JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 19, NO. 3, JANUARY, 1956

# *Über Idealtheorie der Multiplikationsringe*

Von

Shinziro MORI

(Eingegangen am 20. Okt. 1955)

In Bd. 16 dieser Zeitschrift habe ich die Strukturtheorie der idempotenten Multiplikationsringe auf Grund der Annahme entwickelt,[1] dass jedes idempotente Element sich als eine direkte Summe von endlich vielen primitiven Elementen darstellen lässt. Für die nicht-idempotenten Ringe habe ich dabei den Struktursatz nur in einer unvollständigen Weise ausgeführt. Entsprechend dem primitiven Element ist die Existenz eines maximalen Primideals mühelos einzusehen. Ausserdem wird nach Lemma von Krull[2] der Existenzbeweis eines Primideals leicht ausgeführt, wenn der Ring ein Einheitselement enthält. In der vorliegenden Note wird demnach die folgende Annahme vorausgesetzt:

*Wenn der Multiplikationsring idempotent ist, so hat jedes Ideal wenigstens einen Primidealteiler.*

Unter dieser Voraussetzung wird zunächst die Untersuchung der Idealtheorie weiter geführt, und endlich der Zariskische Satz bewiesen, der sich stets aufstellt, gleichgültig ob der vorgelegte Ring idempotent ist, oder nicht. Im dritten Paragraphen wird meine frühere Vernachlässigung der Strukturtheorie der nicht-idempotenten Ringe in ganzen Umfange gerechtfertigt.

## § I. Idempotente Multiplikationsringe

Von *idempotentem Multiplikationsring* soll gesprochen werden, wenn für den Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}$ gilt. Für Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ gilt zunächst der folgende Satz, der gleichgültig ist, ob $\mathfrak{R}$ idempotent ist, oder nicht.

Satz I. *Ist $a$ ein nicht-nilpotentes Element aus $\mathfrak{R}$ und gilt $ab = a$ für ein anderes Element $b$, so gibt es in Ideal $(b)$ ein von Null verschiedenes idempotentes Element.*

---

1) S. Mori, Struktur der Multiplikationsringe. Journal of Sci. of the Hiroshima Univ. **16**, 1-11 (1952).

Ein kommutativer Ring ohne jede Bedingung heisst ein *Multiplikationsring*, wenn nur folgende Bedingung erfüllt ist:

*Zu je zwei Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ ist, gibt es stets ein Ideal $\mathfrak{c}$, so dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist.*

2) W. Krull, Idealtheorie ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Annalen, **101**, 729-744 (1929).

Nach $ab=a$ soll $b$ nicht nilpotent und $a(b-b^3)=0$ sein. Ist $b-b^3$ nilpotent, so ist $(b-b^3)^h=0$ für eine natürliche Zahl $h$, und daraus folgt leicht unsere Behauptung.

Ist $b-b^3$ nicht nilpotent, so sei $\mathfrak{h}$ das Radikal von $\mathfrak{R}$. Dann ist $a \notin \mathfrak{h}$ nach der ursprünglichen Eigenschaft von $a$. Setzen wir $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}:(a)$ und $\mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}:\mathfrak{h}_1$, so sind $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ halbprim, und $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}$, $a \in \mathfrak{h}_2$, $b-b^3 \in \mathfrak{h}_1$. Da $b-b^3$ nicht nilpotent ist, soll $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_1$ sein. Aus der multiplikativen Eigenschaft von $\mathfrak{R}$ gilt es $(a)=(a, \mathfrak{h}_1)\mathfrak{b}$ für ein Ideal $\mathfrak{b}$, und nach $\mathfrak{h}_1\mathfrak{b} \subseteqq (a) \subseteqq \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_1\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{h}_1$ ergibt sich $\mathfrak{h}_1\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{h}$, und daraus folgt $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{h}_2$. Für ein Element $b_1$ gilt damit $a \equiv b_1 a(\mathfrak{h})$, $b_1 \in \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{h}_2$. Nach $ab=a$ ergibt sich daraus $a \equiv b_1 b a(\mathfrak{h})$, und folglich ist $((b_1 b)^3 - b_1 b) \in \mathfrak{h}_1$. Da aber $b_1 \in \mathfrak{h}_2$ ist, erhalten wir $((b_1 b)^3 - b_1 b) \in \mathfrak{h}$. Damit können wir ein von Null verschiedenes idempotentes Element in $(b)$ finden.

Es sei von jetzt ab stets $\mathfrak{R}$ ein idempotenter Multiplikationsring. Dann ergibt sich aus Satz I der folgende

Satz 2. *$\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann in eine direkte Summe zerlegbar, wenn das Radikal $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{R}$ nicht prim ist.*

Zunächst erwähnen wir, dass $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{R}$ verschieden ist. Denn, sonst würde $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^2$ und aus der multiplikativen Eigenschaft von $\mathfrak{R}$ folgte $h=hh'$, $h' \in \mathfrak{h}$ für ein beliebiges Element $h$ aus $\mathfrak{h}$ und daher ein Widerspruch $h=hh'=hh'^2=\cdots=0$.

Ist $\mathfrak{h}$ nicht prim, so gibt es zwei Elemente $a$ und $b$, die $a \notin \mathfrak{h}$, $b \notin \mathfrak{h}$, $ab \in \mathfrak{h}$ genügen, und es gilt $(a) \subset (a, b)$, $(a) \cap (b) \subseteqq \mathfrak{h}$. Daraus folgt $(a)=(a, b)\,\mathfrak{c}$ für ein Ideal $\mathfrak{c}$, und danach gilt $a=ac_1+bc_2$, $a^2 \equiv a^2 c_1$ $(\mathfrak{h})$ für zwei Elemente $c_1$ und $c_2$ aus $\mathfrak{c}$. Da $\mathfrak{h}$ Radikal ist, ergibt sich $(a^2-a^2c_1)^k=0$, also $a^{2k}=a^{2k}c$. Nach Satz I gibt es damit ein idempotentes Element $c_0$ in $\mathfrak{c}$. Wäre $(c_0)=\mathfrak{R}$, so würde $(a)=(a, b)\mathfrak{R}$ und folglich $(b)\mathfrak{R} \subseteqq \mathfrak{h}$. Daraus folgte ein Widerspruch $b^2 \in \mathfrak{h}$. Damit soll $(c_0) \neq \mathfrak{R}$ sein. Es folgt daraus, dass $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe zerlegbar ist.

Wenn $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe zerlegbar ist, so ist $\mathfrak{h}$ ersichtlich nicht prim.

Wenn in einem Ideal kein nilpotentes Element auftritt, so können wir in folgender Weise den Krullschen Satz anführen.

Satz 3. *Es sei das Produkt von zwei beliebigen Elementen eines Ideals $\mathfrak{a}$ nicht Null. Setzen wir $\mathfrak{d}=\cap\mathfrak{a}^n$, so gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{d}=\mathfrak{d}$.*

Wenn $\mathfrak{a}=\mathfrak{R}$ ist, so wird $\mathfrak{a}^2=\mathfrak{R}^2=\mathfrak{R}$ und daraus folgt $\mathfrak{d}=\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{d}=\mathfrak{d}$.

Es sei nun $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{R}$. Aus $\mathfrak{d} \subseteqq \mathfrak{a}^n$ folgt

$$\mathfrak{d}=\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}^2\,\mathfrak{b}_2=\cdots=\mathfrak{a}^n\,\mathfrak{b}_n=\cdots$$

Ist $a$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}$, so ist nach der multiplikativen Eigenschaft

$$(a)\,\mathfrak{b}_1 = (a)\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_2 = \cdots = (a)\,\mathfrak{a}^{n-1}\,\mathfrak{b}_n = \cdots .$$

Setzen wir $\mathfrak{c} = (0):(a)$, so ist

$$\mathfrak{b}_1 \subseteqq (\mathfrak{c}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2),\ \mathfrak{b}_1 \subseteqq (\mathfrak{c}, \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}_3),\ \cdots \mathfrak{b}_1 \subseteqq (\mathfrak{c}, \mathfrak{a}^{n-1}\mathfrak{b}_n),\ \cdots,\ \mathfrak{c} \frown \mathfrak{a} = (0).$$

Für ein beliebiges Element $b_1$ aus $\mathfrak{b}_1$ erhalten wir daraus

$$b_1 = c_{m-1} + a_{m-1} = c_m + a_m,\quad c_{m-1} - c_m = a_m - a_{m-1},$$

wobei $c_i \in \mathfrak{c}$, $a_i \in \mathfrak{a}^i$ ist. Andererseits folgt aus $\mathfrak{c} \frown \mathfrak{a} = (0)$ aber $c_{m-1} = c_m$, $a_{m+1} = a_m$, Daraus ergibt sich $b_1 \in (\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, also $\mathfrak{b}_1 \subseteqq (\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, und daraus $(a)\mathfrak{b}_1 \subseteqq ((a)\mathfrak{c}, (a)\mathfrak{d}) = (a)\mathfrak{d}$. Da diese Beziehung aber gültig für jedes Element $a$ aus $\mathfrak{a}$ ist, erhalten wir endlich $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{d}$. Also ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\mathfrak{d}$.

Bei der Übertragung dieses Satzes auf den allgemeinen Fall ergeben sich Schwierigkeiten. Um diese zu vermeiden, beschäftigen wir uns im folgenden nur mit idempotentem Multiplikationsring $\mathfrak{R}$, der die folgende Bedingung erfüllt.

Primidealsbedingung. *Für jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ $(\neq (0), \mathfrak{R})$ *aus* $\mathfrak{R}$ *gibt es mindestens einen von* $\mathfrak{R}$ *verschiedenen Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$.

Auf Grund dieser Annahme gehen wir nun an die Untersuchung der Eigenschaften von Primidealen. Wir erhalten zunächst:

Satz 4. *Gilt es* $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$ *für zwei Primideale* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}'$, *so ist* $\mathfrak{p}$ *idempotent, und* $\mathfrak{p} = \frown \mathfrak{p}'^n$.

Nach multiplikativer Eigenschaft haben wir zunächst $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'\mathfrak{a}$. Da $\mathfrak{p}$ aber prim und $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$ ist, muss $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ sein. Daraus folgt

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}.$$

Aus $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'\mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p}'^n$ und folglich $\mathfrak{p} \subseteqq \frown \mathfrak{p}'^n$. Im Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ erhalten wir nach Satz 3

$$\bar{\mathfrak{p}}'\,\bar{\mathfrak{d}}' = \bar{\mathfrak{d}}' \quad \text{für} \quad \bar{\mathfrak{d}}' = \frown \bar{\mathfrak{p}}'^n.$$

Wäre $\bar{\mathfrak{d}}' \supset (0)$, so würde $\bar{p}'\bar{d}' = \bar{d}'$ für ein durch (0) unteilbares Element $\bar{d}'$ aus $\bar{\mathfrak{d}}'$ und daher ergäbe sich ein Widerspruch $\bar{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{p}}'$. Hiermit muss $\bar{\mathfrak{d}}' = (0)$ sein.

Setzen wir nun $\mathfrak{d}' = \frown \mathfrak{p}'^n$, so wird $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{d}'$. Ist $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{d}'$, so gibt es ein Element $d'$ von der Art, dass $d' \in \mathfrak{d}'$, $d' \notin \mathfrak{p}$, $d' \equiv \bar{d}'(\mathfrak{p})$ und $\bar{d}'$ ein Element aus $\bar{\mathfrak{R}}$ ist. Aber aus $\mathfrak{p}' = (\bar{\mathfrak{p}}', \mathfrak{p})$ folgt $\mathfrak{p}'^n = (\bar{\mathfrak{p}}'^n, \mathfrak{p})$. Daraus ergibt sich

$$\bar{d}' \equiv \bar{p}'_n\,(\mathfrak{p}),\quad \bar{p}'_n \in \bar{\mathfrak{p}}'^n \qquad \text{für alle } n.$$

Damit erhalten wir $\bar{d}' \in \bar{\mathfrak{d}}'$ und folglich $\bar{d}' \equiv 0\,(\mathfrak{p})$, was der Annahme $d' \notin \mathfrak{p}$ widerspricht. Es gilt damit $\mathfrak{p} = \mathfrak{d}' = \frown \mathfrak{p}'^n$.

Ist $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}^2$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$, so soll $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{b}$ sein. Wenn $\mathfrak{b} \not\subseteqq \mathfrak{p}$ ist, seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots,$ alle Primidealteiler von $\mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{p}_i^{k_i} \supseteqq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}_i^{k_i+1} \not\supseteqq \mathfrak{b}$ $(i = 1, 2, 3 \cdots)$. Denn, sonst würde $\mathfrak{p} \supseteqq \mathfrak{b}$ nach dem soeben gewonnenen Resultat. Setzen wir nun $\mathfrak{d} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i^{k_i}$, so wird $\mathfrak{d} \supseteqq \mathfrak{b}$. Wäre dabei $\mathfrak{d} \supset \mathfrak{b}$, so würde $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}\mathfrak{b}'$ und daraus folgte ein Widerspruch $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}_i^{k_i+1}$. Hiermit ist $\mathfrak{b} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i^{k_i}$ und nach der multiplikativen Eigenschaft gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1^{k_1}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1 \subseteqq \mathfrak{p}_2^{k_2} \cap \mathfrak{p}_3^{k_3} \cap \cdots$. Da aber $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_i^{k_i} = \mathfrak{p}$ ist, erhalten wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$. Wenn $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$ ist, so wird $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^2$. Daraus folgt $\mathfrak{p} = (p, \mathfrak{p}^2)$.

Nach $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'\mathfrak{p}$ ergibt sich daraus $p \equiv p'p(\mathfrak{p}^2)$, $(p' - p'^2)(p, \mathfrak{p}^2) \subseteqq \mathfrak{p}^2$, $(p' - p'^2, \mathfrak{p})(p, \mathfrak{p}^2) \subseteqq \mathfrak{p}^2$ für ein Element $p'$ aus $\mathfrak{p}'$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}$. Dabei muss $(p' - p'^2) \notin \mathfrak{p}$ sein. Denn, sonst ergäbe sich $(r - rp')p' \in \mathfrak{p}$, $r - rp' \notin \mathfrak{p}$ $p' \notin \mathfrak{p}$. Damit erhalten wir $(p' - p'^2) \notin \mathfrak{p}$. Nach der soeben gebrauchten Methode muss hiermit $(p, \mathfrak{p}^2) \subseteqq \mathfrak{p}^2$ und folglich $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ sein.

Für maximale Primideale gilt im Allgemeinen

Satz 5. *Ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal und $\mathfrak{d} = \bigcap \mathfrak{p}^n$, so ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^2$.*

Wenn $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{n+1}$ ist, so wird ersichtlich $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^2$. Es sei nun damit $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$ für alle $n$. Dann ist $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{p}$. Daraus folgt $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}^n$ für alle $n$.

Wäre $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}^{m-1}$, $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p}^m$, so würde $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^{m-1}\mathfrak{b}$ $\mathfrak{b} \not\subseteqq \mathfrak{p}$. Daraus folgte ferner $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}^m\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}^n$, $\mathfrak{b} \not\subseteqq \mathfrak{p}$ $(m < n)$. Durch Addition mit $\mathfrak{p}^{m+1}$ hätten wir daraus $\mathfrak{p}^m(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}) \subseteqq \mathfrak{p}^{m+1}$. Dabei ist aber $(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{p}^m\mathfrak{R} = \mathfrak{p}^m$ ist, so folgte daraus ein Widerspruch $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{m+1}$. Hiermit muss $\mathfrak{a}$ durch alle Potenzen von $\mathfrak{p}$ teilbar sein. Wir haben daher $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}\mathfrak{d}$.

Ist $a \notin \mathfrak{d}$, $b \notin \mathfrak{d}$, so wird $(a) = \mathfrak{p}^m\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p}$, $(b) = \mathfrak{p}^n\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \not\subseteqq \mathfrak{p}$, und daraus $(ab) = \mathfrak{p}^{m+n}\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \not\subseteqq \mathfrak{p}$. Wäre $ab \in \mathfrak{d}$, so würde $(ab) = \mathfrak{d}\mathfrak{c}$ also $\mathfrak{p}^{m+n}\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{d}\mathfrak{c}$. Durch Addition mit $\mathfrak{p}^{m+n+1}$ hätten wir danach $\mathfrak{p}^{m+n}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{m+n}\mathfrak{R} = \mathfrak{p}^{m+n} = \mathfrak{p}^{m+n+1}$. Das widerspricht unserer Annahme, dass für jede $k$ $\mathfrak{p}^k \neq \mathfrak{p}^{k+1}$ ist. Damit ist $\mathfrak{d}$ ein Primideal und folglich $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^2$ nach Satz 4.

Aus Satz I ergibt sich die wichtige Folgerung:

Satz 6. *Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ und $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$, so wird*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{d} + \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{d} \cap \mathfrak{a} = (0), \quad \mathfrak{b}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}.$$

Es sei $a$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}$, so erhalten wir aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ $a = aa'$, wo $a'$ ein Element aus $\mathfrak{a}$ und nicht nilpotent ist. Damit können wir nach Satz 1 ein idempotentes Element $e_1$ in $\mathfrak{a}$ finden. Es sei $\mathfrak{a}_1$ die Gesamtheit aller Elemente $a_1$ derart, dass $a_1 e_1 = a_1$ ist, und $\mathfrak{b}_1$ die Gesamtheit aller Elemente $b_1$ derart, dass $b_1 e_1 = 0$ ist. Dann wird $\mathfrak{R} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{a}_1 = (0)$, $\mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1^2 = \mathfrak{b}_1$. Dabei ist $\mathfrak{a}_1 \subseteqq \mathfrak{a}$ nach $a_1 e_1 = a_1$. Andererseits ist das Produkt von je zwei idempotenten

Idealen auch idempotent. Denn, aus $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}'^2$, $\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}'^2$, $\mathfrak{d}'=\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{b}'$ folgt $\mathfrak{d}'=\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'=\mathfrak{b}'\mathfrak{d}'$, und daraus $\mathfrak{d}'=\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{d}'$. Aus $\mathfrak{d}'=\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{b}'\supseteqq\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ folgt damit $\mathfrak{d}'=\mathfrak{d}'^2$. Setzen wir jetzt $\mathfrak{d}_1'=\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{a}$, so wird danach $\mathfrak{a}=\mathfrak{d}_1'+\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{d}_1'=\mathfrak{d}_1'^2$. Wenn wir mit dieser Schlussweise fortfahren, so kommen wir zum Ergebnis $\mathfrak{a}=(e_1, e_2, \cdots)$, wobei $e_i=e_i^2$, $e_ie_j=0$ $(i\neq j)$ ist. Es seien $\mathfrak{d}_i=(0):(e_i)$ und $\mathfrak{d}=\bigcap_i\mathfrak{d}_i$, so wird $\mathfrak{d}\cap\mathfrak{a}=(0)$ und $\mathfrak{d}+\mathfrak{a}=\mathfrak{R}$.

Aus $\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{c}$. Da aber $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^2$ ist, erhalten wir daraus $\mathfrak{b}\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$.

Aus Sätze 4, 5 und 6 folgt mühelos

Satz 7. *Sind* $\mathfrak{p}_i$ *alle maximalen Primidealteiler eines Ideals* $\mathfrak{a}$, *und ferner* $\mathfrak{d}_i=\bigcap_n\mathfrak{p}_i^n$, $\mathfrak{d}=\bigcap_n\mathfrak{a}^n$, *so ist* $\mathfrak{d}=\bigcap_i\mathfrak{d}_i$.

Zum Beweise sei $\mathfrak{d}_0=\bigcap_i\mathfrak{d}_i$. Dann ist offenbar $\mathfrak{d}\subseteqq\mathfrak{d}_0$, und $\mathfrak{d}_0$ ist durch alle $\mathfrak{p}_i$ teilbar. Nach Sätze 4, 5 und 6 ergibt sich

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{b}_i+\mathfrak{d}_i,\quad \mathfrak{b}_i\cap\mathfrak{d}_i=(0),\quad \mathfrak{b}_i=\mathfrak{b}_i^2,\quad \mathfrak{d}_i=\mathfrak{d}_i^2.$$

Wenn $\mathfrak{d}\subset\mathfrak{d}_0$ ist, so gibt es ein Element $d_0$ derart, dass $d_0\notin\mathfrak{d}$, $d_0\in\mathfrak{d}_0$ ist. Setzen wir nun $\mathfrak{r}=\mathfrak{d}:(d_0)$, so wird $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\cdots)\subseteqq\mathfrak{r}$. Da $(\mathfrak{d}, (d_0))=\mathfrak{R}(\mathfrak{d}, (d_0))$, $d_0\notin\mathfrak{d}$ ist, so soll $\mathfrak{r}\neq\mathfrak{R}$ sein. Damit können wir einen maximalen Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{r}$ finden, und dabei ist $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_i$, $\bigcap_n\mathfrak{p}^n\neq\mathfrak{d}_i$, da $\mathfrak{b}_i\subset\bigcap_n\mathfrak{p}^n$, $\mathfrak{b}_i\not\subseteqq\mathfrak{p}_i$ ist. Ist $(\mathfrak{a},\bigcap\mathfrak{p}^n)=\mathfrak{R}$, so soll $\mathfrak{R}=(\mathfrak{d}, \bigcap\mathfrak{p}^n)$ sein. Das widerspricht mit $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{d}$. Ist $(\mathfrak{a}, \bigcap\mathfrak{p}^n)\subset\mathfrak{R}$, so folgt aus $\mathfrak{R}=\mathfrak{b}+(\bigcap\mathfrak{p}^n)$, $(\bigcap\mathfrak{p}^n)^2=\bigcap\mathfrak{p}^n$ die Beziehung $\mathfrak{p}_i\supseteqq(\mathfrak{a}, \bigcap\mathfrak{p}^n)$, und daher $\mathfrak{d}_i=\bigcap\mathfrak{p}^n$, was aber unmöglich ist. Hiermit soll $\mathfrak{d}=\mathfrak{d}_0$ sein.

Für ein maximales Primideal $\mathfrak{p}_i$ gilt $(\bigcap_n\mathfrak{a}^n, \bigcap_n\mathfrak{p}_i^n)=\mathfrak{R}$, oder $(\bigcap_n\mathfrak{a}^n, \bigcap_n\mathfrak{p}_i^n)=\bigcap_n\mathfrak{p}_j^n$, wo $\mathfrak{p}_j$ einen maximalen Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ bedeutet, je nachdem $(\mathfrak{a}, \bigcap_n\mathfrak{p}_i^n)=\mathfrak{R}$ ist, oder nicht. Hierdurch können wir Satz 7 auch so aussprechen:

Satz 8. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal aus* $\mathfrak{R}$ *und seien* $\mathfrak{p}_i$ *alle maximalen Primideale aus* $\mathfrak{R}$ *von der Art, dass* $(\mathfrak{a}, \bigcap_n\mathfrak{p}_i^n)\neq\mathfrak{R}$ *ist. Dann gilt* $\bigcap_n\mathfrak{a}^n=\bigcap_i(\bigcap_n\mathfrak{p}_i^n)$.

Da nach Sätze 4 und 5 wir $\bigcap_n\mathfrak{p}_i^n$ als ein zum maximalen Primideal $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal betrachten können, ist nach Satz 8 das Nullideal von $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von Primäridealen, welche zu allen maximalen Primidealen gehören, darstellbar. Wir können hiernach Satz 8 in folgende Chevalleysche Form umschreiben.

Satz 9. *Sind* $\mathfrak{q}_i$ *alle zu* (0) *gehörigen Primärkomponenten derart, dass* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_i)\neq\mathfrak{R}$ *ist, so gilt* $\bigcap_n\mathfrak{a}^n=\bigcap_i\mathfrak{q}_i$.

Es seien $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_j$ alle maximalen Primidealteiler eines Ideals $\mathfrak{a}$. Dann ist $\mathfrak{p}_i^{k_i} \supseteqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_i^{k_i+1} \not\supseteqq \mathfrak{a}$, oder $\mathfrak{p}_i^{l} \supseteqq \mathfrak{a}$ für alle $l$. Im letzten Falle ist $\mathfrak{a} \subseteqq \bigcap_n \mathfrak{p}_j^n$ und nach Sätze 4 und 5 ist $\mathfrak{d}_j = \bigcap_n \mathfrak{p}_j^n$ idempotent. Setzen wir jetzt $\mathfrak{d} = (\bigcap_i \mathfrak{p}_i^{k_i}) \cap (\bigcap_j \mathfrak{d}_j)$, so ist danach $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{d}$. Wenn $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{d}$ ist, so setzen wir $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} : \mathfrak{d}$. Dann ist $\mathfrak{r}$ durch ein maximales Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar, da $\mathfrak{d} = \mathfrak{R}\mathfrak{d} \not\subseteqq \mathfrak{a}$ ist. Dabei muss $\mathfrak{p}$ gleich einem aus $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_j$ sein. Da $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}\mathfrak{b}$ ist, so wird $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{r}$ und daher folgt $\mathfrak{r}\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$. Wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ ist, so ergibt sich ein Widerspruch $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}^{k_i+1}$. Wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$ ist, so folgt $\mathfrak{R} = \mathfrak{b}_j + \bigcap_n \mathfrak{p}_j^n$ $\mathfrak{b}_j \not\subseteqq \mathfrak{p}_j$. Andererseits ist aber $\mathfrak{b}_j \subset \mathfrak{r} \subset \mathfrak{p}_j$, da $\mathfrak{b}_j(\bigcap_n \mathfrak{p}_j^n) = \mathfrak{b}_j\mathfrak{d} = (0)$ ist. Hiermit muss $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$ sein.

In $\mathfrak{R}$ lässt sich hiernach jedes Ideal $\mathfrak{b}$ als Durchschnitt von Primäridealen, welche zu allen maximalen Primidealteilern von $\mathfrak{b}$ gehören, darstellen. So kommen wir leicht zu dem folgenden Satze von Zariski:

Satz 10. *Es seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei Ideale aus* $\mathfrak{R}$, *und sei* $\mathfrak{b} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$. *Wenn wir* $\mathfrak{q}_k$ *aus* $\mathfrak{q}_i$ *auswählen, so dass* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_k) \neq \mathfrak{R}$ *ist, so wird*

$$\bigcap_n (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}) = \bigcap_k \mathfrak{q}_k.$$

## § 2. Idempotente Multiplikationsringe ohne Nullteiler

Es sei $\mathfrak{R}$ ein idempotenter Multiplikationsring, der keinen Nullteiler hat. Dann gilt zunächst

Satz 11. $\mathfrak{R}$ *besitzt ein Einheitselement, und es gilt* $\bigcap_n \mathfrak{a}^n = 0$ *für jedes von* $\mathfrak{R}$ *verschiedene Ideal* $\mathfrak{a}$. *Wenn* $\mathfrak{R}$ *kein Körper ist, so hat* $\mathfrak{R}$ *ein Primideal, welches von* $\mathfrak{R}$ *und* $(0)$ *verschieden ist, und jedes Primideal enthält kein von Null verschiedenes Primideal.*

Aus $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$ folgt $r = r'r$, $r' \in \mathfrak{R}$ für ein Element $r$ aus $\mathfrak{R}$. Da in $\mathfrak{R}$ kein Nullteiler existiert, gilt es $x = r'x$ für jedes Element $x$ aus $\mathfrak{R}$. Also ist $r'$ ein Einheitselement von $\mathfrak{R}$. Wäre $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$ für zwei Primideale $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}$, so folgte aus Satz 4 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$, und daher die Existenz eines Nullteilers. Das widerspricht unserer Annahme, dass $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler hat. Daraus folgt $\mathfrak{p} = (0)$.

Da das Radikal von $\mathfrak{R}$ Null ist, gilt es nach Satz 3 $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\mathfrak{d}$ für $\mathfrak{d} = \bigcap_n \mathfrak{a}^n$. Wenn $\mathfrak{d} \neq (0)$ ist, so folgt aus Satz I die Existenz eines idempotenten Elementes in $\mathfrak{a}$. Das ist aber unmöglich, da es keinen Nullteiler in $\mathfrak{R}$ gibt. Damit muss $\mathfrak{d} = (0)$ sein.

Bekanntlich lässt sich die Existenz eines Primideals nach Lemma von Krull leicht beweisen, wenn $\mathfrak{R}$ kein Körper ist.

Aus Satz 11 folgt

Satz 12. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein von Null verschiedenes Ideal, und* $\mathfrak{p}$ *ein Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$. *Wenn alle Elemente von* $\mathfrak{p}$ *nilpotent in bezug auf* $\mathfrak{a}$ *sind, so ist* $\mathfrak{a}$ *gleich einer Potenz von* $\mathfrak{p}$.

Aus $\bigcap\limits_n \mathfrak{p}^n = (0)$ folgt $\mathfrak{p}^k \supseteqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{k+1} \not\supseteqq \mathfrak{a}$ für eine Zahl $k$. Es sei damit $a$ ein Element aus $\mathfrak{a}$ derart, dass $a \notin \mathfrak{p}^{k+1}$ ist. Andererseits gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$. Denn, wäre $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{p}^2$, so würde $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}\mathfrak{c}$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}^2) = \mathfrak{b} = \mathfrak{p}(\mathfrak{c}, \mathfrak{p})$ und daher folgte ein Widerspruch $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}^2$. Wir können damit ein Element $p$ finden, sodass $\mathfrak{p} = (p, \mathfrak{p}^2)$ und folglich $\mathfrak{p} = (p, \mathfrak{p}^n)$ für alle $n$ ist. Nach $a \in \mathfrak{p}^k$, $a \notin \mathfrak{p}^{k+1}$ erhalten wir

$$a = r\,p^k + p_{k+1}, \quad r \notin \mathfrak{p}, \quad p_{k+1} \in \mathfrak{p}^{k+1}.$$

Dabei ist $rr' \equiv e$ $(\mathfrak{p})$ für ein Element $r'$ aus $\mathfrak{R}$. Daher ergibt sich $p^k \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{k+1})$ und daraus folgt $\mathfrak{p}^k \subseteqq (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{k+1})$. Ferner erhalten wir daraus $\mathfrak{p}^k \subseteqq (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{k+l})$ für alle Zahl $l$.

Im Restklassenring $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ gilt es damit $\mathfrak{p}'^k = \mathfrak{p}'^{2k}$, wobei $\mathfrak{p}'$ das zu $\mathfrak{p}$ entsprechende Ideal in $\mathfrak{R}_1$ bedeutet. Für ein Element $p_k'$ aus $\mathfrak{p}'^k$ erhalten wir damit $p_k' = p_k'' p_k'$, $p_k'' \in \mathfrak{p}'^k$. Da aber $p_k''$ nilpotent sein soll, folgt daraus $p_k' = 0$. Danach ist $\mathfrak{p}^k = \mathfrak{a}$.

Nach Satz 12 erhalten wir abschliessend

Satz 13. *Es seien* $\mathfrak{p}_i$ *alle von* $(0)$ *und* $\mathfrak{R}$ *verschiedenen Primideale, und sei* $\mathfrak{d} = \bigcap\limits_i \mathfrak{p}_i$. *Ist* $\mathfrak{d} \neq (0)$, *so ist jedes* $\mathfrak{p}_i$ *ein Hauptideal.*

Setzen wir $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_3 \cap \cdots$, so folgt $\mathfrak{d}_1 \neq (0)$ aus $\mathfrak{d} \neq (0)$. Wäre $\mathfrak{d}_1 \subset \mathfrak{p}_1$, so würde $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}_i$ $(i = 2, 3, \cdots)$. Damit wäre $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{d}_1$, und daraus ergäbe sich ein Widerspruch, dass $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler hat. Damit muss $\mathfrak{d}_1 \not\subseteqq \mathfrak{p}_1$ sein. Danach können wir die Elemente $r_i$ finden, so dass

$$r_i \notin \mathfrak{p}_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots), \quad r_i \in \mathfrak{p}_j \ (j \neq i, \ j = 1, 2, 3, \cdots).$$

Bilden wir mit $r_i$ das Ideal $\mathfrak{a} = (r_2, r_3, \cdots)$, so wird $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p}_i$ $(i = 2, 3, \cdots)$ und $\mathfrak{R} = (r_1, r_2, r_3, \cdots)$, da $(r_1, r_2, r_3, \cdots)$ durch kein Primideal teilbar ist. Ist $e$ das Einheitselement von $\mathfrak{R}$, so folgt daraus

$$e = r_1' r_1 + r_2' r_2 + r_3' r_3 + \cdots, \quad r_i' \notin \mathfrak{p}_i.$$

Setzen wir $p' = e - r_1' r_1$, so wird $p' \in \mathfrak{p}_1$, $p' \notin \mathfrak{p}_j$ $(j = 2, 3, \cdots)$. Es sei nun $\mathfrak{h}$ das zu $(p')$ gehörige Halbprimideal. Dann wird $\mathfrak{p}_1 \supseteqq \mathfrak{h} \supseteqq (p')$. Ist $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{h}$, so wird $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{b}$ und dabei können wir zwei folgende Fälle betrachten.

Im Falle $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}_1$ folgt nach der Eigenschaft von $\mathfrak{h}$ $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}$ und danach muss $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler haben.

Im Falle $\mathfrak{b} \nsubseteqq \mathfrak{p}_1$ betrachten wir $\mathfrak{b}' = \mathfrak{h} : \mathfrak{p}_1$. So ist $\mathfrak{b}' \supseteqq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}' \nsubseteqq \mathfrak{p}_1$. Danach gibt es einen von $\mathfrak{p}_1$ verschiedenen Primidealteiler von $\mathfrak{h}$.

Hiermit sind die beide Fälle unmöglich. Also muss $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h}$ sein. Nach Satz 12 ist damit $(p') = \mathfrak{p}_1{}^k$.

Ist $k \geqq 2$, so setzen wir wieder $p'' = r_1 p_0 + p'$, $\mathfrak{p}_1 = (p_0, \mathfrak{p}_1{}^2)$. Dann aus $r_1 \notin \mathfrak{p}_1$, $r_1 \in \mathfrak{p}_j (j = 2, 3, \cdots)$ folgt $p'' \in \mathfrak{p}_1$, $p'' \notin \mathfrak{p}_1^2$, $p'' \notin \mathfrak{p}_j (j = 2, 3, \ldots)$. Nach der soeben gebrauchten Betrachtung erhalten wir leicht $\mathfrak{p}_1 = (p'')$.

## § 3. Nicht-idempotente Multiplikationsringe

Es sei $\mathfrak{R}$ ein nicht-nilpotenter Multiplikationsring. Für $\mathfrak{R}$ beweisen wir jetzt den fundamentalen Struktursatz:

Satz 14. *Ist* $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}^2$, *und setzen wir* $\mathfrak{d} = \bigcap_n \mathfrak{R}^n$, *so wird* $\mathfrak{d} = (0)$ *und jedes von* $(0)$ *verschiedene Ideal ist gleich einer Potenz von* $\mathfrak{R}$.

Aus $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{R}^2$ folgte ein Widerspruch $\mathfrak{a} = \mathfrak{R}\mathfrak{b} = \mathfrak{R}^2$. Wir haben also $\mathfrak{R} = (r, \mathfrak{R}^2)$. Wäre $\mathfrak{R} \supset (r, r\mathfrak{R})$, so folgte auch ein Widerspruch $(r, r\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{R}^2$. Also ist $\mathfrak{R} = (r, r\mathfrak{R})$. Wenn für eine Zahl $k$ $\mathfrak{R}^k \subset \mathfrak{d}$ ist, so folgt aus $\mathfrak{d} = \bigcap_n \mathfrak{R}^n$.

$$\mathfrak{R}^k = \mathfrak{R}^{2k}, \quad \mathfrak{R}^k = \mathfrak{d}, \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{R}\mathfrak{d}.$$

Es sei $\mathfrak{R}^k \nsubseteqq \mathfrak{d}$ für alle $k$. Dann wird $\mathfrak{d} = \mathfrak{R}\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{d}' \nsupseteqq \mathfrak{R}^{k'}$ für alle $k'$. Wäre $\mathfrak{R}^m \supseteqq \mathfrak{d}'$, $\mathfrak{R}^{m+1} \nsupseteqq \mathfrak{d}'$, so ergäbe sich ein Widerspruch $\mathfrak{d}' = \mathfrak{R}^m \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{R}^{m+1}$. Hiermit ist $\mathfrak{d}' \subseteqq \mathfrak{d}$, also $\mathfrak{d} = \mathfrak{R}\mathfrak{d}$ bewiesen.

Ist $e$ ein idempotentes Element, so sei $\mathfrak{a}$ die Menge aller Elemente $a$ derart, dass $ae = a$ ist, und $\mathfrak{b}$ die Menge aller Elemente $b$ derart, dass $be = 0$ ist. Dann ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a} = (0)$, wo $e$ das Einheitselement von $\mathfrak{a}$ ist. Aus $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\mathfrak{c}$ folgt $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = (0)$ und $\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{b}$. Daraus ergibt sich $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$. Das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}^2$ ist. Hiermit gibt es kein idempotentes Element in $\mathfrak{R}$.

Wenn $\mathfrak{a} \nsubseteqq \mathfrak{d}$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ ist, so wird $\mathfrak{R}^m \supseteqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{R}^{m+1} \nsupseteqq \mathfrak{a}$ für eine Zahl $m$. Wäre $\mathfrak{R}^m \supset \mathfrak{a}$, so folgte nach der multiplikativen Eigenschaft der Widerspruch $\mathfrak{a} = \mathfrak{R}^m \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{R}^{m+1}$. Damit soll $\mathfrak{a} = \mathfrak{R}^m$ sein.

Wenn $\mathfrak{d} \supset \mathfrak{c} \supset \mathfrak{d}^2$ ist, so wird $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}\mathfrak{c}'$ und nach dem obigen gewonnenen Resultat soll $\mathfrak{c}' = \mathfrak{R}^m$ oder $\mathfrak{c}' \subseteqq \mathfrak{d}$ und folglich $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{c} \subseteqq \mathfrak{d}^2$ sein. Das widerspricht unserer Annahme. Damit ist $\mathfrak{d} = (d, \mathfrak{d}^2)$. Wäre $\mathfrak{d} \supset (d)$, so würde $(d) = \mathfrak{d}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{d}$ und daher $(d) \subseteqq \mathfrak{d}^2$, was unmöglich ist. Daraus folgt $\mathfrak{d} = (d)$. Wäre $d$ nicht nilpotent, so folgte aus $\mathfrak{d}=\mathfrak{R}\mathfrak{d}$ die Existenz eines idempotenten Elementes. Das widerspricht dem obig ausgesprochenen Resultate. Damit ist $\mathfrak{d}$ nilpotent.

Ist $d$ von Null verschieden, so folgt aus $\mathfrak{d}=\mathfrak{R}\mathfrak{d}$, dass für ein Element $r'$ $d=r'd$ und folglich $d(r'-r'^2)=0$ ist. Dabei ist $r'\notin\mathfrak{d}$. Denn, sonst würde $d=0$, da jedes Element aus $\mathfrak{d}$ nilpotent ist. Nach den obig ausgesprochenen Ergebnisse erhalten wir damit $(r')=\mathfrak{R}^n$ und aber $r'\notin\mathfrak{R}^{n+1}$. Ferner ist $r'-r'^2\neq 0$, weil es in $\mathfrak{R}$ kein idempotentes Element gibt. Wäre $(r'-r'^2)\in\mathfrak{d}$, so fogte ein Widerspruch $r'\in\mathfrak{R}^{2n}$. Damit muss $(r'-r'^2)=\mathfrak{R}^k$ und folglich $\mathfrak{d}=\mathfrak{R}^k\mathfrak{d}=(r'-r'^2)\mathfrak{d}=(r'-r'^2)(d)=0$ sein. Ferner ist nach dem oben gewonnenen Ergebnis jedes von Null verschiedene Ideal gleich einer Potenz von $\mathfrak{R}$.