J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A
Vol. 24, No. 3, December, 1960

Sur les Familles Triples Infinitésimales Attachées aux Familles Triples de Lie

Takayuki Nôno

(Reçu le 20 septembre 1960)

Récemment M^{lle} P. Libermann a développé une théorie des pseudogroupes infinitésimaux dans les travaux [**1**] et [**2**].(1) Cet exposé contient une généralisation d'une partie des résultats concernant les pseudogroupes infinitésimaux attachés aux pseudogroupes de Lie. On définira dans le paragraphe 1 《famille triple》 et 《famille triple infinitésimale》 respectivement en généralisant 《pseudogroupe》 et 《pseudogroupe infinitésimal》. On démontrera dans les paragraphes **2** et **3** un théorème concernant les familles triples infinitésimales attachées aux familles triples de Lie; de plus, dans le paragraphe **4** on abordera la question des familles triples infinitésimales attachées à des prolongements de familles triples de Lie.

Pour términer, à M. le professeur K. Morinaga, j'exprime la plus grande gratitude, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour ses excellents conseils.

1. Définitions et notations. — Soit V_n une variété différentiable de classe C^∞, de dimension n. Pour toute application f de U sur $f(U)$, U et $f(U)$ seront dits source et but de f respectivement.

Définition 1. — $\mathscr{O}$ étant l'ensemble des ouverts d'une topologie $\mathscr{T}$ sur V_n, une famille triple de transformations Φ opérant sur une variété V_n est un ensemble de transformations vérifiant les axisomes suivants:

1^0 tout $f \in \Phi$ est une application différentiable et biunivoque dont la source et le but appartiennent à $\mathscr{O}$;

2^0 si $U=\bigcup_i U_i$, pour qu'une application biunivoque f, de source U, de but $f(U) \subset V_n$ appartienne à Φ, il faut et il suffit que sa restriction à chaque U_i appartienne à Φ;

3^0 si $f \in \Phi$, alors $f^{-1} \in \Phi$; si $f, g \in \Phi$, alors l'application composée $f^{-1} \circ g \circ f^{-1} \in \Phi$.

4^0 l'application identique de V_n appartient à Φ.

Défieition 2. — Soit $J^q(\Phi)$ l'ensemble des q-jets infinitésimaux $j^q f$, définis par tous les $f \in \Phi$. Une famille triple Φ sur une variété sera dite complet d'ordre q, si Φ est l'ensemble des solutions de $J^q(\Phi)$ (il est alors complet pour $s>q$).

(1) Les numéros entre crochet renvoient à le bibliographie située à la fin de cet article.

Une famille triple de Lie est une famille triple opérant sur une variété V_n et vérifiant les conditions:

1^0 Φ est complet d'ordre q;

2^0 pour $s=0, 1, \cdots, q$, $J^s(\Phi)$ est une sous-variété analytique de $J^s(V_n, V_n)$ (ensemble de tous les s-jets de V_n dans V_n).

On désignera par transformation infinitésimale locale (t. i. l.), de source U, un champ de vecteurs X défini dans un ouvert $U \subset V_n$, c'est-à-dire un relèvement continu X de U dans $T(V_n)$, espaces des vecteurs tangents à V_n. On ne considérera que des t. i. l. de classe C^∞. Le jet local $j_x^\lambda X$ est la classe des champs de vecteurs coïncidants avec X dans un voisinage ouvert de x. Le jet local $j_x^\lambda X$ sera aussi appelé germe de t. i. l. X. La t. i. l. X définit un noyau de groupe de transformations $f_t = \exp tX$ à un paramètre, d'où un germe de trajectoire.

DÉFINITION 3. — $\mathscr{O}$ étant l'ensemble des ouverts d'une topologie $\mathscr{T}$ sur V_n, on désignera par famille triple infinitésimale sur V_n, de topologie sous-jacente $\mathscr{T}$, un ensemble F de t. i. l. vérifiant les axiomes suivants:

1^0 tout $X \in F$ a pour source $U \in \mathscr{O}$;

2^0 si $U = \bigcup_i U_i$, pour que la t. i. l. X, de source U, appartienne à F, il faut et il suffit que sa restriction à chaque U_i appartienne à F;

3^0 si X, Y et Z, de source U, V et W appartiennent à F, alors le produit triple de Lie $[X, [Y, Z]]$ est défini dans $U \cap V \cap W$ (qui peut être éventuellement vide) et appartiennent à F, la t. i. l. $\lambda X + \mu Y$ (quelles que soient les constantes réelles λ et μ) est défini dans $U \cap V$ (qui peut être éventuellement vide) et appartiennent à F.

Soit $J^\lambda(F)$ l'ensemble des germes $j_x^\lambda X$ détérminés par tous les $X \in F$ et $x \in V_n$. Des axiomes précédents, il résulte alors que l'ensemble $J_x^\lambda(F)$ des germes de source x est un système triple de Lie, et $J^\lambda(F)$ est un faisceau de système triples de Lie.

2. Transformations infinitésimales locales. — Toute t. i. l. X de source U définit sur U un noyau de groupe de transformations $f_t = \exp tX$ à un paramètre. Le noyau de groupe de transformations f_t se prolonge sur $J^s(V_n, V_n)$, variété des s-jets de V_n dans V_n, en un noyau de transformations φ_t:

$$(1) \qquad a^s \to j^s_{g(x)} f_t^{-1} \circ a^s \circ (j_x^s f_t)^{-1} \ (= j^s_{f_t(x)}(f_t^{-1} \circ g \circ f_t^{-1})),$$

où $a^s = j_x^s g \in J^s(V_n, V_n)$, x, $g(x) \in U$; en effet il résulte de (1) que $\varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1} = \varphi_{t_1+t_2}$. Pour toute t. i. l. X, il existe donc une t. i. l. A_X sur $J^s(V_n, V_n)$ telle que

$$(2) \qquad \varphi_t(a^s) = \exp tA_X a^s.$$

On a alors

$$(3) \qquad A_X(a^s) = \lim_{t \to o} \frac{1}{t} (\varphi_t(a^s) - a^s).$$

On désignera par ψ_f la correspondance

(4) $$\psi_f;\ a_s \to j^s_{g(x)} f^{-1} \circ a^s \circ (j^s_x f)^{-1},$$

où f est une transformation sur U et $a^s = j^s_x g \in J^s(V_n, V_n)$ $(x, g(x) \in U)$. Alors on a évidement, en vertu de (2),

(5) $$\psi_{\exp tX} = \exp tA_X;$$

d'où il résulte que

(6) $$A_{\lambda X} = \lambda A_X, \quad \lambda: \text{réel}.$$

On peut voir aisément de (4) que

(7) $$\psi_{f_1} \circ \psi_{f_2} \circ \psi_{f_1} = \psi_{f_1 \circ f_2 \circ f_1}.$$

En posant dans (7)

(8) $$f_1 = \exp tX, \quad f_2 = \exp tY,$$

d'après (5) on a alors

(9) $$\psi_{\exp tX \exp tY \exp tX} = \exp tA_X \exp tA_Y \exp tA_X.$$

En outre, on peut vérifier par la formule de Hausdorff que, si $|t|$ est assez petit,

(10) $$\exp tX \exp tY \exp tX = \exp\left(t(2X+Y) + \frac{1}{6} t^3([[X, Y], Y] - [X, [X, Y]]) + O(t^4)\right).$$

D'après (10), il s'ensuit de (9) que

(11) $$\exp A_{(t(2X+Y)+1/6t^3([[X,Y],Y]-[X,[X,Y]])+O(t^4))} = \exp\left(t(2A_X + A_Y) + \frac{1}{6} t^3([[A_X, A_Y], A_Y] - [A_X, [A_X, A_Y]]) + O(t^4)\right).$$

En tenant compte de (6), on voit de (11) que

(12) $$A_{2X+Y} = 2A_X + A_Y;$$

d'après (6) et (12) on a donc, quelles que soit les constantes réelles λ et μ,

(13) $$A_{\lambda X + \mu Y} = \lambda A_X + \mu A_Y.$$

En utilisant (6), on déduit de la formule (11) que

(14) $$A_{[[X,Y],Y]} - A_{[X,[X,Y]]} = [[A_X, A_Y], A_Y] - [A_X, [A_X, A_Y]].$$

En posant $-Y$ en place de Y dans (14), on a

(14′) $$A_{[[X,Y],Y]} + A_{[X,[X,Y]]} = [[A_X, A_Y], A_Y] + [A_X, [A_X, A_Y]];$$

il s'ensuit de (14) et (14′) que

$$A_{[[X,Y],Y]}=[[A_X, A_Y], A_Y]. \tag{15}$$

De plus on obtient aisément de (15), par polarization (cf. [3], 39-40), que

$$A_{[X,[Y,Z]]}=[A_X, [A_Y, A_Z]] \tag{16}$$

pour les t. i. l. X, Y et Z de source U, V et W respectivement.

Ainsi on conclut que la correspondance: $X\rightarrow A_X$ *a les propriétés suivantes*:

$$A_{\lambda X+\mu Y}=\lambda A_X+\mu A_Y, \tag{13}$$

$$A_{[X,[Y,Z]]}=[A_X, [A_Y, A_Z]]. \tag{16}$$

3. Familles triples infinitésimales attchées aux familles triples de Lie. — Soit Φ une famille triple de transformations opérant sur V_n. On désignera par famille triple infinitésimale attachée à Φ et l'on notera $\mathscr{A}(\Phi)$ la plus grande famille triple infinitésimale dont les t. i. l. X engendrent des noyaux de groupe de transformations $f_t=\exp tX\in\Phi$. (On prendra Φ et $\mathscr{A}(\Phi)$ la même topologie sous-jacente).

Supposons que Φ soit une famille triple de Lie d'ordre q; soit F l'ensemble des t. i. l. X définissant des noyaux de groupe de transformations $f_t=\exp tX\in\Phi$. Pour que $X\in F$, il faut et il suffit que $j_x^q f_t\in J^q(\Phi)$, ce qui est équivalent à:

$$\varphi_t(J^q(\Phi))\subset J^q(\Phi),$$

c'est-à-dire que la transformation $\varphi_t=\exp tA_X$ laisse invariant $J^q(\Phi)$. Cette condition est équivalente à ce que la t. i. l. A_X laisse invariant $J^q(\Phi)$; autrement dit, la restriction de A_X à $J^q(\Phi)$ est un champ de vecteurs tangents à $J^q(\Phi)$. Comme $J^q(\Phi)$ est une sous-variété de $J^q(V_n, V_n)$, on en déduit que si X, Y, $Z\in F$, les restrictions des A_X, A_Y et A_Z à $J^q(\Phi)$ étant des champs de vecters tangents à $J^q(\Phi)$, les restrictions des $\lambda A_X+\mu A_Y$ (λ, μ: réels) et $[A_X, [A_Y, A_Z]]$ à $J^q(\Phi)$ sont des champs de vecteurs tangents à $J^q(\Phi)$. En outre, d'après (13) et (16) dans le paragraphe 2 on sait que

$$\lambda A_X+\mu A_Y=A_{\lambda X+\mu Y} \quad \text{et} \quad [A_X, [A_Y, A_Z]]=A_{[X, [Y, Z]]}.$$

Donc on en déduit que $\lambda X+\mu Y\in F$ et $[X, [Y, Z]]\in F$. Ainsi on conclut que F est une famille triple infinitésimale, par suite, en vertu de la définition précédente, $F=\mathscr{A}(\Phi)$.

De l'étude précédente resulte

THÉORÈME 1. — *Si Φ est une famille triple de Lie, soit F l'ensemble des t. i. l. X définissant des noyaux de groupe de transformations $f_t=\exp tX\in\Phi$. Alors F est la famille triple infinitésimale attachée à Φ.*

4. Prolongements d'une famille triple de Lie. — Une famille triple de

Lie $\tilde{\Phi}$ opérant sur une variété V_{n+m} sera dite prolongement d'une famille triple de Lie Φ opérant sur V_n, s'il existe une projection p de V_{n+m} sur V_n, partout de rang n, telle que, pour toute $f \in \Phi$, il existe au moins une application $\tilde{f} \in \tilde{\Phi}$ telle que $f\,p = p\,\tilde{f}$. On désignera par famille triple $\tilde{\Phi}' \subset \tilde{\Phi}$ associé au prolongement l'ensemble des $\tilde{f}' \in \tilde{\Phi}$ se projetant suivant l'application identique d'un ouvert de V_n.

Soient $\tilde{F}$, $\tilde{F}'$et F respectivement les familles triples infinitésimaux attachées à $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Phi}'$ et Φ. Alors on peut démontrer que toute t. i. l. $X \in F$ se projette suivant une t. i. l. $X \in F$, en considérant les noyaux de groupe définis par $\tilde{X}$ et X; de plus on peut vérifier aisément, par la même methode comme dans le paragraphe **2**, que cette projection est linéaire et compatible avec le produit triple de Lie $[X, [Y, Z]]$. Donc on en déduit que, pour tout $\tilde{x} \in V_{n+m}$, un homomorphisme du système triple de Lie $J^{\lambda}_{\tilde{x}}(\tilde{F})$ sur $J^{\lambda}_{p(\tilde{x})}(F)$ dont le noyau est $J^{\lambda}_{\tilde{x}}(\tilde{F}')$. Si le prolongement est holoédrique, c'est-à-dire si à toute $f \in \Phi$ correspond une seule $\tilde{f} \in \tilde{\Phi}$, alors à toute $X \in F$ correspond une seule $\tilde{X} \in \tilde{F}$; il en résulte un isomorphisme de $J^{\lambda}_{\tilde{x}}(\tilde{F})$ sur $J^{\lambda}_{p(\tilde{x})}(F)$.

En outre, soit A un système triple de Lie, on dira que un sous-ensemble B est idéal de A, si B est un sous-espace linéaire de A tel que $[X, [Y, Z]] \in B$ pour tout X, $Y \in A$, $Z \in B$.

Ainsi on en déduit le théorème suivant:

THÉORÈME 2. — *Soit $\tilde{\Phi}$ (resp. Φ) une famille triple de Lie opérant sur une variété V_{n+m} (resp. V_n) et soit $\tilde{F}$ (resp. F) sa famille triple infinitésimale attachée, si $\tilde{\Phi}$ est le prolongement de Φ par une projection p de V_{n+m} sur V_n, il existe, pour tout $\tilde{x} \in V_{n+m}$, un homomorphisme du système triple de Lie $J^{\lambda}_{\tilde{x}}(\tilde{F})$ sur $J^{\lambda}_{p(\tilde{x})}(F)$ dont le noyau est $J^{\lambda}_{\tilde{x}}(\tilde{F}')$, étant un idéal de $J^{\lambda}_{\tilde{x}}(\tilde{F})$, ou $\tilde{F}'$ est la famille triple infinitésimale attachée à la famille triple associée au prolongement. Si le prolongement est holoédrique, alors pour tout $\tilde{x} \in V_{n+m}$, le système triple de Lie $J^{\lambda}_{\tilde{x}}(F)$ est isomorphe à $J^{\lambda}_{p(\tilde{x})}(F)$.*

Plus généralement, supposons que sur une variété V_p il existe un feuilletage invariant par une famille triple de Lie Θ; autrement dit, toute $f \in \Theta$ est compatible avec la relation d'équivalence définie par le feuilletage: pour toute $f \in \Theta$, si $x \rho y$, alors $f(x) \rho f(y)$. Mais on ne suppose plus que l'espace quotient V_p/ρ soit une variété. On désignera par Θ' l'ensemble de transformations $f' \in \Theta$ telles que $x \rho f'(x)$ pour tout $x \in V_p$. Θ' est alors une sous-famille triple de Θ; en effet, si f', $g' \in \Theta'$, alors

$$f' \circ g'^{-1} \circ f'(x) \ \rho \ g'^{-1} \circ f'(x) \ \rho \ f'(x) \ \rho \ x,$$

d'ou $f' \circ g'^{-1} \circ f'(x) \ \rho \ x$ pour tout x, on a donc $f' \circ g'^{-1} \circ f' \in \Theta'$. Ainsi on peut dire que Θ' est la plus grande sous-famille triple de Θ telle que, pour tout x, $\Theta'(x)$ $(=\{f'(x); f' \in \Theta'\})$ est contenu dans la feuille contenant x. Θ' sera dite famille triple associée à un feuilletage invariant par Θ.

Soit E la famille triple infinitésimale attachée à Θ, en vertu du théorème 1,

E est l'ensemble de t. i. l. X telle que $f_t=\exp tX \in \theta$. Soit E' l'ensemble de t. i. l. X' telle que $f_t=\exp tX' \in \theta'$, alors il est évident que $E' \subset E$. Tout $X' \in E'$ est un champ de vecteurs tangents aux feuilles; tout $Y \in E$ définit un noyau de groupe de transformations $f_t=\exp tY$ telles que chacune transforme un vecteur tangent à une feuille en un vecteur tangent à une feuille; il en résulte que la dérivée de Lie $\theta(Y)X'=[Y, X']$ est un champ de vecteurs tangents aux feuilles, et par suite, pour $Z \in E$, $\theta(Z)\theta(Y)X'=[Z, [Y, X']]$ est aussi un champ de vecteurs tangents aux feuilles. Il est clair, de même, que pour X', $Y' \in E'$, $\lambda X'+\mu Y'$ (λ, μ: réels) est encore aussi un champ de vecteurs tangents aux feuilles. Comme X', Y', Y, $Z \in E$, on a $\lambda X'+\mu Y'$, $[Z, [Y, X']] \in E$. Donc, par la définition de θ', on voit que $\exp t(\lambda X'+\mu Y')$, $\exp t[Z, [Y, X']] \in \theta'$; de plus, en vertu de la définition de E', on a $\lambda X'+\mu Y'$, $[Z, [Y, X']] \in E'$. Ainsi, E' est la famille triple infinitésimale attachée à θ'; de plus, $J^\lambda_x(E')$ est un idéal de $J^\lambda_x(E')$.

Soit Φ une famille triple de Lie opérant sur une variété V_n. On dira que une sous-famille triple Φ' de Φ est sous-famille triple invariante de Φ, s'il existe un prolongement holoédrique $\tilde{\Phi}$ de Φ tel que le prolongement de Φ' soit la famille triple associée à un feuilletage invariant par $\tilde{\Phi}$.

Compte tenu du théorème 2, de la considération précédente on peut obtenir le théorème suivant:

THÉORÈME 3. — *Si Φ' est une sous-famille triple invariante d'une famille triple de Lie Φ opérant sur V_n, alors, en tout $x \in V_n$, le système triple de Lie $J^\lambda_x(F')$ est un idéal de $J^\lambda_x(F')$, où F et F' sont les familles triples infinitésimales attachées à Φ et Φ' respectivement.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Libermann, *Pseudogroupes infinirésimaux*···, C. R. Acad. Sc. Paris, **246** (1958), 41-43, 531-534 et 1365-1368.

[2] ——————, *Pseudogroupes infinitésimaux attachés aux pseudogroupes de Lie*, Bull. Soc. math. France, **87** (1959), 409-425.

[3] G. D. Mostow, *Some new decomposition theorems for semi-simple Lie groups*, Memoirs of A. M. S., **14** (1955), 31-54.

Institut de Mathématiques
Université de Hiroshima