東の中心

前田文友

（昭和 17 年 6 月 8 日受附）

前田 [1][1] に於て，ヒルベルト空間に於ける作用素環に含まれたあらゆる射影作用素の作る束に於て，J. v. Neumann [1] の可約なる連續幾何學（一般には補模束）の場合と同じく，次の四つの命題が同義であることを證明した。今 a を束 L の要素とする。

(α) a は L の中心に屬する。

(β) a は中性元である。

(γ) a は補元 a' を有し，$(a, a')D$ である。

(δ) a は唯一つの補元 a' を有する。

こゝに於て，L の中心とは L を ST の如く束の積としてあらはすとき $[1, 0]$ としてあらはされる L の要素の全體である。[2] 次に a が中性元であるとは，a と L の任意の二要素 x, y とがあらゆる形の配分の式を滿足することである。[3] $(a, b)D$ とは，L の任意の要素 x に對して，$x \frown (a \smile b) = (x \frown a) \smile (x \frown b)$ が成立することである。

(α)—(δ) の四命題が同義であることは連續幾何學の場合は模束といふ性質を用ひて證明して居る。[4] 作用素環の場合は必ずしも模束とは云へないから，作用素といふ具體的の性質を用ひて居る。こゝではこの兩者を包含するが如き一般の束の場合の定理を求める。

それには Wilcox [1] が導入した次の概念を用ひる。如何なる $c \leqq a$ に對しても $(b \smile c) \frown a = (b \frown a) \smile c$ が成立するとき $(b, a)M$ とかく。$a \frown b = 0$ にして $(b, a)M, (a, b)M$ が同時に成立するときは $(a, b) \perp_s$ とかく。

補題 1. 次の二つの命題は同義である。

(i) $(a, b) \perp_s$。

(ii) $a \frown b = 0$ にして，$x \leqq a$, $y \leqq b$ なる任意の x, y に對して

---

(1) 括弧 [ ] 内の數字は末尾の引用文獻中の番號を示す。

(2) Birkhoff [1], 23.

(3) Birkhoff [2], 702.

(4) v. Neumann [1], I, 定理 5.2 及び定理 5.3.

$$a \frown (x \smile y) = x, \qquad b \frown (x \smile y) = y. \tag{1}$$

[證] (i)→(ii). $x \leqq a$, $(b, a)M$ であるから

$$x \leqq a \frown (x \smile y) \leqq a \frown (x \smile b) = x.$$

故に $a \frown (x \smile y) = x$. 同様に $b \frown (x \smile y) = y$ である。

(ii)→(i). (1) の第一式に於て $y = b$ とおけば $a \frown (x \smile b) = x$.
即ち $(b, a)M$. 同様に $(a, b)M$.

定理 1. 束 L が 0 及び 1 を有するとき，次の三つの命題は同義である。

(α) a は L の中心に屬する。

(β) a は中性元にして補元 a' を有する。

(γ) a は補元 a' を有し，$(a, a')D$, $(a, a')\perp_s$ である。(1)

[證] (α)→(β). $L = ST$ とあらはすときは，$a = [1, 0]$ であるから a は補元 $a' = [0, 1]$ を有する。$[1, 0]$ が ST の中性元なることは，1, 0 が夫々 S, T の中性元であることから容易に驗證し得る。例へば

$$\begin{aligned}[1, 0] \frown ([x, y] \smile [u, w]) &= [1 \frown (x \smile u),\ 0 \frown (y \smile w)] \\ &= [(1 \frown x) \smile (1 \frown u),\ (0 \frown y) \smile (0 \frown w)] \\ &= ([1, 0] \frown [x, y]) \smile ([1, 0] \frown [u, w]).\end{aligned}$$

(β)→(γ). a は中性元であるから，$(a, a')D$, $(a, a')M$, $(a', a)M$ が成立する。

(γ)→(α). $S = (s; s \leqq a)$, $T = (t; t \leqq a')$ とおき，$L = ST$ なることを證明する。任意の $x \in L$ に對して $x \to [x \frown a, x \frown a']$ なる對應を考へれば，$[x \frown a, x \frown a'] \in ST$ である。逆に $[s, t]$ を ST の任意の要素とする。$x = s \smile t$ とおくときは，補題 1 から $x \frown a = (s \smile t) \frown a = s$, 同様に $x \frown a' = t$. 即ち $[s, t]$ は x の像である。而して $[x \frown a, x \frown a'] = [y \frown a, y \frown a']$ なるときは $x \frown a = y \frown a$, $x \frown a' = y \frown a'$, $(a, a')D$ なれば

$$x = x \frown (a \smile a') = (x \frown a) \smile (x \frown a') = (y \frown a) \smile (y \frown a') = y \frown (a \smile a') = y.$$

故に $x \to [x \frown a, x \frown a']$ によりて L と ST とは一對一の對應をなす。この對應は明らかに順序を變へない。故に L と ST とは束同型である。しかして $a \to [1, 0]$ であるから，a は L の中心に屬する。(證明終)

次に L が相對補束であるとする。即ち $a \leqq x \leqq b$ なるときは，$x \smile y = b$,

---

(1) (α) と (β) とが同義であることは Birkhoff [2], 定理 6 にある。

$x \frown y = a$ を満足する x の相對補元 y が存在すると假定する。

補題 2. L を $0, 1$ を有する相對補束とする。$a \frown x = 0$ なるときは, $x \leqq a'$ なるが如き a の補元 a' が存在する。

[證]
$$(a \smile x) \smile y = 1, \qquad (a \smile x) \frown y = x \tag{1}$$
を滿足する y をとる。(1) の第二式から $y \geqq x$ である。故に (1) の第一式は $a \smile y = 1$ となる。又 (1) の第二式より $a \frown y = a \frown (a \smile x) \frown y = a \frown x = 0$. 故に y が求むる a' である。

定理 2. L を $1, 0$ を有する相對補束とすれば, 次の四つの命題は同義である。

(α) a は L の中心に屬する。

(β) a は中性元である。

(γ) a の補元 a' に對し, $(a, a')D$, $(a, a')\perp_s$ が成立する。

(δ) a は唯一つの補元 a' を有し $(a, a')\perp_s$ である。

[證] 補元の存在は假定して居るから, 定理 1 から (α), (β), (γ) は同義である。(α)$\rightarrow$(δ) を證明する。
$$[1, 0] \smile [x, y] = [1, 1], \qquad [1, 0] \frown [x, y] = [0, 0]$$
が成立するのは $x = 0$, $y = 1$ のとき及びそのときに限る。故に $a = [1, 0]$ は唯一つの補元 $a' = [0, 1]$ を有する。$(a, a')\perp_s$ は (γ) から出る。

次に (δ)$\rightarrow$(γ) を證明する。任意の $x \in L$ をとり, $u = a \frown x$ とおく。$u \smile v = x$, $u \frown v = 0$ なる v をとる。しかるときは $a \frown v = a \frown v \frown x = u \frown v = 0$。$a$ は唯一つの補元 a' を有するから補題 2 から $v \leqq a'$ である。$u \leqq a$, $v \leqq a'$ にして $(a, a')\perp_s$ であるから, 補題 1 から $a' \frown x = a' \frown (u \smile v) = v$. 故に
$$x \frown (a \smile a') = x = u \smile v = (x \frown a) \smile (x \frown a').$$
即ち $(a, a')D$ である。(證明終)

定理 2 が, 始めに述べた補模束の場合と作用素環の場合の兩者を包含する所の求むる定理である。このことは補模束の場合は明らかである。なんとなればこのときは相對補束であり, 模束であることから $(a, a')\perp_s$ は常に成立する。故に (γ), (δ) に於て $(a, a')\perp_s$ は不要である。

次に作用素環の場合を考へる。$\mathbf{M}$ をヒルベルト空間に於て 1 を含む作用素環とし, $\mathbf{M}$ に屬する射影作用素の全體を $\mathbf{E}$ にてあらはす。$E, F \in \mathbf{E}$ なるとき, $E \leqq F$ を $EF = FE = E$ によつて定義するときは $\mathbf{E}$ は束をなして居る。

$EF=0$ 或は $FE=0$ のときは $E\smile F=E+F$ であり，$EF=FE$ のときは $E\frown F=EF$ である。先づ $\mathbf{E}$ が相對補束なることを示す。$G\leqq E\leqq F$ とすれば，E, F, G は互に可換であるから $E_1=(F-E)\smile G=(F-E)+G$ とおけば，E と E_1 とも可換である。故に

$$E\smile E_1=E\smile(F-E)\smile G=E\smile(F-E)=F,$$
$$E\frown E_1=EE_1=E[(F-E)+G]=EG=G.$$

故に E_1 が E の相對補元である。

從つて定理 2 が適用出來る。このときに (γ) に於て $(E,E')\perp_s$ は不要である。なんとなれば $(E,E')D$ であるから

$$1-E=(1-E)\frown(E\smile E')=[(1-E)\frown E]\smile[(1-E)\frown E']=(1-E)\frown E'.$$

即ち $1-E\leqq E'$. 從つて $(1-E)E'=E'(1-E)=1-E$. 即ち $EE'=E'E$. 故に $EE'=E\frown E'=0$. 從つて $E'=1-E$ である。今 $H\leqq E$ とするときは，E, H, E' は互に可換であり $HE'=0$ であるから

$$E\frown(H\smile E')=E(H+E')=EH=H.$$

故に $(E',E)M$. 同樣に $(E',E)M$. 故に $(E,E')\perp_s$ である。又 (δ) に於ても $(E,E')\perp_s$ は不要である。それは E は唯一つの補元 E' を有するのであるから $E'=1-E$ であるべきである。故に上述の如く $(E,E')\perp_s$ である。かくの如くして定理 2 から作用素環の場合の定理が出て來る。

以上で我々の目的は達せられたのであるが，定理 2 に關聯して次のことが云へる。束の中心はブール代數を作るから,[1] 定理 2 から直に次の定理が成立する。

定理 3. 0, 1 を有する相對補束 L がブール代數であるための必要且つ充分なる條件は，L の任意の要素 a は唯一つの補元 a' を有し，$(a,a')\perp_s$ が成立することである。

この定理は補元の單一性からブール代數が云へる一つの場合を示してゐる。[2] 尙定理 3 に於て，補元の單一性を除けば，次の定理が成立する。

定理 4. 0, 1 を有する相對補束 L が模束であるための必要且つ充分なる條件は，任意の要素 a とその補元 a' との間に $(a,a')\perp_s$ が成立することである。

---

(1) Birkhoff [2], 定理 5.

(2) Birkhoff [1], 94 參照。

[證] 必要なることは明らかである。充分なることを證明するために，$c \leqq a$ なるとき $(b \smile c) \frown a = (b \frown a) \smile c$ が成立することを證明する。$(a \frown b) \smile x = b$, $(a \frown b) \frown x = 0$ なる x をとれば，$x \leqq b$ であるから $a \frown x = 0$. 故に補題 2 より $x \leqq a'$ なる a の補元 a' が存在する。$(a \frown b) \smile c \leqq a$ にして $(a, a') \perp_s$ であるから補題 1 から

$$(b \smile c) \frown a = [(a \frown b) \smile x \smile c] \frown a = (a \frown b) \smile c$$

である。

（本研究は文部省科學研究費による）

引 用 文 獻

G. Birkhoff, [1] *Lattice Theory*, 1940.

[2] *Neutral elements in general lattices*, Bull. Amer. Math. Soc., **46** (1940), 702–705.

前田文友, [1] *Relative dimensionality in operator rings*, 廣島文理科大學理科紀要, **11** (昭16), 1–6.

J. v. Neumann, [1] *Lectures on Continuous Geometries*, I, II, III, 1935–1937.

L. R. Wilcox, [1] *Modularity in the theory of lattices*, Annals of Math., **40** (1939), 490–505.