JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 17, NO. 1, AUG., 1953

Über Idempotente Ideale in Unendlichen Algebraischen Zahlkörpern

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 31, Januar 1953)

In seiner Arbeit[1] hat Herr E. Stiemke die Existenz eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers gezeigt, in dem nur endlich viele Primideale[2] idempotent sind. Vor kurzem habe ich dagegen ein Beispiel[3] eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers angeführt, in dem kein von Null- und Einheitsideal verschiedenes Primideal idempotent ist. In allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörpern ist es möglich, dass unendlich viele idempotente Primideale existieren. Darauf erhebt sich die Frage: Welche Bedingungen sind notwendig und hinreichend, dafür, dass ein Primideal $\mathfrak{p}$ idempotent ist? und diesem Problem ist diese Arbeit gewidmet.

Zunächst beweise ich, dass ein Primideal $\mathfrak{p}$ dann und nur dann idempotent ist, wenn ein Primideal $\mathfrak{p}_\nu$ aus endlichem algebraischem Zahlkörper $\mathfrak{K}_\nu$ nach $\mathfrak{p}$ unendlich verzweigt. Ferner zeige ich, dass für $m \geqq 2$ nicht die Beziechung

$$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}^{m-1} \supset \mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{m+1} = \cdots$$

gilt. Zweitens behaupte ich, dass irgendeine aus folgenden drei Bedingungen notwendig und hinreichend dafür ist, dass $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist,

1) $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}^2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}^M \cap \cdots = (0)$

2) $\mathfrak{p}^\lambda \cap \mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^\lambda \qquad (\lambda \geqq 2,\ \nu \geqq N)$

3) die zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale sind sämtlich Potenzen von $\mathfrak{p}$.

Endlich zeige ich, dass ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges idempotentes Primärideal $\mathfrak{q}$ gleich $\mathfrak{p}$ ist und dass jedes Ideal $\mathfrak{a}$ dann und nur dann idempotent ist, wenn seine sämtlichen isolierten Primärkomponenten idempotent sind. Hieraus ergibt sich schliesslich, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ dann und nur dann idempotent ist,

---

1) E. Stiemke; „Über unendliche algebraische Zahlkörper." Math. Zeit. 25 (1926), zitiert mit „Stiemke (1)." S. 38-39, Kapitel 6.

2) Im folgenden verstehen wir unter Primideal stets ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Primideal.

3) N. Nakano; „Idealtheorie in einem spezialen unendlichen algebraischen Zahlkörper." Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 16, No. 3, zitiert mit „Nakano (1)".

wenn seine sämtlichen isolierten Primärkomponenten gleich idempotenten Primideale sind.

§ 1. Idempotentes Primideal

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_\nu, \cdots$ definiert ist, wobei jeder $\mathfrak{K}_\nu$ von endlichem Grade über dem Rationalkörper und $\mathfrak{K}_\nu$ in $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ enthalten ist. Wir bezeichnen diesen Körper $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{K}_\nu\}$. Ist $\mathfrak{O}$ die Gesamtheit der ganzen algebraischen Zahlen des unendlichen Körpers $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{O}_\nu$ die Gasamtheit der ganzen Zahlen aus $\mathfrak{K}_\nu$, so ist offenbar: $\mathfrak{O}=\{\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \cdots, \mathfrak{O}_\nu, \cdots\}=\{\mathfrak{O}_\nu\}$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathfrak{O}$, und bezeichnen wir $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu$, so ist $\mathfrak{p}_\nu$ ein Primideal in $\mathfrak{O}_\nu$. Dann gilt ein einfacher aber wichtiger

Hilfssatz 1. *Ist a eine natürliche Zahl, so ist*

$$\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^a, \mathfrak{p}_{\nu+1}^a, \cdots\}=\{\mathfrak{p}_\nu^a\}=\mathfrak{p}^a .$$

Aus $\mathfrak{p}_\nu \leqq \mathfrak{p}$ ergibt sich $\mathfrak{p}_\nu^a \leqq \mathfrak{p}^a$. Also ist offenbar $\{\mathfrak{p}_\nu^a\} \leqq \mathfrak{p}^a$. Umgekehrt ist α eine beliebige Zahl aus $\mathfrak{p}^a$, so ist α in der Form darstellbar $\alpha=\sum_{i=1}^{k} \alpha_{1i}\, \alpha_{2i} \cdots \alpha_{ai}$, wo $\alpha_{ni}\,(n=1, 2, \cdots, a)$ die Zahlen aus $\mathfrak{p}$ bedeuten. Wir können N so gross wählen, dass alle α_{ni} in $\mathfrak{O}_\mu$ für $\mu \geqq N$ auftreten. Dann ist obige Summe für $\mu \geqq N$ durch $\mathfrak{p}_\mu^a$ teilbar. Also ist $\alpha \in \{\mathfrak{p}_\nu^a\}$, folglich $\{\mathfrak{p}_\nu^a\} \geqq \mathfrak{p}^a$. Damit ergibt sich $\{\mathfrak{p}_\nu^a\}=\mathfrak{p}^a$.

Es sei $\mathfrak{p}_\nu$ innerhalb $\mathfrak{K}_{\nu+1}, \mathfrak{K}_{\nu+2}, \cdots$ folgenderweise zerlegt:

$$\begin{array}{llll}
 & \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}\, \mathfrak{d}_{\nu+1}; & \mathfrak{p}_{\nu+1}=\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_{\nu+1}, & (\mathfrak{p}_{\nu+1}, \mathfrak{d}_{\nu+1})=\mathfrak{O}_{\nu+1} \\
 & \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_{\nu+2}=\mathfrak{p}_{\nu+2}^{e_{\nu+2}}\, \mathfrak{d}_{\nu+2}; & \mathfrak{p}_{\nu+2}=\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_{\nu+2}, & (\mathfrak{p}_{\nu+2}, \mathfrak{d}_{\nu+2})=\mathfrak{O}_{\nu+2} \\
(1) & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
 & \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_\mu=\mathfrak{p}_\mu^{e_\mu}\, \mathfrak{d}_\mu; & \mathfrak{p}_\mu=\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\mu, & (\mathfrak{p}_\mu, \mathfrak{d}_\mu)=\mathfrak{O}_\mu \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & &
\end{array}$$

Dann wird im allgemeinen $\cdots, e_{\nu+1}, e_{\nu+2}, \cdots, e_\mu, \cdots$ mit steigendem μ über alle Grenzen wachsen. In diesem Falle sagen wir wie folgt: „ $\mathfrak{p}_\nu$ *verzweigt nach* $\mathfrak{p}$ *unendlich*“.

Hilfssatz 2. *Wenn* $\mathfrak{p}_\nu$ *für hinreichend grosses* $\nu\,(\geqq N)$ *nach* $\mathfrak{p}$ *unendlich verzweigt, so ist* $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$.

Es sei α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}$, so ist $\alpha \in \mathfrak{O}_\nu$ für hinreichend grosses $\nu\ (\geqq N)$, folglich $\alpha \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$. Nun setzen wir $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_\mu = \mathfrak{p}_\mu^{e_\mu} \mathfrak{b}_\mu$, wo $\mu > \nu$ und $(\mathfrak{p}_\mu, \mathfrak{b}_\mu) = \mathfrak{O}_\mu$ sind. Nach unserer Bedingung, dass $\mathfrak{p}_\mu$ nach $\mathfrak{p}$ unendlich verzweigt, können wir setzen dass $e_\mu \geqq 2$ ist. Hieraus ergibt sich sofort $\alpha \in \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_\mu = \mathfrak{p}_\mu^{e_\mu} \mathfrak{b}_\mu \leqq \mathfrak{p}_\mu^{e_\mu} \leqq \mathfrak{p}_\mu^2 \leqq \mathfrak{p}^2$. Also muss $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{p}^2$, folglich $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ sein.

Hilfssatz 3. *Wenn* $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{m+1} = \cdots (m \geqq 1)$ *gilt, so muss* $\mathfrak{p}_\nu\ (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu)$ *nach* $\mathfrak{p}$ *unendlich verzweigen.*

Nehmen wir jetzt an, dass für hinreichend grosses $\mu\ (> \nu)$ der Exponent e_μ in der Zerlegung (1) von $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_\mu$ beschränkt ist, d. h. $e_\mu = e\ (\mu > \nu)$ für eine bestimmte Zahl e gilt. Da $\mathfrak{p}_\mu\ (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\mu)$ ein Primideal in endlichem algebraischem Körper $\mathfrak{K}_\mu$ ist, so ist $\mathfrak{p}_\mu^m \neq \mathfrak{p}_\mu^{m+1}\ (m \geqq 1)$. Damit gibt es ein Element α in $\mathfrak{p}_\mu^m$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_\mu^{m+1}$. Aus $\alpha \in \mathfrak{p}_\mu^m$ ergibt sich $\alpha \in \mathfrak{p}^m$. Da aber $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{m+1}$ ist, so ist $\alpha \in \mathfrak{p}^{m+1}$, folglich nach Hilfssatz 1

(2) $$\alpha \in \mathfrak{p}_\lambda^{m+1} \text{ für hinreichend grosses } \lambda > \mu .$$

Andererseits erhalten wir $\alpha = \mathfrak{p}_\mu^m \mathfrak{b}_\mu$, wobei $(\mathfrak{p}_\mu, \mathfrak{b}_\mu) = \mathfrak{O}_\mu$ ist, weil $\alpha \in \mathfrak{p}_\mu^m$, $\alpha \notin \mathfrak{p}_\mu^{m+1}$ ist. Da aber die Exponenten der $\mathfrak{p}_\lambda$ in der Zerlegung von $\alpha\, \mathfrak{O}_\lambda$ für hinreichend grosses $\lambda\ (> \mu)$ stets m gleich ist, so erhalten wir

$$\alpha\, \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^m \mathfrak{b}_\lambda, \qquad (\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{b}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda$$

Daraus folgt

(3) $$\alpha \in \mathfrak{p}_\lambda^m, \qquad \alpha \notin \mathfrak{p}_\lambda^{m+1}$$

entgegen dem obig gewonnenen Resultate (2). Hiermit muss $\mathfrak{p}_\nu$ nach $\mathfrak{p}$ unendlich verzweigen.

Aus Hilfssätze 2 und 3 folgt sofort der wichtige

Satz 1. ***Ein Primideal*** $\mathfrak{p}$ ***aus*** $\mathfrak{O}$ ***ist dann und nur dann idempotent, wenn*** $\mathfrak{p}_\nu$ ***nach*** $\mathfrak{p}$ ***unendlich verzweigt.***

Wir sprechen noch den folgenden Satz aus, dessen Richtigkeit wir ebenso auf Grund unserer Überlegungen sofort erkennen:

Satz 2. *Wenn* $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{m+1} = \cdots (m \geqq 2)$ *ist, so muss* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ *sein.*

Aus diesem Satz erkennen wir auch, dass $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}^{m-1} \supset \mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{m+1} = \cdots (m \geqq 2)$[4] keinesweg geschehen kann.

4) In seiner Arbeit hat Herr E. Stiemke gedacht, dass dieser Fall in der Tat eintreten kann, und bezeichnet den kleinsten Exponenten m als den Grad von $\mathfrak{p}$. Siehe „Stiemke (1)" S. 24-25.

§ 2. Nicht-idempotentes Primideal

Es sei $\mathfrak{q}$ ein Primärideal aus $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{q}_\nu=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu$ der Durchschnitt von $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{O}_\nu$. Dann ist offenbar $\mathfrak{q}_\nu$ ein Primärideal aus $\mathfrak{O}_\nu$. Weil $\mathfrak{K}_\nu$ ein algebraischer Zahlkörper von endlichem Grade ist, so ist $\mathfrak{q}_\nu$ gleich einer bestimmten Potenz von Primineal $\mathfrak{p}_\nu$: $\mathfrak{q}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}$. Dabei gilt der folgende

Hilfssatz 4. *Sind* $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}$ *und* $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}$, *so ist* $a_\nu\leqq a_{\nu+1}$.

Da $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}\cap\mathfrak{O}_\nu\leqq\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}$ und $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}\cap\mathfrak{O}_\nu\geqq\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}$ sind, so gilt $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}$. Aus $\mathfrak{p}_\nu\leqq\mathfrak{p}_{\nu+1}$ folgt $\mathfrak{p}_\nu^{a_{\nu+1}}\leqq\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}$. Damit ist $\mathfrak{p}_\nu^{a_{\nu+1}}=\mathfrak{p}_\nu^{a_{\nu+1}}\cap\mathfrak{O}_\nu\leqq\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}$ folglich $a_{\nu+1}\geqq a_\nu$.

Satz 3. *Es sei $a\geqq 2$, so ist $\mathfrak{p}^a\cap\mathfrak{O}_\nu$ für hinreichend grosses $\nu\ (\geqq N)$ dann und nur dann gleich $\mathfrak{p}_\nu^a$, wenn $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$ ist.*

Nehmen wir zunächst an, dass $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist. Dann ist $\mathfrak{p}^a=\mathfrak{p}^{a-1}\ (a\geqq 2)$ und wird nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{p}^a=\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^a,\ \mathfrak{p}_{\nu+1}^a,\cdots\}$ ebenso $\mathfrak{p}^{a-1}=\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{a-1},\ \mathfrak{p}_{\nu+1}^{a-1},\cdots\}$. Da aber $\mathfrak{p}_\nu$ ein Primideal aus endlichem algebraischem Zahlkörper $\mathfrak{K}_\nu$ ist, so ist $\mathfrak{p}_\nu^{a-1}\neq\mathfrak{p}_\nu^a$, $\mathfrak{p}_\nu^{a-1}>\mathfrak{p}_\nu^a$. Daraus folgt

$$\mathfrak{p}^a\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}^{a-1}\cap\mathfrak{O}_\nu\geqq\mathfrak{p}_\nu^{a-1}>\mathfrak{p}_\nu^a$$

Also erhalten wir $\mathfrak{p}^a\cap\mathfrak{O}_\nu\neq\mathfrak{p}_\nu^a$.

Es sei umgekehrt $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$, so wird nach Satz 2

$$\mathfrak{p}^a\neq\mathfrak{p}^{a-1}\qquad(a\geqq 2)\tag{4}$$

Setzen wir $\mathfrak{p}^a\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}$, $\mathfrak{p}^a\cap\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}$, so wird nach Hilfssatz 4 $a_\nu\leqq a_{\nu+1}$. Ferner ist es klar, dass $\mathfrak{p}^a\cap\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}\geqq\mathfrak{p}_{\nu+1}^a$, folglich $a_{\nu+1}\leqq a$ ist. Damit nehmen wir jetzt an, dass $a_\mu<a$ für alle $\mu\ (\geqq\nu)$ stets gilt. Dann wird $a_\mu\leqq a-1<a$, d. h. $\mathfrak{p}_\mu^{a_\mu}\geqq\mathfrak{p}_\mu^{a-1}>\mathfrak{p}_\mu^a$ für alle $\mu\ (\geqq\nu)$. Also erhalten wir $\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu},\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}},\cdots,\mathfrak{p}_\mu^{a_\mu},\cdots\}\geqq\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{a-1},\cdots,\mathfrak{p}_\mu^{a-1},\cdots\}\geqq\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^a,\cdots,\mathfrak{p}_\mu^a\cdots\}$. Daraus ergibt sich sofort $\mathfrak{p}^a\geqq\mathfrak{p}^{a-1}\geqq\mathfrak{p}^a$, d. h. $\mathfrak{p}^a=\mathfrak{p}^{a-1}$. Das ist nach (4) unmöglich. Hiermit muss von hinreichend grossem Indexe $\mu\ (\geqq\nu)$ an $a_\mu=a_{\mu+1}=\cdots\cdots=a$, nämlich $\mathfrak{p}^a\cap\mathfrak{O}_\mu=\mathfrak{p}_\mu^a$ sein.

Für Primärideal aus $\mathfrak{O}$ gilt bekanntlich folgende, zugrundlegende Satz[5]: Ein Ideal $\mathfrak{q}$ ist dann und nur dann ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, wenn $\mathfrak{q}$ nur durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Aus diesem Satze erhalten wir folgenden

5) Siehe etwa M. Moriya; „Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades.“ Jour. of Sci. Hokkaido Imp. Univ. Series I. vol. III. s. 172.

Satz 4. ***Für jedes Primideal*** $\mathfrak{p}$ ***aus*** $\mathfrak{O}$ ***gibt es kein Ideal zwischen*** $\mathfrak{p}$ ***und*** $\mathfrak{p}^2$.

Wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist, so ist unsere Behauptung schon einleuchtend. Nehmen wir damit an, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ von der Art existiert, dass $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{a}$ ist. Aus $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{a}$ folgt die Existenz der Elemente α, β, derart dass $\alpha \in \mathfrak{p}$, $\alpha \notin \mathfrak{a}$, $\beta \in \mathfrak{a}$, $\beta \notin \mathfrak{p}^2$ sind. Da aber $\alpha, \beta \in \mathfrak{O}_\nu$ für hinreichend grosses ν $(\geqq N)$ sind, können wir nach Satz 3 $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{a}_\nu$ $\mathfrak{p}^2 \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^2$ setzen und daraus ergeben sich $\alpha \in \mathfrak{p}_\nu$, $\alpha \notin \mathfrak{a}_\nu$, $\beta \in \mathfrak{a}_\nu$, $\beta \notin \mathfrak{p}_\nu^2$. Hieraus folgen

$$\mathfrak{a}_\nu \neq \mathfrak{p}_\nu, \qquad \mathfrak{a}_\nu \neq \mathfrak{p}_\nu^2, \qquad \mathfrak{p}_\nu \supset \mathfrak{a}_\nu \supset \mathfrak{p}_\nu^2 \tag{5}$$

Andererseits ist $\mathfrak{a}$ wegen $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}^2$ nur durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar. Also $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal. Damit ist offenbar $\mathfrak{a}_\nu$ ein zu $\mathfrak{p}_\nu$ gehöriges Primärideal und folglich ist $\mathfrak{a}_\nu$ eine besimmte Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}_\nu$: $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$. Das ist nach (5) unmöglich.

In gleicher Weise können wir beweisen nach Satz 3 folgenden

Zusatz. ***Für jedes Primideal*** $\mathfrak{p}$ ***aus*** $\mathfrak{O}$ ***existiert kein echtes Zwischenideal zwischen*** $\mathfrak{p}^{e-1}$ ***und*** $\mathfrak{p}^e$ $(e \geqq 2)$.

Satz 5. ***Ist*** $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$, ***so ist*** $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}^2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}^M \cap \cdots = (0)$, ***wobei*** (0) ***das Nullideal bedeutet.***

Setzen wir $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}^2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}^M \cap \cdots = \mathfrak{d}$, so ist zunächst zu beweisen, dass $\mathfrak{d}$ ein Primideal ist. Zum Beweise seien α, β zwei Elemente ausserhalb von $\mathfrak{d}$, so gibt es m, n von der Art, dass $\alpha \notin \mathfrak{p}^n$, $\beta \notin \mathfrak{p}^m$ ist. Wäre $\alpha\beta \in \mathfrak{d}$, so würde $\alpha\beta \in \mathfrak{p}^{m+n}$. Da aber $\mathfrak{p}^{m+n}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal ist und $\beta \notin \mathfrak{p}^{m+n}$ (wegen $\beta \notin \mathfrak{p}^m$) ist, so ist $\alpha \in \mathfrak{p}$ und ebenso $\beta \in \mathfrak{p}$. Damit gäbe es eine natürliche Zahl $e\,(1 < e \leqq n)$ bzw. $f\,(1 < f \leqq m)$ derart, dass $\alpha \in \mathfrak{p}^{e-1}$, $\alpha \notin \mathfrak{p}^e$ bzw. $\beta \in \mathfrak{p}^{f-1}$, $\beta \notin \mathfrak{p}^f$ würde. Nach Zusatz von Satz 4 gäbe es zwischen $\mathfrak{p}^e$ und $\mathfrak{p}^{e-1}$ kein echtes Zwischenideal, so hätten wir $(\mathfrak{p}^e, \alpha) = \mathfrak{p}^{e-1}$ und $(\mathfrak{p}^f, \beta) = \mathfrak{p}^{f-1}$. Damit ergäbe sich $\mathfrak{p}^{e-1}\mathfrak{p}^{f-1} = (\mathfrak{p}^e, \alpha)(\mathfrak{p}^f, \beta) = (\mathfrak{p}^{e+f}, \alpha\mathfrak{p}^f, \beta\mathfrak{p}^e, \alpha\beta)$, wobei $\alpha\beta \in \mathfrak{p}^{m+n} \leqq \mathfrak{p}^{e+f}$, $\alpha\mathfrak{p}^f \leqq \mathfrak{p}^{e+f-1}$, $\beta\mathfrak{p}^e \leqq \mathfrak{p}^{e+f-1}$ würde. Daraus folgte $\mathfrak{p}^{e+f-2} = \mathfrak{p}^{e+f-1}$, entgegen der Bedingung $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$. Aus $\alpha \notin \mathfrak{d}$, $\beta \notin \mathfrak{d}$ muss damit $\alpha\beta \notin \mathfrak{d}$ folgen, also ist $\mathfrak{d}$ ein Primideal.

Da aber in unendlichen algebraischen Zahlkörpern jedes von (0) verschiedene Primideal teilerlos ist, so erhalten wir $\mathfrak{d} = (0)$.

§ 3. Idempotentes Primärideal

Es sei $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so können wir $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ für alle ν setzen. Dabei ist die Vereinigungsmenge $\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}, \cdots\}$ offenbar gleich $\mathfrak{q}$. Danach gilt zunächst folgender

Hilfssatz 5. *Ist* $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ *für alle* ν, *so ist* $\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{2e_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{2e_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{2e_\lambda}, \cdots\} = \mathfrak{q}^2$, *und im allgemeinen* $\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{Me_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{Me_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{Me_\lambda}, \cdots\} = \mathfrak{q}^M$ *für alle natürlichen Zahlen* M.

Es sei α ein Element aus $\mathfrak{q}^2$, so ist α von der Form $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i$, wobei $\alpha_i, \beta_i \ (i=1, 2, \cdots, k)$ die Zahlen aus $\mathfrak{q}$ bedeuten. Wir können N so gross wählen, dass alle α_i, β_i in $\mathfrak{O}_\lambda$ für $\lambda \geqq N$ eintreten. Daher sind $\alpha_i \in \mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ und $\beta_i \in \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ $(i=1, 2, \cdots, k)$, so ist obige Summe durch $\mathfrak{p}_\lambda^{2e_\lambda}$ teilbar. Hiermit muss $\alpha \in \{\mathfrak{p}_\nu^{2e_\nu}\}$, folglich $\mathfrak{q}^2 \leqq \{\mathfrak{p}_\nu^{2e_\nu}\}$ sein.

Umgekehrt ist $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \leqq \mathfrak{q}$ und folglich $\mathfrak{p}_\nu^{2e_\nu} \leqq \mathfrak{q}^2$, so ist klar, dass $\{\mathfrak{p}_\nu^{2e_\nu}\} \leqq \mathfrak{q}^2$ ist. Daraus ergibt sich $\{\mathfrak{p}_\nu^{2e_\nu}\} = \mathfrak{q}^2$. Ferner gilt dasselbe an sich offenbar für jeden Exponent M, der höher ist als 2.

Satz 6. *Ist ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal* $\mathfrak{q}$ *idempotent, so ist* $\mathfrak{q}$ *gleich* $\mathfrak{p}$.

Zum Beweise nehmen wir an, dass $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ ist, so gibt es ein Element α in $\mathfrak{p}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{q}$. Für hinreichend grosses ν ist α ein Element aus $\mathfrak{O}_\nu$, so ist $\alpha \in \mathfrak{p} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$. Damit können wir festlegen wie folgt:

$$(6) \qquad \alpha = \mathfrak{p}_\nu^{a_\nu} \mathfrak{b}_\nu, \qquad a_\nu \geqq 1, \qquad (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}_\nu) = \mathfrak{O}_\nu .$$

Es sei nun $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ und β ein genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ teilbares Element. Dann ist $\beta = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{c}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$ und $\beta \in \mathfrak{q}^M$ für eine beliebig grosse natürliche Zahl M derart, dass $M > e_\nu$ ist, weil $\beta \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} = \mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu \leqq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^2 = \cdots\cdots = \mathfrak{q}^M = \cdots$ sind. Daraus ergibt sich nach Hilfssatz 5 die Existenz eines Indexes λ von der Art, dass $\beta \in \mathfrak{p}_\lambda^{Me_\lambda}$, $\lambda > \nu$ ist. Setzen wir nun nacheinander

$$\beta\, \mathfrak{O}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_\nu h_{\nu+1}} \mathfrak{c}_{\nu+1}, \qquad (\mathfrak{p}_{\nu+1}, \mathfrak{c}_{\nu+1}) = \mathfrak{O}_{\nu+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta\, \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda} \mathfrak{c}_\lambda, \qquad (\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{c}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dann ist $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1} \cdots h_\lambda} \leqq \mathfrak{p}_\lambda^{Me_\lambda}$, weil $\beta \in \mathfrak{p}_\lambda^{Me_\lambda}$ ist. Also erhalten wir $Me_\lambda \leqq e_\nu h_{\nu+1} \cdots h_\lambda$. Infolge von $e_\nu < M$ wird ferner

$$(7) \qquad e_\lambda < h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda$$

Andererseits folgt aus (6)

$$\alpha\,\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_\nu h_{\nu+1}}\,\mathfrak{b}_{\nu+1}, \qquad (\mathfrak{p}_{\nu+1},\ \mathfrak{b}_{\nu+1})=\mathfrak{O}_{\nu+1}$$

....

$$\alpha\,\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{a_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda}\,\mathfrak{b}_\lambda, \qquad (\mathfrak{p}_\lambda,\ \mathfrak{b}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$$

....

damit ist

(8) $$\alpha \in \mathfrak{p}_\lambda^{c_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda}$$

Aber nach unserer Annahme ist $\alpha \notin \mathfrak{q}$, und danach wird

(9) $$\alpha \notin \mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}.$$

Aus (8) und (9) ergibt sich $\mathfrak{p}_\lambda^{a_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda} \supset \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$, $\mathfrak{p}_\lambda^{c_\nu h_{\nu+1}\cdots h_\lambda} \neq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$, und daher

(10) $$a_\nu\, h_{\nu+1}\cdots h_\lambda < e_\lambda$$

Aus (7) und (10) folgt $a_\nu\, h_{\nu+1}\cdots h_\lambda < h_{\nu+1}\cdots h_\lambda$, was unserer Annahme $a_\nu \geqq 1$ widerspricht. Hiermit muss $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$ sein.

Wenn ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}$ idempotent ist, so kann $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ leicht abgeleitet werden.[6] Umgekehrt besteht die Frage, ob wir $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}^2$, d. h. $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$ erhalten, wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist? Betreffs dieser Frage können wir beweisen, dass aus $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ nicht immer $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}^2$, d. h. $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$ folgt und dass ein Primärideal $\mathfrak{q}$ von der Art existiert, dass $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2=\cdots=\mathfrak{p}^M=\cdots\supset \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$ ist.

Satz 7. *Verzweigt $\mathfrak{p}_\nu$ nach $\mathfrak{p}$ für hinreichend grosses ν ($\geqq N$) unendlich, so ist eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente*[7] $\mathfrak{q}$ *von $\mathfrak{p}_\nu\,\mathfrak{O}$ nicht idempotent.*

Ist dabei die Anzahl der verschiedenen Primidealteiler von $\mathfrak{p}_\nu\,\mathfrak{O}_\lambda$ ($\lambda>\nu$) bei wachsendem λ beschränkt, so besitzt $\mathfrak{q}$ eine endliche Basis, und wächst dagegen die Anzahl mit steigendem λ über alle Grenzen, so besitzt $\mathfrak{q}$ keine endliche Basis.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{p}_\nu\,\mathfrak{O}$, und sei

$$\mathfrak{p}_\nu\,\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{h_{\nu+1}}\,\mathfrak{b}_{\nu+1}, \quad (\mathfrak{p}_{\nu+1},\ \mathfrak{b}_{\nu+1})=\mathfrak{O}_{\nu+1}, \quad \mathfrak{p}_{\nu+1}=\mathfrak{p}\frown\mathfrak{O}_{\nu+1},$$

$$\mathfrak{p}_\nu\,\mathfrak{O}_{\nu+2}=\mathfrak{p}_{\nu+2}^{h_{\nu+1}h_{\nu+2}}\,\mathfrak{b}_{\nu+2}, \quad (\mathfrak{p}_{\nu+2},\ \mathfrak{b}_{\nu+2})=\mathfrak{O}_{\nu+2}, \quad \mathfrak{p}_{\nu+2}=\mathfrak{p}\frown\mathfrak{O}_{\nu+2},$$

....

6) Siehe Satz 9. von dieser Note.

7) In unendlichen algebreischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}$ können wir die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I. P. K. $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ folgendermassen definieren;

$\mathfrak{q}$ *ist die Gesamtheit aller Elemente, deren Produkt mit einem geeignet gewählten Elemente* $s \notin \mathfrak{p}$ *durch* $\mathfrak{a}$ *teilbar ist.*

Vgl. N. Nakano, „Über den Fundamentalsatz der Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern," Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 15 No. 3, zitiert mit „Nakano (2)".

Dann ist zunächst die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente (im folgenden wird sie kurz mit I. P. K. bezeichnet) $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}$ folgendermassen zu definieren:

$$\mathfrak{q} = \{\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{h_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda}, \cdots\}$$

Denn, bezeichnen wir $\{\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{h_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda}, \cdots\} = \mathfrak{q}'$ und sei α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q}'$, so gilt $\alpha \in \mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda}$ für hinreichend grosses $\lambda\,(>\nu)$. Wegen $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1} \cdots h_\lambda} \mathfrak{b}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{b}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda$, gibt es ein Element s in $\mathfrak{b}_\lambda$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_\lambda$. Aus $s \notin \mathfrak{p}$ und $\alpha s \in \mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1} \cdots h_\lambda} \mathfrak{b}_\lambda = \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_\lambda \leqq \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}$ folgt $\alpha \in \mathfrak{q}$[7]. Damit muss $\mathfrak{q}' \leqq \mathfrak{q}$ sein. Umgekehrt sei β ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q}$, so gibt es ein Element t von der Art, dass $\beta t \in \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}$, $t \notin \mathfrak{p}$ ist. Daraus folgt $\beta t \in \mathfrak{q}'$. Da aber $\mathfrak{q}'$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal ist, erhalten wir sofort $\beta \in \mathfrak{q}'$, folglich $\mathfrak{q} \leqq \mathfrak{q}'$. Damit muss $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ sein.

Zweitens sei e_λ ein Exponent, so dass $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ ist, dann können wir leicht beweisen, dass $e_\lambda = h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda$ für alle λ ist. Denn, wegen $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\lambda \geqq \mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda}$, erhalten wir sofort

(11) $$e_\lambda \leqq h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda$$

Es sei α ein genau durch $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ teilbares Element, so ist $\alpha = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} \mathfrak{c}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{c}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda$ und $\alpha \in \mathfrak{q}$, folglich $\alpha \in \mathfrak{p}_\mu^{h_{\nu+1} \cdots h_\lambda \cdots h_\mu}$ für hinreichend grosses $\mu\,(>\lambda)$. Es sei $\alpha \mathfrak{O}_\mu = \mathfrak{p}_\mu^{e_\lambda h_{\lambda+1} \cdots h_\mu} \mathfrak{c}_\mu$ $(\mathfrak{p}_\mu, \mathfrak{c}_\mu) = \mathfrak{O}_\mu$, so ist $\mathfrak{p}_\mu^{e_\lambda h_{\lambda+1} \cdots h_\mu} \leqq \mathfrak{p}_\mu^{h_{\nu+1} \cdots h_\lambda \cdots h_\mu}$, weil $\mathfrak{p}_\mu^{e_\lambda h_{\lambda+1} \cdots h_\mu}$ ein I. P. K. von $\alpha \mathfrak{O}_\mu$ ist. Daraus ergibt sich $e_\lambda h_{\lambda+1} \cdots h_\mu \geqq h_{\nu+1} \cdots h_\lambda \cdots h_\mu$, d. h.

(12) $$e_\lambda \geqq h_{\nu+1} \cdots h_\lambda$$

Aus (11) und (12) folgt

(13) $$e_\lambda = h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda$$

Endlich wollen wir beweisen, dass $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}^2$ ist. Zum Beweise wäre $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^2$, dann hätten wir ebenso wie (7) in dem Beweise von Satz 6 $e_\lambda < h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda$, entgegen (13). Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung dargetan.

Es sei nun die Anzahl der verschiedenen Primidealteiler von $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_\lambda$ $(\lambda > \nu)$ bei wachsendem λ beschränkt, dann wächst für hinreichend grosses $\mu\,(\geqq \nu)$ die Anzahl beständig und sie wird schliesslich ihren grössten Wert erreichen. Nehmen wir an, dass diese Tatsache schon in Körper $\mathfrak{K}_\nu$ geschieht, so ergibt sich: $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}$, $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_{\nu+2} = \mathfrak{p}_{\nu+2}^{e_{\nu+2}}, \cdots$ folglich $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O} = \mathfrak{q}$. Daher besitzt $\mathfrak{q}$ eine endliche Basis.

Wenn für hinreichend grosses N die Anzahl der verschiedenen Primidealteiler von $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_\lambda$ $(\lambda > \nu \geqq N)$ mit steigendem λ über alle Grenzen wächst, und nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}$ eine endliche Basis $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$ besitzt, so gibt es einen endlichen Körper $\mathfrak{K}_\mu$ für hinreichend grosses $\mu\,(\geqq \nu)$, der sämtliche α_i enthält. Also erhalten wir $(\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\mu)\mathfrak{O} = \mathfrak{p}_\mu^{e_\mu}\mathfrak{O} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)\mathfrak{O} = \mathfrak{q}$. Damit besitzt $\mathfrak{p}_\mu^{e_\mu}\mathfrak{O}$ keinen von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primidealteiler. Für hinreichend grosses μ ist danach die Anzahl der Teiler von $\mathfrak{p}_\mu \mathfrak{O}_\lambda$ $(\lambda > \mu > N)$ bei wachsendem λ beschränkt. Das widerspricht unserer Bedingung. Also kann $\mathfrak{q}$ keine endliche Basis besitzen.

Satz 8. *Ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}\,(\neq (0))$ ist dann und nur dann gleich einer Potenz von $\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist.*

Es sei zunächst $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ und bezeichnen wir $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}, \cdots$, so ist nach Hilfssatz 4 $\cdots \leqq e_\nu \leqq e_{\nu+1} \leqq \cdots$ und ist offenbar $\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}, \cdots\} = \mathfrak{q}$. Wäre $e_\nu < e_{\nu+1} < \cdots < e_\lambda < \cdots$ für alle $\nu \geqq N$, so ergäbe sich $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu} \supset \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ für alle $\lambda\,(>\nu)$. Daraus folgte $\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_\nu}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu}, \cdots\} \geqq \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}, \cdots\}$. Nach Hilfssatz 1 hätten wir $\mathfrak{p}^{e_\nu} \geqq \mathfrak{q}$, und ferner $\mathfrak{p}^{e_{\nu+1}} \geqq \mathfrak{q}, \cdots\cdots, \mathfrak{p}^{e_\lambda} \geqq \mathfrak{q}, \cdots\cdots$. Daraus folgte $\mathfrak{p}^{e_\nu} \cap \mathfrak{p}^{e_{\nu+1}} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}^{e_\lambda} \cap \cdots \geqq \mathfrak{q}$. Aus $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ergibt sich aber nach Satz 5 $\mathfrak{p}^{e_\nu} \cap \mathfrak{p}^{e_{\nu+1}} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}^{e_\lambda} \cap \cdots = (0)$, so hätten wir einen Widerspruch $\mathfrak{q} = (0)$. Hiermit muss für hinreichend grosses μ $e_\mu = e_{\mu+1} = \cdots = e$ (konst) sein. Dann erhalten wir nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^e$. Sei umgekehrt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$, so gibt es nach Satz 7 ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, welches gleich keiner Potenz von $\mathfrak{p}$ ist. Der Beweis unseres Satzes schliesst hiermit ab.

§ 4. Idempotentes Ideal

Satz 9 *Ist $\mathfrak{a}\,(\neq (0))$ ein beliebiges idempotentes Ideal aus $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$.*[8]

Aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ ergibt sich $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^M$ für alle M. Wegen $\mathfrak{a}^M \leqq \mathfrak{p}^M$ für alle M erhalten wir $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}^2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}^M \cap \cdots$. Wäre jetzt $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$, würde nach Satz 5 $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}^2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}^M \cap \cdots = (0)$. Daraus folgte der Widerspruch $\mathfrak{a} = (0)$. Also ist unserer Satz bewiesen.

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{O}$, so lässt sich $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von sämtlichen isolierten Primärkomponenten $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ von $\mathfrak{a}$ darstellen[9]: $\mathfrak{a} = \bigcap_\iota \mathfrak{q}_{(\iota)}$.

---

8) Aus Satz 7 ergibt sich die Tatsache, dass dieser Satz nicht immer umgekehrt werden kann.

9) W. Krull; „Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern," Math. Zeit. 29 (1929). „Nakano (2)".

Nun kommen wir schliesslich zur Beschreibung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{O}$ idempotent ist.

Satz 10. *Ein beliebiges Ideal* $\mathfrak{a}\,(\neq (0))$ *ist dann und nur dann idempotent, wenn die I. P. K.* $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ *von* $\mathfrak{a}$ *für alle* ι *idempotent ist.*

Es sei zunächst $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^2$, dann ist $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{a}\mathfrak{q}_{(\iota)} \geqq \mathfrak{a}^2$. Damit ist $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{q}_{(\iota)}$ für alle ι. Es sei α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q}_{(\iota)}$, dann haben wir ein Element s von der Art, dass $\alpha s \in \mathfrak{a}$, $s \notin \mathfrak{p}_{(\iota)}$ ist, wobei $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ das zu $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ gehöriges Primideal ist. Aus $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\,\mathfrak{q}_{(\iota)} \leqq \mathfrak{q}^2_{(\iota)}$ ergibt sich $\alpha s \in \mathfrak{q}^2_{(\iota)}$, $s \notin \mathfrak{p}_{(\iota)}$. Dabei ist aber $\mathfrak{q}^2_{(\iota)}$ ein zu $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ gehöriges Primärideal, somit ist $\alpha \in \mathfrak{q}^2_{(\iota)}$. Damit erhalten wir $\mathfrak{q}_{(\iota)} \leqq \mathfrak{q}^2_{(\iota)}$, folglich $\mathfrak{q}_{(\iota)}=\mathfrak{q}^2_{(\iota)}$ für alle ι.

Umgekehrt sei es $\mathfrak{q}_{(\iota)}=\mathfrak{q}^2_{(\iota)}$ für alle ι, dann gilt nach Satz 6 $\mathfrak{q}_{(\iota)}=\mathfrak{p}_{(\iota)}$ für das zu $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}_{(\iota)}$. Da alle Primidealteiler vom Ideal $\mathfrak{a}^2$ mit allen Primidealteilern von $\mathfrak{a}$ übereinstimmen, so können wir $\mathfrak{a}^2=\bigcap_{\iota}\mathfrak{q}'_{(\iota)}$ bezeichnen,[10] wobei $\mathfrak{q}'_{(\iota)}$ die zu $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}^2$. Dabei können wir $\mathfrak{q}'_{(\iota)}=\mathfrak{q}_{(\iota)}$ setzen. Denn, sei α ein beliebiges Element in $\mathfrak{q}_{(\iota)}$, so wird α wegen $\alpha \in \mathfrak{q}^2_{(\iota)}(=\mathfrak{q}_{(\iota)})$ in der Form $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j$ dargestellt, wobei α_j, $\beta_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ die Zahlen aus $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ bedeuten. Für eine so grosse Zahl $\nu\,(\geqq N)$, dass $\mathfrak{O}_\nu$ sämtliche α_j, β_j enthält, setzen wir $\mathfrak{q}_{(\iota)}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{q}_{(\iota)\nu}=\mathfrak{p}_{(\iota)}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_{(\iota)\nu}$ und $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu$, dann können wir erhalten folgendes: $\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{p}_{(\iota)\nu}\,\mathfrak{b}_\nu$, $(\mathfrak{p}_{(\iota)\nu}, \mathfrak{b}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$, weil $\mathfrak{a}=\bigcap_{\iota}\mathfrak{q}_{(\iota)}=\bigcap_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}$ ist. Damit sei t ein Element, derart dass $t\notin\mathfrak{p}_{(\iota)\nu}$, $t\in\mathfrak{b}_\nu$ ist. Dann sind $\alpha_j t\in\mathfrak{a}_\nu$, $\beta_j t\in\mathfrak{a}_\nu$, $j=1,2,\cdots n$, so ist $\alpha t^2=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j t)(\beta_j t)\in\mathfrak{a}^2_\nu\leqq\mathfrak{a}^2$, $t\notin\mathfrak{p}_{(\iota)}$. Daraus ergibt sich $\alpha\in\mathfrak{q}'_{(\iota)}$, folglich $\mathfrak{q}_{(\iota)}\leqq\mathfrak{q}'_{(\iota)}$. Da aber $\mathfrak{q}'_{(\iota)}$ ein zu $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}^2$ ist, so soll $\mathfrak{q}_{(\iota)}\geqq\mathfrak{q}'_{(\iota)}$ sein. Hiermit muss $\mathfrak{q}'_{(\iota)}=\mathfrak{q}_{(\iota)}$ für alle ι, d. h. $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^2$ sein.

Aus Sätzen 6 und 10 folgt sofort der wichtige

Satz 11. *Ein Ideal dann und nur dann idempotent ist, wenn seine sämtlichen Primärkomponenten gleich idempotenten Primideale sind.*

---

10) Vgl. „Nakano (1)", s. 437.