對一のときは E の k 次元測度は

$$\iint \cdots \int_T \sqrt{\sum_{i_1, i_2, \dots i_k} \left\{ \frac{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_k})}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_k)} \right\}^2} dt_1 dt_2 \dots dt_k$$

で表される。但しこの式中の $\sum$ は 1 から n までの整數のなかから取出された k 個の自然數の組のすべてについて和を求めることを示す。(n 個の函數 $x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots x_n(t_1, t_2 \dots, t_k)$ は殆ど到る所全微分可能となることに注意)。從つて $n=k$ のとき Lebesque 測度となる。尙 k 次元測度が有限な集合は k より大きい次元で測度が 0 となる。

以下に於ては $k=n-1$ の場合のみを考へる。

2.　境界に就て。

以下 G を R^n の有界な開集合，B をその境界として B につき次の假定を置く。

(ある $(n-1)$ 次元測度函數につき) $(n-1)$ 次元測度零の集合を除いた B の各點の B 上の近傍のうちに $(n-1)$ 次元開球の一對一非伸長像となるものがある。

このことを簡單に B は殆ど到る所 Lipschitz 條件を滿足するといふことにする。この假定から B の殆ど到る所で ($(n-1)$ 次元測度零の集合を除いての意) 切平面をもち從つて法線が存在することが判る。R^n の點 p の座標を $x_1, x_2, \dots, x_k$ とし B の部分集合 $\mathfrak{B}^m, \mathfrak{B}^\infty, B^m, B_l, B_u$ を次の様に定義する。

$\mathfrak{B}^m$: B に屬する點のうちその點を通る x_1 軸への平行線が B と丁度 m 個 (m は自然數) の點を共有するやうな點の全體。

$\mathfrak{B}^\infty$: B に屬する點のうちその點を通る x_1 軸への平行線が B と無數に多くの點を共有するやうな點の全體。

(1) Kolmogoroff: 前掲。

B^m: B に屬する點のうちその點を通る x_1 軸への平行線上その點の下方に丁度 $(m-1)$ 個の B の點が存在するやうな點の全體。

B_l: B に屬する點のうちその點を通る x_1 軸への平行線上その點を下端とするある開區間が G に含まれるやうな點の全體。

B_u: B に屬する點のうちその點を通る x_1 軸への平行線上その點を上端とする或る開區間が G に含まれるやうな點の全體。

このとき次の補助定理が成立する。

補助定理 1. $\mathfrak{B}^m, \mathfrak{B}^\infty, B^m, B_l-\mathfrak{B}^\infty, B_u-\mathfrak{B}^\infty$ は Borel 集合である。

證明。k を自然數とし $\dfrac{h}{2^k} \leqq x_1 < \dfrac{h+1}{2^k}$, $h=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ を滿足する B の部分集合を B_k^h とすると, $\mathfrak{B}^m$ に屬する點は B の點のうちその點を通る x_1 軸への平行線が k が充分大となるとき丁度 m 個の B_k^h と出會ふといふことで特性づけられる。B_k^h の各點を通る x_1 軸への平行線上のすべての點からなる集合を W_k^h とすると

$$\mathfrak{B}^m = \underline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} E_k, \quad 茲に \quad E_k = \sum_{h_1, h_2, \ldots h_m} (W_k^{h_1} W_k^{h_2} \ldots W_k^{h_m} - \sum_{h \neq h_1, h_2, \ldots h_m} W_k^h) B.$$

と書かれる。$\sum\limits_{h_1, h_2, \ldots h_m}$ は互に異なる m 個の整數 $h_1, h_2, \ldots h_m$ のあらゆる組について加へることを意味する。W_k^h が Borel 集合となることが容易に判るから上式から $\mathfrak{B}^m$ が Borel 集合となることが判る。$\mathfrak{B}^\infty$ は定義から

$$\mathfrak{B}^\infty = B - \sum \mathfrak{B}^m$$

が成立つから $\mathfrak{B}^\infty$ も Borel 集合となる。

B^m の點は B の點のうちその點を通る x_1 軸への平行線が k が充分大なときにその點の下方に丁度 $(m-1)$ 個の B_k^h と出會やうな點の全體として特性づけられるから次の等式が成立つ。

$$B^m = \underline{\mathrm{Lim}}_{k\to\infty} E_k, \quad 茲に \quad E_k = \sum_{h_1 < h_2 < \cdots < h_m} (W_k^{h_1} W_k^{h_2} \ldots W_k^{h_m} - \sum_{\substack{h \neq h_1, h_2, \ldots h_m \\ h < h_m}} W_k^h) B_k^{h_m}$$

この式から B^m が Borel 集合となることが分る。

B_l の點のうちその點を下端とする長さ $\dfrac{1}{k}$ の x_1 軸に平行な開線分が G に含まれるときかやうな點の全體を $B_{l,k}$ で表すと $B_l = \sum B_{l,k}$ が成立することが判る。$B_{l,k}$ の集積點のうち B_l に屬しない點はその點を下端とする x_1 軸に平行な短い線分が B に含まれることになるから $\mathfrak{B}^\infty$ に屬する。從つて

$$B_l-\mathfrak{B}^\infty\subset\sum\bar{B}_{l,k}-\mathfrak{B}^\infty\subset\sum B_l-\mathfrak{B}^\infty$$

となり $B_l-\mathfrak{B}^\infty$ は Borel 集合となる。

$B_u-\mathfrak{B}^\infty$ は $B_l-\mathfrak{B}^\infty$ のときと同様にして Borel 集合となることが證明される。 以上。

以下 E の $(x_2, x_3, \cdots x_n)$-面への射影を E_{x_1} で表すことにするとき

補助定理 2. $(n-1)$ 次元測度が有限な閉集合 F の各點を通り x_1 軸に平行な直線が F と無數に多くの點を共有するとき F_{x_1} の Lebesque 測度 $m_{n-1}(F_{x_1})=0$ である。

證明。 m を任意の自然數とするとき $m_{n-1}(F_{x_1})\leqq\dfrac{1}{m}\mu(F)$ となることを證明すれば充分である。$\dfrac{h}{2^k}\leqq x_1<\dfrac{h+1}{2^k}$, $h=0, \pm1, \pm2, \dots$ を滿足する F の部分集合を F_k^h とする。F の點でその點を通る x_1 軸への平行線が少くとも m 個の F_k^h と共有點をもつやうな點の全體を E_k とすれば E_k は Borel 集合となる。何者 W_k^h を前と同様に F_k^h の各點を通る x_1 軸への平行線上のすべての點からなる集合とすれば

$$E_k=\sum_{h_1, h_2, \dots h_m} W_k^{h_1}W_k^{h_2}\cdots W_k^{h_m}(F_k^{h_1}+F_k^{h_2}+\cdots+F_k^{h_m})$$

が成立つからである。このとき E_k を

$$E_k=E_kF_k^{h_1}+E_kF_k^{h_2}+\cdots+E_kF_k^{h_p}, \qquad p\geqq m$$

なる形で表すと

$$\begin{aligned}m\times m_{n-1}\{(E_k)_{x_1}\}&\leqq m_{n-1}\{(E_kF_k^{h_1})_{x_1}\}+\cdots+m_{n-1}\{(E_kF_k^{h_p})_{x_1}\}\\&\leqq\mu(E_kF_k^{h_1})+\cdots+\mu(E_kF_k^{h_p})\\&=\mu(E_k)\leqq\mu(E).\end{aligned}$$

故に
$$m_{n-1}\{(E_k)_{x_1}\}\leqq\frac{1}{m}\mu(E).$$

然るに $k\to+\infty$ のとき $E_k\to E$ となるから $(E_k)_{x_1}\to E_{x_1}$, 從て $m_{n-1}\{(E_k)_{x_1}\}\to m_{n-1}(E_{x_1})$, 因つて

$$m_{n-1}(E_{x_1})\leqq\frac{1}{m}\mu(E).$$ 以上。

補助定理 3. $$m_{n-1}\{(\mathfrak{B}^\infty)_{x_1}\}=0.$$

(證明) $m_{n-1}\{(\mathfrak{B}^\infty)_{x_1}\}>0$ とするとき $m_{n-1}(E)>0$ なる $(\mathfrak{B}^\infty)_{x_1}$ の閉部分集合 E が存在する。玆に E の各點は B 上の除外點の射影でないとしてよ

い。何者 B 上の除外點の集合は $(n-1)$ 次元零測度であるからその射影は Lebesque 測度零となるから。E の各點を通つて x_1 軸に平行線を引き B との交點の全體を F とするとき F は有界閉集合で F の各點には B 上の近傍として $(n-1)$ 次元開球の一對一非伸長像が存在する。F はかやうな有限個の近傍で被覆することが出來るから F の $(n-1)$ 次元測度は有限である。因て補助定理 2 から $m_{n-1}(E)=0$ とならねばならない。これは $m_{n-1}(E)>0$ に反する。 以上。

補助定理 4. B の部分集合 E につき $m_{n-1}(E_{x_1})=0$ のとき E の殆ど到る所法線は x_1 軸と垂直である。

證明。E が Borel 集合で B 上の除外點を含まないときにつき證明すれば充分である。E の各點には $(n-1)$ 次元開球の一對一非伸長像からなる B 上の近傍が對應する。Lindelöf の定理から E はかやうな近傍の可附番個で被覆される。從つて E が一つの近傍に含まれるときにつき證明すればよい。$(n-1)$ 次元開球からかやうな近傍への非伸長寫像を $x_1=x_1(t_1, t_2, \dots t_{n-1}), \dots x_n=x_n(t_1, t_2, \dots t_{n-1})$ としこの寫像で E の原像を T とする。T の殆どすべての點で $\dfrac{\partial(x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots t_{n-1})}=0$ を證明すればよいことになる。$\left|\dfrac{\partial(x_2, x_3, \dots x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots t_{n-1})}\right|>\alpha>0$ を滿足する T の部分集合の測度が 0 でないとする。かやうな部分集合は閉集合として差支ない。これを T' で表しその像を E' とする。E'^m で E' の點のうちその點を通る x_1 軸への平行線上その點の下方に E' の點が丁度 $(m-1)$ 個あるやうな點の全體を表すと $E'=\sum E'^m$ となる。E'^m の原像を T'^m とすると E'^m と T'^m とは一對一對應し E'^m と $(E'^m)_{x_1}$ についても同樣のことが成立するから

$$\alpha m_{n-1}(T'^m)\leqq\iint\cdots\int_{T'^m}\left|\frac{\partial(x_2, x_3, \dots x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots t_{n-1})}\right|dt_1dt_2\dots dt_{n-1}$$

$$=m_{n-1}\left((E'^m)_{x_1}\right)=0$$

が成立つ。これから $m_{n-1}(T'^m)=0$, 從て $m_{n-1}(T')=0$ となる。α は任意の正數としてよいから T の殆どすべての點で $\dfrac{\partial(x_2, x_3, \dots x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots t_{n-1})}=0$ となる。

以上。

補助定理 5. $E\subset B$ とし E の各點を通る x_1 軸への平行線は E と唯一

點を共有するとする。$f(p)$ を E 上で定義された μ-可積分函數とすると $f(p)$ は E_{x_1} 上の函數とも考へられる。B の殆ど到る所存在する法線と x_1 軸とのなす角の餘弦の絶對値を $|\cos(n, x_1)|$ で表すならば

$$\iint\cdots\int_{Ex_1} f(p)dx_2dx_3\dots dx_n=\int_E f(p)|\cos(n, x_1)|d\mu.$$

の成立つ。

證明。E が $(n-1)$ 次元開球の非伸長像に含まれるとき證明すれば充分である。$x_1=x_1(t_1, t_2, \dots t_{n-1}), \dots x_n=x_n(t_1, t_2, \dots t_{n-1})$ を $(n-1)$ 次元開球の非伸長寫像とし E の原像を T とする。

$$\begin{aligned}&\int_E f(p)|\cos(n, x_1)|d\mu\\ &\quad=\iint\cdots\int_T f(p)\left|\frac{\partial(x_2, x_3, \dots x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots t_{n-1})}\right|dt_1dt_2\dots dt_{n-1}\\ &\quad=\iint\cdots\int_{Ex_1} f(p)dx_2dx_3\dots dx_n.\end{aligned}$$

以上。

B_u 及び B_l の殆どすべての點で法線が存在するが B_u の點では x_1 軸の負の向きと $\frac{\pi}{2}$ より大とならない角を作る法線の向きを內部に向ふ法線の向きと定める。B_l の點では x_1 軸の正の向きを考へ內部に向ふ法線の向きを定義する。從て B_uB_l の點では內部に向ふ法線の向きが二通りに定められる。以下では B_uB_l の點は異なつた二點からなるものとして面積分をする。內部に向ふ法線の向きを n_i で表す。

3. G 上で定義せられる函數に關する假定。

$F(x_1, x_2, \dots x_n)$ を G で定義せられた函數で全く G に含まれる任意の n 次元區間に於て x_1 のみの函數と考へたと殆どすべての $(x_2, x_3, \dots x_n)$ に對して x_1 の絶對連續函數とする。從て $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ は $(x_1, x_2, \dots x_n)$ の函數として殆ど到る所で存在し可測函數となる。次に境界上で次の假定を設ける。B_l の殆どすべての點では B_l 上の點を下端とする x_1 軸に平行な線分に沿ふてその點に收斂する任意の數列につき $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ が極限をもつとしての極限を $f_l(p)$ で表す。B_u の點についても同様に $f_u(p)$ を定義する。他の境界點では $f(p)$ を任意に定義する。更に $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $f_l(p)$, $f_u(p)$ について夫々 G, $B_l-\mathfrak{B}^\infty$, $B_u-\mathfrak{B}^\infty$ で空間及び面積分が可能とする。

4. Green の定理の證明。

定理。 有界開集合 G の境界 B の殆ど到る所で Lipschitz 條件が滿足されてゐるとする。G 上の函數 $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ が 3 節の條件を滿足するならば

$$\iint\cdots\int_G \frac{\partial E}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \dots dx_n = -\int_{B_l-\mathfrak{B}^\infty} f_l(p)\cos(n_i, x_1)d\mu - \int_{B_u\mathfrak{B}^\infty} f_u(p)\cos(n_i, x_1)d\mu$$

證明。 補助定理 3 から $m_{n-1}\left((\mathfrak{B}^\infty)_{x_1}\right)=0$ なることを注意して

$$\iint\cdots\int_G \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \iint\cdots\int_{(B_u+B_l-\mathfrak{B}^\infty)_{x_1}} dx_2 dx_3 \dots dx_n \int \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1$$

が成立つ。但し $\int \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1$ は x_1 軸への平行線と G との交りの上での積分を表す。從て $\sum(f_u - f_e)$ の形に書かれる。

$B=\mathfrak{B}^\infty+\sum \mathfrak{B}^m$ (補助定理 1 から) を注意して上の等式の右邊は次の様に變形されることが判る。

$$\sum_{m,k}\left\{\iint\cdots\int_{(\mathfrak{B}^m B_u B^k)_{x_1}} f_u dx_3 dx_3 \dots dx_3 - \iint\cdots\int_{(\mathfrak{B}^m B_l B^k)_{x_1}} f_l dx_2 dx_3 \dots dx_n\right\}.$$

然るに補助定理 5 から

$$\iint\cdots\int_{(\mathfrak{B}^m B_u B^k)_{x_1}} f_u dx_2 dx_3 \dots dx_n = -\int_{\mathfrak{B}^m B_u B^k} f_u \cos(n_i, x_1)d\mu$$

$$\iint\cdots\int_{(\mathfrak{B}^m B_l B^k)_{x_1}} f_l dx_2 dx_3 \dots dx_n = \int_{\mathfrak{B}^m B_u B^k} f_l \cos(n_i, x_1)d\mu .$$

$B_u+B_l-\mathfrak{B}^\infty=\sum_{m,k}\mathfrak{B}^m(B_u+B_l)B^k$ なることから

$$\iint\cdots\int_G \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \dots dx_m = -\int_{B_l-\mathfrak{B}^\infty} f_l(p)\cos(n_i, x_1)d\mu - \int_{B_u-\mathfrak{B}^\infty} f_u(p)\cos(n_i, x_1)d\mu$$

なることが分る。 以上。

$F(x_1, x_2, \dots x_n)$ の定義を境界 B 上で次の様に擴大する。

$p \in B_u B_l$ では	$F(p)=f_l(p)-f_u(p)$
$p \in B_u - B_l$ では	$F(p)=f_u(p)$
$p \in B_l - B_u$ では	$F(p)=f_l(p)$
$p \in B-(B_u+B_l)$ では	$F(p)=f(p)$.

また $B_u B_l$ の點では法線の內部に向ふ向を B_l の點として定義されたもの

を使ひ，$B-(B_u+B_l)$ では法線の内部に向ふ向きを任意とするならば定理の等式は

$$\iint\cdots\int_G \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = -\int_B F(p)\cos(n_i, x_1)d\mu$$

と書かれることが補助定理 4 及び $B-(B_u+B_l+\mathfrak{B}^\infty)$ の殆ど到る所法線が x_1 軸と垂直となることから判る。

本研究に於て御懇切な御指導を賜つた前田教授に深く感謝する。尚本研究は文部省科學研究費の補助に依つてなされたものである。