HIROSHIMA MATH. J.
**5** (1975), 293-350

# *Sur le Principe Relatif de Domination pour les Noyaux de Convolution*

Masayuki ITÔ

(Received January 20, 1975)

## §0. Introduction et préliminaires

Dans toute la suite $X$ désignera un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini; $\xi$ sera sa mesure de Haar.

On notera

$L_{loc}$ l'espace vectoriel topologique usual des fonctions localement sommables dans $X$ à valeurs réelles;

$L_p(p\geqq 1)$ l'espace de Banach usuel des fonctions réelles et mesurables $f$ dans $X$ avec $\int|f|^p d\xi<+\infty$;

$M_K$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions mesurables et bornées dans $X$ à valeurs réelles et à support compact;

$C_K$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans $X$ à support compact.

$L_{loc}^+,\cdots, C_K^+$ sont respectivement leur sous-ensembles des fonctions non-négatives.

Dans la théorie du potentiel, un noyau de convolution $N$ sur $X$ peut être considéré comme une mesure (de Radon) positive dans $X$, et pour une mesure réelle $\mu$ dans $X$, le $N$-potentiel de $\mu$ peut être considéré comme la convolution $N*\mu$ dès qu'elle est définie au sens des mesures.

Le noyau de convolution symétrisant avec $N$ par rapport à l'origine s'écrit $\check{N}$ et s'appelle le noyau adjoint de $N$. Si $N=\check{N}$, alors $N$ est dit *symétrique*. On dit que $N$ est *borné* (resp. *s'annule à l'infini*) si, quelle que soit $f$ de $C_K$, la fonction $N*f$ est bornée sur $X$ (resp. $N*f(x)$ tend vers 0 avec $x\to\infty$).

Soient $N$ un noyau de convolution sur $X$ et $\mu$ une mesure réelle dans $X$. Si $N*\mu$ a un sens et s'il est absolument continu par rapport à $\xi$, sa densité s'écrit $N\mu$. Pour une fonction $f$ de $L_{loc}$, on écrit $Nf$ au lieu de $N(f\xi)$ lorsqu'il a un sens. Il est évident que, pour toute $f$ de $M_K$, $Nf$ est définie et localement bornée sur $X$.

Soient $N_1$ et $N_2$ deux noyaux de convolution sur $X$. On dit que $N_1$ satisfait au *principe de domination relatif* à $N_2$ (resp. au *principe complet du maximum relatif* à $N_2$) si, quelles que soient $f$ et $g$ de $M_K^+$, $N_1f\leqq N_2g$ (resp. $N_1f\leqq N_2g+1$) presque partout pour $\xi$ (noté désormais $\xi$-$p.p.$) sur $X$ dés que la même inégalité a lieu $\xi$-*p.p.* sur $K_f=\{x\in X; f(x)\neq 0\}$. Dans ce cas, on écrit $N_1\prec N_2$ (resp. $N_1\lll N_2$). Si $N\prec N$ (resp. $N\lll N$), alors on dit que $N$ satisfait au *principe de domination* (resp. au *principe complet du maximum*).

Dans l'article précédent [3], nous avons montré l'énoncé suivant;

Soient $N_1\neq 0$ et $N_2$ deux noyaux de convolution sur $X$. Si $N_1\prec N_2$ et $N_1$ est borné et satisfait au principe de domination, alors $N_1$ satisfait au *principe du balayage relatif* à $N_2$; c'est-à-dire, pour une mesure positive $\mu$ dans $X$ à support compact et pour un ouvert relativement compact $\omega$ de $X$, il existe une mesure positive $\mu'$ dans $X$ portée par $\bar{\omega}$ telle que l'on ait:

(a) $N_1*\mu'\leqq N_2*\mu$ *au sens des mesures dans* $X$.

(b) $N_1*\mu'=N_2*\mu$ *au sens des mesures dans* $\omega$.

(c) *Quelle que soit* $\nu$ *une mesure positive dans* $X$ *portée par* $\bar{\omega}$, $N_1*\mu'\leqq N_1*\nu$ *dans* $X$ *dès que* $N_2*\mu\leqq N_1*\nu$ (*au sens des mesures*) *dans* $\omega$.

Dans ce cas, $N_1*\mu'$ est uniquement déterminé et s'appelle le $N_1$-*potentiel balayé* de $N_2*\mu$ sur $\omega$ relativement à $(N_1, N_2)$. On dit que $\mu'$ est une *mesure balayée* de $\mu$ sur $\omega$ relativement à $(N_1, N_2)$. Si un noyau de convolution $N$ sur $X$ satisfait au principe du balayage relatif à lui-même, alors on dit simplement que $N$ satisfait au *principe du balayage* et que la mesure positive $\mu'$ obtenue ci-dessus pour $N=N_1=N_2$ est une mesure balayée de $\mu$ sur $\omega$ relativement au noyau $N$.

On remarque que $N$ est borné et satisfait au principe de domination si et seulement si $N$ satisfait au principe complet du maximum (cf. [5]). Donc, pour discuter le principe relatif du balayage, la condition que $N_1$ est borné n'est pas naturelle.

Dans cette note on montrera d'abord le présent énoncé sans la condition que $N_1$ est borné et on discutera son inverse. En l'appliquant, on obtiendra l'équivalence suivante:

Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au principe de domination. Alors les quatre énoncés suivants sont équivalents:

(1) $N$ satisfait au principe complet du maximum.

(2) Il existe un noyau de convolution symétrique $N'\neq 0$ sur $X$ tel que $N\prec N'$.

(3) Il existe un noyau de convolution $N'$ sur $X$ et une fonction $f$ de $L_{loc}^{+}$ tels que $N\prec N'$, $N'f\in L_{loc}^{+}$ et $\operatorname{ess.inf}_{x\in X} N'f(x)>0$.

(4) Il existe un noyau de convolution $N'\neq 0$ sur $X$ et une fonction $f\neq 0$ de $L_{loc}^{+}$ tels que $N'f$ ait un sens et $\operatorname{ess.sup}_{x\in X} N'f(x)<+\infty$.

Nous connaissons bien que, pour un noyau de convolution $N$ sur $X$, le principe de domination pour $N$ n'implique pas toujours l'existence de la *résolvante* associée au noyau $N$. Le troisième but de cette note est de fournir une condition au moyen du principe relatif de domination pour qu'il existe la résolvante associée au noyau $N$.

Soit $N'$ un noyau de convolution. Le paragraphe 4 sera consacré à l'étude de la totalité des *noyaux de convolution de Hunt* $N$ vérifiant $N \prec N'$. Comme son application on discutera des caractérisations d'un noyau de convolution de Hunt.

Finalement on généralisera le théorème principal dans [3]. Cela apportera une notion de la *division* entre deux noyaux de convolution.

## § 1. Le principe relatif de domination et le principe relatif du balayage

L'équivalence suivante est connue pour un noyau d'un cadre plus large (cf. le théorème 1 et le lemme 4 dans [4]).

PROPOSITION 1.1. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *$N$ satisfait au principe de domination.*

(2) *$\check{N}$ satisfait au principe de domination.*

(3) *Quel que soit $c$ une constante $>0$, $N+c\varepsilon$ satisfait au principe de domination.*

On note $\varepsilon$ la mesure de Dirac à l'origine. On connaît aussi la proposition suivante (cf. le théorème 1 dans [5]).

PROPOSITION 1.2. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *$N$ satisfait au principe de domination (resp. au principe complet du maximum).*

(2) *Pour deux fonctions $f$, $g$ de $C_K^+$ quelconques, $N*f \leqq N*g$ (resp. $N*f \leqq N*g+1$) partout sur $X$ dès que la même inégalité a lieu sur le support de $f$,* $\operatorname{supp}(f)$.

On note $\mathscr{D}(X)$ l'ensemble formé par tous les noyaux de convolution sur $X$ satisfaisant au principe de domination. D'après les présents deux propositions, on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 1.3. *$\mathscr{D}(X)$ est vaguement fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit $N \in$ l'adhérent vague de $\mathscr{D}(X)$. Pour $N \in \mathscr{D}(X)$, il suffit de montrer, d'après les présents propositions, que, quelles que soient $c$ une constante $>0$ et $f$, $g \in C_K^+$,

$$N*f+cf \leqq N*g+cg \ \textit{sur} \ \operatorname{supp}(f) \Rightarrow N*f+cf \leqq N*g+cg \ \textit{sur} \ X.$$

Pour un entier $n>0$ quelconque, on pose $f_n=((n-1)/n)(f-\inf(f, 1/n))$. Alors $(N+c\varepsilon)*f_n(x)<(N+c\varepsilon)*g(x)$ sur $\operatorname{supp}(f_n)$. Soient $\delta$ un nombre tel que

$$0<\delta<\min_{x \in \operatorname{supp}(f_n)} ((N+c\varepsilon)*g(x)-(N+c\varepsilon)*f_n(x))$$

et $\omega$ un ouvert relativement compact de $X \supset \mathrm{supp}(f_n) \cup \mathrm{supp}(g)$. On peut choisir un noyau de convolution $N_{\delta,\omega}$ appartenant à $\mathscr{D}(X)$ tel que

$$\sup_{x \in \omega} |N*f_n(x) - N_{\delta,\omega}*f_n(x)| < \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \omega} |N*g(x) - N_{\delta,\omega}*g(x)| < \frac{\delta}{2},$$

car la convergence vague d'un famille $(N_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de noyaux de convolution entraîne la convergence compacte de $(N_\alpha * \varphi)_{\alpha \in \Lambda}$ pour toute $\varphi$ de $C_K$. Comme $N_{\delta,\omega}*f_n + cf_n < N_{\delta,\omega}*f + cg$ sur $\mathrm{supp}(f_n)$, on a $N_{\delta,\omega}*f_n + cf_n \leqq N_{\delta,\omega}*g + cg$ sur $X$ à cause du principe de domination pour $N_{\delta,\omega} + c\varepsilon$. Par conséquent

$$N*f_n + cf_n \leqq N*g + cg + \delta \qquad \text{dans} \quad \omega.$$

En faisant $\delta \downarrow 0$ et $\omega \uparrow X$, on obtient que $N*f_n + cf_n \leqq N*g + cg$ sur $X$. En faisant ensuite $n \uparrow +\infty$, on arrive à l'implication demandée.

Pour montrer le premier théorème, on préparera les six lemmes suivants.

LEMME 1.1. *Soient $N \neq 0$ un noyau de convolution sur $X$ et $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille de mesures positives dans $X$. Si $(N*\mu_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est vaguement borné, alors $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. Soit $K$ un compact de $X$ quelconque. Comme $N \neq 0$, il existe une fonction $f$ de $C_K^+$ telle que $\check{N}*f(x) \geqq 1$ sur $K$. Alors, pour tout $\alpha \in \Lambda$, on a

$$\mu_\alpha(K) \leqq \int \check{N}*f(x) d\mu_\alpha(x) = \int f(x) dN*\mu_\alpha(x) \leqq \sup_\alpha \int f(x) dN*\mu_\alpha(x) < +\infty,$$

d'où notre lemme.

LEMME 1.2. *Soient $N_1$, $N_2$ deux noyaux de convolution sur $X$ et supposons que $N_1 \prec N_2$. Si, pour deux mesures positives $\mu$, $\nu$ dans $X$ à support compact, $N_1*\mu \leqq N_2*\nu$ dans un certain voisinage ouvert $\omega$ du support de $\mu$,* $\mathrm{supp}(\mu)$, *alors $N_1*\mu \leqq N_2*\nu$ dans $X$.*

DÉMONSTRATION. Soit $U$ un voisinage ouvert de l'origine tel que $U - U = \{x - y; x, y \in U\} \subset \omega - \mathrm{supp}(\mu)$. Pour toute $f$ de $C_K^+$ avec $\mathrm{supp}(f) \subset U$ et pour tout $x$ de $\mathrm{supp}(\mu*f) = \mathrm{supp}(\mu) + \mathrm{supp}(f)$, on a

$$N_2*(\nu*f)(x) - N_1*(\mu*f)(x) = \int f(x-y) d(N_2*\nu - N_1*\mu)(y) \geqq 0,$$

car $\{y; f(x-y) > 0\} \subset \{x\} - U \subset \mathrm{supp}(\mu) + \mathrm{supp}(f) - U \subset \omega$. Comme $N_1 \prec N_2$, on a $N_1*(\mu*f) \leqq N_2*(\nu*f)$ sur $X$. En faisant $f\xi \to \varepsilon$ (vaguement), on a $N_1*\mu \leqq N_2*\nu$ dans $X$, d'où le lemme 1.2.

LEMME 1.3. *Soient $N$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au prin-*

*cipe de domination et c une constante*$>0$. *Si, pour deux fonctions f et g de* $M_K^+$, $Nf+cf\leqq Ng+cg$ $\xi-p.p.$ *sur* $K_f$, *alors* $Nf\leqq Ng$ $\xi-p.p.$ *sur* $X$.

DÉMONSTRATION. D'après (3) de la proposition 1.1, on a $Nf+cf\leqq Ng+cg$ $\xi-p.p.$ sur $X$. D'abord on suppose que $\xi(K_f\cap K_g)=0$. Alors $Nf\leqq Ng$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$, et donc sur $X$ à cause du principe de domination pour $N$. Dans le cas général, on a $N(f-g)^+ + c(f-g)^+ \leqq N(f-g)^- + C(f-g)^-$ $\xi-p.p.$ sur $K_{(f-g)^+}$, car $K_f\supset K_{(f-g)^+}$. Parce que $\xi(K_{(f-g)^+}\cap K_{(f-g)^-})=0$, on a $N(f-g)^+ \leqq N(f-g)^-$ $\xi-p.p.$ sur $X$. Ceci donne $Nf\leqq Ng$ $\xi-p.p.$ sur $X$.

COROLLAIRE. *Soient N et c comme ci-dessus. Si* $Nf+cf=Ng+cg$ $\xi-p.p.$ *sur* $K_f\cup K_g$ *pour f et g de* $M_K^+$, *alors* $f=g$ $\xi-p.p.$.

En effet, on a d'abord $Nf=Ng$ $\xi-p.p.$ sur $X$ d'après le lemme 1.3. Par conséquent $f=g$ $\xi-p.p.$ sur $K_f\cup K_g$, et donc sur $X$.

LEMME 1.4. *Soit N un noyau de convolution sur X. Alors, pour toute la fonction f de* $L_2$ *à support compact, Nf a un sens et elle est localement carré sommable. Pour un compact quelconque K de X, il existe une constante* $A(K)$ $>0$ *telle que, quelle que soit f de* $L_2$ *portée par K,*

$$\int_K |Nf|^2 d\xi \leqq A(K)\int |f|^2 d\xi. \tag{1}$$

DÉMONSTRATION. Comme $|Nf|\leqq Nf^+ + Nf^-$, on peut supposer $f\geqq 0$. Prenons un ensemble ouvert relativement compact $\omega$ contenant $K$. D'abord nous allons montrer l'existence d'une constante $A(\omega)>0$ telle que

$$\int_{\bar\omega} |Nf|^2 d\xi \leqq A(\omega)\int |f|^2 d\xi \tag{2}$$

pour toute $f$ appartenant à $C^+(\omega)=\{f\in C_K^+;\ \mathrm{supp}(f)\subset\bar\omega\}$. Désignons par $N_{(\bar\omega-\bar\omega)}$ la restreinte de $N$ à $\bar\omega-\bar\omega$. Pour $x\in\bar\omega$ et pour $f\in C^+(\omega)$, on a

$$N*f(x) = N*(f*\check\varepsilon_x)(0) = \int f*\check\varepsilon_x d\check N = \int f*\check\varepsilon_x dN_{(\bar\omega-\bar\omega)}$$
$$= N_{(\bar\omega-\bar\omega)}*f*\check\varepsilon_x(0) = N_{(\bar\omega-\bar\omega)}*f(x),$$

où $\varepsilon_x$ est la mesure d'unité au point $x$, car $\bar\omega-\bar\omega$ est symétrique par rapport à l'origine et $\mathrm{supp}(f*\check\varepsilon_x)=\mathrm{supp}(f)+\{-x\}\subset\bar\omega-\bar\omega$. Par conséquent,

$$\int_{\bar\omega} (Nf)^2 d\xi \leqq \int (N_{(\bar\omega-\bar\omega)}*f)^2 d\xi.$$

Comme $\bar\omega-\bar\omega$ est compact, $\int dN_{(\bar\omega-\bar\omega)}<+\infty$. Posons $A(\omega)=\left(\int dN_{(\bar\omega-\bar\omega)}\right)^2$. Observons que

$$\int (N_{(\bar\varpi-\varpi)}*f)^2 d\xi = N_{(\bar\varpi-\varpi)}*f*\widetilde{(N_{(\bar\varpi-\varpi)}*f)}(0)$$
$$= N_{(\bar\varpi-\varpi)}*\widetilde{N_{(\bar\varpi-\varpi)}}*f*\check{f}(0),$$

où $\check{f}(x)=f(-x)$. La mesure

$$\sigma = N_{(\bar\varpi-\varpi)}*\widetilde{N_{(\bar\varpi-\varpi)}}$$

est symétrique par rapport à l'origine et $\int d\sigma = A(\omega)$. On obtient alors

$$\sigma*f*\check{f}(0) = \int f*\check{f}d\check{\sigma} = \int f*\check{f}d\sigma = \iint f(x-y)\check{f}(y)d\xi(y)d\sigma(x)$$
$$= \iint f(x-y)f(-y)d\xi(y)d\sigma(x) = \iint f(x+y)f(y)d\xi(y)d\sigma(x)$$
$$= -\frac{1}{2}\iint |f(x+y)-f(y)|^2 d\xi(y)d\sigma(x)$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\iint |f(x+y)|^2 d\xi(y)d\sigma(x)+\iint |f(y)|^2 d\xi(y)d\sigma(x)\right\}$$
$$= -\frac{1}{2}\iint |f(x+y)-f(y)|^2 d\xi(y)d\sigma(x)+A(\omega)\int |f(y)|^2 d\xi(y)$$
$$\leqq A(\omega)\int |f|^2 d\xi.$$

Il s'en suit que

$$\int_{\bar\varpi} |Nf|^2 d\xi \leqq \int |N_{(\bar\varpi-\varpi)}*f|^2 d\xi = \sigma*f*\check{f}(0) \leqq A(\omega)\int |f|^2 d\xi.$$

Ensuite on s'occupe de $f\in L_2^+$ portée par $\omega$. Il existe une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $C^+(\omega)$ telle que $\int |f_n-f|^2 d\xi \to 0$ lorsque $n\to+\infty$. Alors

$$\limsup_{n,m\to+\infty}\int_{\bar\varpi} |Nf_n-Nf_m|^2 d\xi \leqq A(\omega)\lim_{n,m\to+\infty}\int |f_n-f_m|^2 d\xi = 0.$$

On peut prendre un ouvert $\omega'\supset\omega$ quelconque au lieu de $\omega$, et donc on voit qu'il existe une fonction $g\geqq 0$ localement carré sommable telle que $\int_{\omega'} |Nf_n-g|^2 d\xi\to 0$ lorsque $n\to+\infty$. Pour $\varphi\in C_K$ quelconque, on a

$$\int \varphi g d\xi = \lim_{n\to+\infty}\int \varphi Nf_n d\xi = \lim_{n\to+\infty}\int \varphi(x+y)f_n(y)dN(x)d\xi(y)$$
$$= \iint \varphi(x+y)f(y)dN(x)d\xi(y).$$

Le dernier terme est égal à $\int \varphi dN*(f\xi)$. Donc $g=Nf \quad \xi-p.p.$ On a aussi

$$\int_{\omega'} |Nf|^2 d\xi = \lim_{n\to+\infty} \int_{\omega'} |Nf_n|^2 d\xi \leqq A(\omega') \lim_{n\to+\infty} \int |f_n|^2 d\xi = A(\omega') \int |f|^2 d\xi$$

et conclut que $Nf$ est localement carré sommable. On obtient ainsi (1).

LEMME 1.5. *Soient $N_1$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au principe de domination et $N_2$ un noyau de convolution sur $X$. Supposons que, pour toute mesure positive $\mu$ dans $X$ à support compact et pour tout ouvert relativement compact $\omega$ de $X$, il existe une mesure positive $\mu'$ portée par $\bar{\omega}$ telle que $N_1*\mu' \leqq N_2*\mu$ dans $X$ et $N_1*\mu'=N_2*\mu$ dans $\omega$. Alors $N_1$ satisfait au principe du balayage relatif à $N_2$.*

DÉMONSTRATION. Si $N_1=0$, on a évidemment $N_2=0$. Donc on peut supposer $N_1\neq 0$. Soient $\mu$ une mesure positive à support compact et $\omega$ un ouvert relativement compact de $X$. Prenons une famille filtrante à droite $(\omega_\alpha)_\alpha \in \Lambda$ d'ouverts telle que $\bar{\omega}_\alpha \subset \omega (\forall \alpha \in \Lambda)$ et $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \omega_\alpha = \omega$. On désigne par $\mu'_\alpha$ une mesure positive donnée dans l'hypothèse pour $\mu$ et $\omega$. Comme $N_1\neq 0$ et $(N*\mu'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est vaguement bornée, le lemme 1.1 donne que $(\mu'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est vaguement bornée. Donc on peut supposer que $(\mu'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est vaguement convergente. Avec sa limite $\mu'$, on a $\lim_\alpha N_1*\mu'_\alpha = N_1*\mu'$ (vaguement), car $\mu'_\alpha$ est portée par un compact fixé. Par conséquent $N_1*\mu' \leqq N_2*\mu$ dans $X$ et $N_1*\mu'=N_2*\mu$ dans $\omega$. Soit $\nu$ une mesure positive dans $X$ portée par $\bar{\omega}$ satisfaisant à $N_1*\nu \geqq N_2*\mu$ dans $\omega$. Etant $\alpha\in\Lambda$ donné, on a $\mathrm{supp}(\mu'_\alpha)\subset\bar{\omega}_\alpha$ et $N_1*\mu'_\alpha \leqq N_1*\nu$ dans $\omega$, et le lemme 1.2 donne que $N_1*\mu'_\alpha \leqq N_1*\mu$ dans $X$, d'où $N_1*\mu' \leqq N_1*\nu$ dans $X$. On voit ainsi que $\mu'$ est une mesure balayée de $\mu$ sur $\omega$ relativement à $(N_1, N_2)$. Le lemme 1.5 est ainsi démontré.

LEMME 1.6. *Soient $N_1\neq 0$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au principe de domination et $N_2$ un noyau de convolution sur $X$. Supposons que, pour tout nombre $c>0$, tout compact $K$ et pour toute $f$ de $M_K^+$, il existe une fonction $f'$ de $M_K^+$ portée par $K$ telle que $N_1 f' + cf' \leqq N_2 f \quad \xi-p.p.$* sur *$X$ et $N_1 f' + cf' = N_2 f \quad \xi-p.p.$ sur $K$. Alors $N_1$ satisfait au principe du balayage relatif à $N_2$.*

DÉMONSTRATION. Soient $\omega$ un ouvert relativement compact de $X$ et $\mu$ une mesure positive dans $X$ à support compact. Prenons une famille filtrante $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de $C_K^+$ telle que $\varphi_\alpha$ soit portée par un compact fixé et que $(\varphi_\alpha \xi)_{\alpha\in\Lambda}$ converge vaguement vers $\varepsilon$. Pour tout l'entier $m>0$ et $\alpha\in\Lambda$, il existe $f_{\alpha,m}\in M_K^+$ portée par $\bar{\omega}$ telle que

$$N_1 f_{\alpha,m} + \frac{1}{m} f_{\alpha,m} \leqq N_2(\mu * \varphi_\alpha) \quad \xi - p.p. \quad sur \quad X$$

et

$$N_1 f_{\alpha,m} + \frac{1}{m} f_{\alpha,m} = N_2(\mu * \varphi_\alpha) \quad \xi - p.p. \quad sur \quad \bar{\omega}.$$

On voit que $(f_{\alpha,m}\xi)_{\alpha\in\Lambda}$ est vaguement bornée, et on peut supposer qu'elle converge vaguement vers une limite $\mu_m$. On a

$$N_1 * \mu_m + \frac{1}{m}\mu_m \leqq N_2 * \mu \qquad dans \quad X$$

et

$$N_1 * \mu_m + \frac{1}{m}\mu_m = N_2 * \mu \qquad dans \quad \omega.$$

Evidemment $\mu_m$ est portée par $\bar{\omega}$. D'après $N_1 \neq 0$ et le lemme 1.1, $(\mu_m)_{m=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. Avec un point vaguement adhérent $\mu'$ de $(\mu_m)_{m=1}^{\infty}$, on a

$$N_1 * \mu' \leqq N_2 * \mu \qquad dans \quad X,$$

$$N_1 * \mu' = N_2 * \mu \qquad dans \quad \omega$$

et supp $(\mu') \subset \bar{\omega}$. D'après le lemme 1.5, $N_1$ satisfait au principe du balayage relatif à $N_2$. Le lemme 1.6 est ainsi démontré.

Montrons le premier théorème.

THÉORÈME 1. *Soient $N_1$ et $N_2$ deux noyaux de convolution sur X et supposons que $N_1 \neq 0$ et $N_1$ satisfait au principe de domination. Alors pour que $N_1 \prec N_2$, il faut et il suffit que $N_1$ satisfasse au principe du balayage relatif à $N_2$.*

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Rappelons le lemme 1.6; alors il suffit de montrer que, quels que soient $K$ un compact de $X$, $c$ une constante$>0$ et $f$ une fonction de $M_K^+$, il existe une fonction $f'_K$ de $M_K^+$ portée par $K$ telle que l'on ait $N_1 f'_K + c f'_K \leqq N_2 f$ $\xi - p.p.$ sur $X$ et $N_1 f'_K + c f'_K = N_2 f$ $\xi - p.p.$ sur $K$. On pose $M^+(K) = \{g \in M_K^+;\, K_g \subset K\}$ et

$$\alpha = \inf_{g \in M^+(K)} \int_K |N_1 g + cg - N_2 f|^2 d\xi. \tag{3}$$

En vertu du lemme 1.4,

$$\alpha = \inf_{g \in L_2^+(K)} \int_K |N_1 g + cg - N_2 f|^2 d\xi,$$

où $L_2^+(K)=\{f\in L_2^+;\ K_f\subset K\}$. Soit $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de $M^+(K)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_K |N_1 g_n+cg_n-N_2 f|^2 d\xi = \alpha .$$

Evidemment $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée dans $L_2$, et donc on peut supposer qu'il existe une fonction $f'_K$ de $L_2^+(K)$ telle que $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge faiblement vers $f'_K$ dans $L_2$ lorsque $n\to+\infty$. D'après le lemme 1.4, $N_1 f'_K$ est localement carré sommable. Pour $h\in L_2^+(K)$ quelconque,

$$\int (N_1 g_n) h d\xi = \int (\check{N}_1 h) g_n d\xi \longrightarrow \int (\check{N}_1 h) f'_K d\xi = \int (N_1 f'_K) h d\xi$$

lorsque $n\to+\infty$. Notons $L_2(K)$ un sous-espace hilbertien de $L_2$ formé par des fonctions portées par $K$. On obtient ainsi que la suite $((N_1 g_n)_K+cg_n)_{n=1}^{\infty}$ converge faiblement vers $(N_1 f'_K)_K+cf'_K$ dans $L_2(K)$ avec $n\to+\infty$, où $(\cdot)_K$ désigne la restreinte de $(\cdot)$ sur $K$. On a donc

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_K |N_1 g_n+cg_n-N_2 f|^2 d\xi \geqq \int_K |N_1 f'_K+cf'_K-N_2 f|^2 d\xi ,$$

d'où

$$\int_K |N_1 f'_K+cf'_K-N_2 f|^2 d\xi = \alpha .$$

Par conséquent, quelle que soit $g$ de $L_2^+(K)$,

$$\int_K (N_1 f'_K+cf'_K)(N_1 g+cg) d\xi \geqq \int_K N_2 f(N_1 g+cg) d\xi$$

et

$$\int_K |N_1 f'_K+cf'_K|^2 d\xi = \int_K N_2 f(N_1 f'_K+cf'_K) d\xi .$$

Pour simplifier les notations, on note $f_1=(N_1 f'_K)_K+cf'_K$ et $f_2=(N_2 f)_K$. Alors on a

$$\text{(4)} \qquad \check{N}_1 f_1+cf_1 \geqq \check{N}_1 f_2+cf_2 \quad \xi-p.p. \qquad \text{sur} \quad K$$

et

$$\text{(5)} \qquad \check{N}_1 f_1+cf_1 = \check{N}_1 f_2+cf_2 \quad \xi-p.p. \qquad \text{sur} \quad K_{f'_K}.$$

Donc $c^2 f'_K \leqq \check{N}_1 f_2+cf_2$ $\xi-p.p.$ sur $K_{f'_K}$. Comme $f_2\in M_K^+$, $\check{N}_1 f_2$ est localement bornée. Par conséquent $f'_K$ appartient à $M_K^+$. On voit aussi $f_1\in M_K^+$. D'après la proposition 1.1, $\check{N}_1$ satisfait aussi au principe de domination. Le lemme 1.3 et (4) entraînent que $\check{N}_1 f_1 \geqq \check{N}_1 f_2$ $\xi-p.p.$ sur $X$. Ceci et (5) donnent $f_1 \leqq f_2$ $\xi-p.p.$ sur $K_{f'_K}$. Il s'en suit

$$N_1 f'_K \leqq N_1 f'_K + c f'_K = f_1 \leqq N_2 f \quad \xi-p.p. \qquad \text{sur} \quad K_{f'_K}.$$

Comme $N_1 \prec N_2$, on a $N_1 f'_K \leqq N_2 f$ $\xi-p.p.$ sur $X$, d'où

$$N_1 f'_K + c f'_K \leqq N_2 f \quad \xi-p.p. \qquad \text{sur} \quad X.$$

Ainsi $f_1 \leqq f_2$ $\xi-p.p.$. En utilisant cette inégalité et (4), on obtient

$$N_1 f_1 + c f_1 = N_1 f_2 + c f_2 \quad \xi-p.p. \qquad \text{sur} \quad K,$$

et donc le corollaire du lemme 1.3 donne $f_1 = f_2$ $\xi-p.p.$ d'où

$$N_1 f'_K + c f'_K = N_2 f \quad \xi-p.p. \qquad \text{sur} \quad K.$$

On voit ainsi que la condition est nécessaire.

Réciproquement, supposons que $N_1$ satisfait au principe du balayage relatif à $N_2$ et que, pour deux fonctions $f$ et $g$ de $M_K^+$, $N_1 f \leqq N_2 g$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$. On choisit un ouvert relativement compact $\omega$ de $X$ tel que $\overline{K_f} - \overline{K_g} \subset \omega$. Soit $\varepsilon'$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega$ relativement à $(N_1, N_2)$. On a alors $N_1 * \varepsilon' * (g\xi) = N_2 * (g\xi)$ dans un certain voisinage ouvert de $\overline{K_f}$ et $N_1 * \varepsilon' * (g\xi) \leqq N_2 * (g\xi)$ dans $X$. Désignons par $g'$ la densité de $\varepsilon' * (g\xi)$ par rapport à $\xi$. On voit $g' \in M_K^+$ et $N_1 f \leqq N_1 g'$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$. D'après le principe de domination pour $N_1$, $N_1 f \leqq N_1 g'$ $\xi-p.p.$ sur $X$. Comme $N_1 g' \leqq N_2 g$ $\xi-p.p.$ sur $X$, $N_1 f \leqq N_2 g$ $\xi-p.p.$ sur $X$. On voit ainsi que la condition est suffisante. La démonstration est ainsi complète.

D'après le présent théorème, on retrouve l'équivalence entre le principe de domination et le principe du balayage.

Enonçons les cinq corollaires obtenus essentiellement du théorème 1. On note $\tilde{\mathscr{D}}(X) = \mathscr{D}(X)/\sim$, où la relation d'équivalence $\sim$ signifie que, avec une constante $c>0$, $N_2 = cN_1$.

Corollaire 1. *La relation $\prec$ est un ordre partiel sur $\tilde{\mathscr{D}}(X) - \{0\}$.*

Démonstration. Pour $N \in \mathscr{D}(X)$ quelconque, $N \prec N$ résulte de la définition, d'où $\prec$ est reflexe.

Soient $N_1 \neq 0$, $N_2 \neq 0 \in \mathscr{D}(X)$ et supposons $N_1 \prec N_2$, $N_2 \prec N_1$. Pour un voisinage $\omega$ ouvert et relativement compact de l'origine quelconque, le présent théorème donne qu'il existe une mesure balayée $\varepsilon'_\omega$ de $\varepsilon$ sur $\omega$ relativement à $(N_1, N_2)$. En utilisant encore $N_2 \prec N_1$ on obtient une mesure balayée $\varepsilon''_\omega$ de $\varepsilon'_\omega$ sur $\omega$ relativement à $(N_2, N_1)$. Alors on a

$$N_2 \geqq N_1 * \varepsilon'_\omega \geqq N_2 * \varepsilon''_\omega \qquad \text{dans} \quad X$$

et

$$N_2 = N_1 * \varepsilon'_\omega = N_2 * \varepsilon''_\omega \qquad \text{dans} \quad \omega .$$

D'après le lemme 1.2 et le principe de domination pour $N_2$, on a $N_2 \leqq N_2 * \varepsilon''_\omega$ dans $X$. Par conséquent

$$N_2 = N_1 * \varepsilon'_\omega = N_2 * \varepsilon''_\omega \qquad \text{dans} \quad X .$$

Comme $N_1 \neq 0$, le lemme 1.1 donne que $(\varepsilon'_\omega)_\omega$ est vaguement bornée. Donc on peut supposer qu'elle converge vaguement lorsque $\omega \downarrow \{0\}$. Sa limite est concentrée à l'origine, et elle est égale à $c\varepsilon$, où $c$ est une constante$\geqq 0$. Par conséquent $N_2 = cN_1$ et $c > 0$. Il s'en suit que $\prec$ est symétrique.

Soient $N_1 \neq 0$, $N_2 \neq 0$, $N_3 \neq 0 \in \mathscr{D}(X)$ et supposons $N_1 \prec N_2$, $N_2 \prec N_3$. Soient $\mu$ une mesure positive dans $X$ à support compact et $\omega$ un ouvert relativement compact de $X$. D'après le théorème 1, il existent une mesure balayée $\mu'$ de $\mu$ sur $\omega$ relativement à $(N_2, N_3)$ et une mesure balayée $\mu''$ de $\mu'$ sur $\omega$ relativement à $(N_1, N_2)$. Alors on a facilement $\mathrm{supp}(\mu'') \subset \bar{\omega}$, $N_1 * \mu'' \leqq N_3 * \mu$ dans $X$ et $N_1 * \mu'' = N_3 * \mu$ dans $X$. D'après le lemme 1.5, $N_1$ satisfait au principe du balayage relatif à $N_3$, d'où $N_1 \prec N_3$. Il s'en suit que $\prec$ est transtive. Le corollarire 1 est ainsi démontré.

COROLLAIRE 2. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au principe de domination et posons*

$$\mathscr{D}_R(N) = \{N' : \textit{noyau de convolution sur } X ; N \prec N'\} .$$

*Alors $\mathscr{D}_R(N)$ est un cône convexe vaguement fermé. Si $N \neq 0$, alors $\mathscr{D}_R(N)$ est égal à l'adhérent $\overline{\mathscr{P}_K(N)}$ de $\mathscr{P}_K(N)$, où*

$$\mathscr{P}_K(N) = \{N' = N * \nu ; \nu : \textit{mesure positive à support compact}\} .$$

DÉMONSTRATION. Si $N = 0$, alors $\mathscr{D}_R(N)$ est égal à la totalité des noyaux de convolution sur $X$. Donc on le montre seulement dans le cas où $N \neq 0$. Si la deuxième partie est vraie, on voit évidemment que la première partie a lieu. Montrons la deuxième partie. Soit $N' \in \mathscr{D}_R(N)$ quelconque. On choisit une suite $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ d'ouverts relativement compacts de $X$ telle que $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$ ($^\forall n \geqq 1$) et $\bigcup_{n=1}^\infty \omega_n = X$. D'après le théorème 1, il existe une mesure balayée $\varepsilon'_n$ de $\varepsilon$ sur $\omega_n$ relativement à $(N, N')$. D'aprsè le lemme 1.2, $(N * \varepsilon'_n)_{n=1}^\infty$ est croissante, et on a $\lim_{n \to +\infty} N * \varepsilon'_n = N'$ (vaguement). Par conséquent $\mathscr{D}_R(N) \subset \overline{\mathscr{P}_K(N)}$. Si $N'$ s'écrit, avec une mesure positive $\nu$ dans $X$ à support compact, comme $N' = N * \nu$, alors le principe de domination pour $N$ entraîne $N \prec N'$ d'où $\mathscr{P}_K(N) \subset \mathscr{D}_R(N)$.

Donc pour $\mathscr{D}_R(N) \supset \overline{\mathscr{P}_K(N)}$, il suffit de montrer que $\mathscr{D}_R(N)$ est vaguement fermé. Soit $N'$ un point vaguement adhérent de $\mathscr{D}_R(N)$; on prend une famille filtrante $(N'_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $\mathscr{D}_R(N)$ qui converge vaguement vers $N'$. Soient $\mu$ une mesure positive dans $X$ à support compact et $\omega$ un ouvert relativement compact de $X$. Le théorème 1 donne l'existence d'une mesure balayée $\mu'_\alpha$ de $\mu$ sur $\omega$ relativement à $(N, N'_\alpha)$. $(N*\mu'_\alpha)_{\alpha \in A}$ étant vaguement bornée, il résulte du lemme 1.1 que $(\mu'_\alpha)_{\alpha \in A}$ est vaguement bornée. On peut supposer donc que $(\mu'_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge vaguement vers une limite $\mu'$. Remarquons que $\mu'_\alpha$ est portée par le compact fixé $\bar{\omega}$; alors $\lim_\alpha N*\mu'_\alpha = N*\mu'$ (vaguement), et par suite $N*\mu' \leqq N'*\mu$ dans $X$ et $N*\mu' = N'*\mu$ dans $\omega$. Le lemme 1.5 donne que $N$ satisfait au principe du balayage relatif à $N'$, d'où $N' \in \mathscr{D}_R(N)$. On voit ainsi $\mathscr{D}_R(N)$ est vaguement fermé, et donc$\mathscr{D}_R(N) \supset \overline{\mathscr{P}_K(N)}$. Par conséquent on obtient l'égalité demandée, d'où le corollaire 2.

Corollaire 3. *Soient $N$ et $N'$ un noyau de convolution sur $X$ et supposons que $N \neq 0$ et $N \prec N \prec N'$. Pour un ouvert relativement compact $\omega$ de $X$ et pour une mesure positive $\mu$ dans $X$ telle que $N'*\mu$ ait un sens, il existe une mesure positive $\mu'$ dans $X$ portée par $\bar{\omega}$ telle que l'on ait*:

(a) $N*\mu' \leqq N'*\mu$ *dans* $X$.

(b) $N*\mu' = N'*\mu$ *dans* $\omega$.

(c) *Quelle que soit $\nu$ une mesure positive portée par $\bar{\omega}$, $N*\nu \geqq N*\mu'$ dans $X$ dès que $N*\nu \geqq N'*\mu$ dans $\omega$.*

*En posant $N'' = N'*\mu$, on a $N \prec N''$.*

Démonstration. Soient $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ la même que dans la démonstration du corollaire 2 et $\varepsilon'_n$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega_n$ relativement à $(N, N')$. Alors $(N*\varepsilon'_n)_{n=1}^\infty$ converge d'une manière croissante vers $N'$ avec $n \uparrow +\infty$. Soit $\mu_n$ la restreinte de $\mu$ sur $\omega_n$. On a

$$\lim_\alpha N*\varepsilon'_n*\mu_n = N'' \qquad \text{(vaguement)},$$

et donc le corollaire 2 donne $N \prec N''$. Soit $\mu'$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega$ relativement à $(N, N'')$. Alors on voit facilement que $\mu'$ est une mesure positive demandée. Le corollaire 2 est ainsi démontré.

On dit aussi que $\mu'$ est une mesure balayée de $\mu$ sur $\omega$ relativement à $(N, N')$.

Remarquons que $\mathscr{D}(X) = \{N \in \mathscr{D}(X); N \prec 0\}$; on voit que le corollaire suivant est une généralisation de la proposition 1.3.

Corollaire 4. *Soit $N'$ un noyau de convolution sur $X$. Alors $\mathscr{D}_r(N) = \{N \in \mathscr{D}(X); N \prec N'\}$ est vaguement fermé.*

Montrons le corollaire 4. Soient $N$ un noyau de convolution appartenant à l'adhérent vague de $\{N \in \mathscr{D}(X); N \prec N'\}$ et $(N_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille filtrante de $\{N \in \mathscr{D}(X); N \prec N'\}$ qui converge vaguement vers $N$. D'après la proposition

1.3, $N$ satisfait au principe de domination. Si $N=0$, alors on a facilement $N \prec N'$. On suppose $N \neq 0$, et alors on peut supposer $N_\alpha \neq 0$ ($^\forall \alpha \in \Lambda$). Pour une mesure positive $\mu$ dans $X$ à support compact et pour un ouvert relativement compact $\omega$ de $X$, le théorème 1 donne l'existence d'une mesure balayée $\mu'_\alpha$ de $\mu$ sur $\omega$ relativement à $(N_\alpha, N')$. Comme $N_\alpha \to N$, $N \neq 0$ et $N_\alpha \neq 0$, on peut supposer que, pour une fonction $f$ de $C_K^+$, $N*f(x)>1$ sur $\bar{\omega}$ entraîne $N_\alpha*f(x)>1$ sur $\bar{\omega}$, car, pour toute $\varphi$ de $C_K$, $(N_\alpha*\varphi)_{\alpha\in\Lambda}$ converge uniformément vers $N*\varphi$ sur tout compact. Remarquons $N_\alpha*\mu'_\alpha \leqq N'*\mu(^\forall \alpha \in \Lambda)$; alors on obtient, de la même manière que dans le lemme 1.1, que $(\mu'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est vaguement bornée. Donc on peut supposer qu'elle converge vaguement vers une limite $\mu'$. Comme $\operatorname{supp}(\mu'_\alpha) \subset \bar{\omega}$ pour tout $\alpha \in \Lambda$, on a $\lim_{n\to+\infty} N_\alpha*\mu'_\alpha = N*\mu'$ (vaguement). Alors $\operatorname{supp}(\mu') \subset \bar{\omega}$, $N*\mu' \leqq N'*\mu$ dans $X$ et $N*\mu' = N'*\mu$ dans $\omega$. D'après le lemme 1.5 et le théorème 1, on a $N \prec N'$, d'où $\{N \in \mathscr{D}(X); N \prec N'\}$ est vaguement fermé.

Le corollaire suivant est une forme du principe transitif de domination.

COROLLAIRE 5. *Soient $N_1$ et $N_2$ deux noyaux de convolution sur $X$ et supposons que $N_1 \neq 0$ et $N_1 \prec N_1 \prec N_2$. Si, pour deux mesures positives $\mu$ et $\nu$ dans $X$, $N_1*(\mu+\nu)$ a un sens et si $N_1\mu* \leqq N_1*\nu$ dans un certain voisinage ouvert de* $\operatorname{supp}(\mu)$, *alors $N_2*\mu \leqq N_2*\nu$ dès que $N_2*\nu$ a un sens.*

DÉMONSTRATION. Posons $N' = N_1*\nu$. Pour un compact $K$ de $X$, on désigne par $\mu_K$ la restreinte de $\mu$ sur $K$. D'après le corollaire 2, $N_1 \prec N'$, et donc le lemme 1.2 donne $N_1*\mu_K \leqq N'$ dans $X$. En faisant $K \uparrow X$, on arrive à $N_1*\mu \leqq N' = N_1*\nu$ dans $X$. Remarquons le corollaire 2 et sa démonstration. Il existe une suite $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ de mesures positives dans $X$ à support compact telle que $(N_1*\lambda_n)_{n=1}^\infty$ converge d'une manière croissante vers $N_2$ avec $n \uparrow +\infty$. Donc si $N_2*\nu$ a un sens, alors $N_2*\mu$ a un sens et

$$N_2*\nu - N_2*\mu = \lim_{n\to+\infty} (N_1*\nu - N_1*\mu)*\lambda_n \geqq 0$$

dans $X$, d'où notre corollaire.

En généralisant le principe relatif du balayage, on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 1.4. *Soient $N \neq 0$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au principe de domination et $\omega$ un ouvert quelconque de $X$. À $N' \in \mathscr{D}_R(N)$ quelconque, on peut associer un seul noyau de convolution $N'_\omega = N'_\omega(N, N', \omega)$ $\in \mathscr{D}_R(N)$ tel que l'on ait*:

(a) $N'_\omega \leqq N'$ *dans* $X$.

(b) $N'_\omega = N'$ *dans* $\omega$.

(c) *Pour $N'' \in \mathscr{D}_R(N)$ quelconque, $N'_\omega \leqq N''$ dans $X$ dès que $N' \leqq N''$ dans $\omega$.*

D'abord on préparera un lemme.

LEMME 1.7. *Soient $N_1$, $N_2$ deux noyaux de convolution sur $X$, $\omega$ un ouvert relativement compact et $\mu$, $\nu$ deux mesures positives dans $X$ à support compact. Supposons que $N_1$ satisfait au principe du balayage relatif à $N_2$ et que $N_2*\mu=N_2*\nu$ dans $\omega$. On désigne par $\mu'$ et par $\nu'$ une mesure balayée de $\mu$ sur $\omega$ et une mesure balayée de $\nu$ sur $\omega$ relativement à $(N_1, N_2)$, respectivement. Alors $N_1*\mu'=N_1*\nu'$ dans $X$.*

En effet, on a $N_1*\mu'=N_1*\nu'=N_2*\mu$ dans $\omega$. Rappelons la condition (c) qui apparaît dans la définition du principe relatif du balayage (§0); alors on obtient l'égalité demandée.

Montrons la proposition 1.4. Soit $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante à droite d'ouverts relativement compacts de $X$ telle que $\overline{\omega_\alpha}\subset\omega(^\forall\alpha\in A)$ et $\bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha=\omega$. On désigne par $\varepsilon'_\alpha$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega_\alpha$ relativement à $(N, N')$. Si, pour $\alpha$, $\beta\in A$, $\alpha\geqq\beta$, alors le prèsent lemme donne que $N*\varepsilon'_\beta$ est égal au $N$-potentiel balayé de $N*\varepsilon'_\alpha$ sur $\omega_\beta$ relativement au noyau $N$, et donc $(N*\varepsilon'_\alpha)_{\alpha\in A}$ est croissante. Comme $N*\varepsilon'_\alpha\leqq N'$ dans $X$, on voit que $N'_\omega=\lim_\alpha N*\varepsilon'_\alpha$ (vaguement) a un sens, et le corollaire 2 donne $N'_\omega\in\mathscr{D}_R(N)$. Evidemment $N'_\omega$ vérifie (a) et (b). Supposons que, pour $N''\in\mathscr{D}_R(N)$, $N''\geqq N'$ dans $\omega$. Comme $N''\geqq N*\varepsilon'_\alpha$ dans $\omega$ et $\omega\supset\overline{\omega_\alpha}\supset\mathrm{supp}(\varepsilon'_\alpha)$, le lemme 1.2 donne $N''\geqq N*\varepsilon'_\alpha$ dans $X$, d'où $N''\geqq N'_\omega$ dans $X$. L'unicité de $N'_\omega$ résulte aussi des conditions (b) et (c). La proposition 1.4 est ainsi démontrée.

On dit que $N'_\omega$ est le *noyau de convolution balayé de $N'$ sur $\omega$ relativement* à $(N, N')$.

REMARQUE. Dans la présente proposition, on a:

(1) Si $\omega$ est relativement compact, $N'_\omega$ s'écrit comme $N'_\omega=N*\varepsilon'_\omega$, où $\varepsilon'_\omega$ est une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega$ relativement à $(N, N')$.

(2) L'implication $\omega\to N'_\omega$ est croissante.

## §2. Caractérisations du principe complet du maximum

Nous connaissons bien que, pour un noyau de convolution $N$ sur $X$, le principe complet du maximum pour $N$ est plus fort que le principe de domination pour $N$. Le but de ce paragraphe est de fournir conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant à $N\prec N$ vérifie $N\ll N$. D'abord on préparera les trois lemmes.

LEMME 2.1. *Soient $N\neq 0$ un noyau de convolution sur $X$ et $\sigma$ une mesure dans $X$.*

(1) *Si $N\geqq N*\sigma$ dans $X$, alors, pour tout l'entier $n>0$, les convolutions $(\sigma)^n$ et $N*(\sigma)^n$ sont définies.*

(2) *Si* $N \geqq N*\sigma$ *dans* $X$ *et* $N \neq N*\sigma$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma)^n$ *converge vaguement.*

On note $(\sigma)^1 = \sigma$ et $(\sigma)^n = (\sigma)^{n-1}*\sigma$ ($^\forall n \geqq 2$).

DÉMONSTRATION. Supposons que, pour un entier $n > 0$, $(\sigma)^n$, $(\sigma)^{n+1}$, $N*(\sigma)^n$ et $N*(\sigma)^{n+1}$ sont définies et que $N*(\sigma)^n \geqq N*(\sigma)^{n+1}$ dans $X$. D'après le théorème de Fubini, la convolution $(N*(\sigma)^n)*\sigma$ est définie et on a $(N*(\sigma)^n)*\sigma = N*(\sigma)^{n+1}$. En utilisant l'inégalité $N*(\sigma)^n \geqq N*(\sigma)^{n+1}$ dans $X$, $(N*(\sigma)^{n+1})*\sigma$ est aussi définie et on a $N*(\sigma)^{n+1} \geqq (N*(\sigma)^{n+1})*\sigma$ dans $X$. Comme $N \neq 0$, $(\sigma)^{n+2}$ est définie et $(N*(\sigma)^{n+1})*\sigma = N*(\sigma)^{n+2}$. Par récurrence, on voit que, pour tout l'entier $n > 0$, $(\sigma)^n$ et $N*(\sigma)^n$ sont définies et $N*(\sigma)^n \geqq N*(\sigma)^{n+1}$ dans $X$. Pour un entier $m > 0$ quelconque,

$$(N - N*\sigma)*(\varepsilon + \sum_{n=1}^{m} (\sigma)^n) = N - N*(\sigma)^{m+1} \leqq N$$

dans $X$. Si l'on a $N \neq N*\sigma$, le lemme 1.1 donne que $\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma)^n$ est vaguement convergente.

Dans ce cas, on a

$$(N - N*\sigma)*(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma)^n) = N - \lim_{n \to +\infty} N*(\sigma)^n. \tag{6}$$

LEMME 2.2. *Soit* $\sigma$ *une mesure positive dans* $X$ *symétrique par rapport à l'origine. Si* $\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma)^n$ *est vaguement convergente, alors* $\int d\sigma \leqq 1$.

DÉMONSTRATION. Pour un compact $K$ de $X$ symétrique par rapport à l'origine, on note $\sigma_K$ la restreinte de $\sigma$ sur $K$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_K)^n$ est vaguement convergente et $\sigma_K$ est symètrique par rapport à l'origine. Ayant $\int d\sigma = \lim_{K \uparrow X} \int d\sigma_K$, on peut supposer que $\sigma$ est à support compact. On désigne par $\hat{X}$ le groupe dual de $X$ et par $\hat{x}$ un point de $\hat{X}$. Comme $(\sigma)^2 = \sigma*\check{\sigma}$, on a $\widehat{(\sigma)^2}(\hat{x}) = |\hat{\sigma}(\hat{x})|^2$ sur $\hat{X}$ et $\hat{\sigma}$ est continue, où la signe $\hat{\sigma}$ signifie la transformation de Fourier de $\sigma$. Il s'en suit que, pour tout l'entier $m \geqq 1$,

$$\sum_{n=1}^{m} (\sigma)^{2n}(\hat{x}) = \sum_{n=1}^{m} |\hat{\sigma}(\hat{x})|^{2n}$$

sur $\hat{X}$. Pour toute $\varphi$ de $C_K^+$,

$$+\infty > \int \varphi*\check{\varphi}\, d \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma)^n \geqq \int \varphi*\check{\varphi}\, d \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma)^{2n} = \lim_{m \to +\infty} \int \varphi*\check{\varphi}\, d \sum_{n=1}^{m} (\sigma)^n*(\check{\sigma})^n$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} \int |\varphi*(\sigma)^n|^2 d\xi = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} \int |\widehat{\varphi*(\sigma)^n}(\hat{x})|^2 d\hat{\xi}(\hat{x})$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \int |\hat{\varphi}(\hat{x})\widehat{(\sigma)^n}(\hat{x})|^2 d\hat{\xi}(\hat{x}) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \int |\hat{\varphi}(\hat{x})|^2 |\hat{\sigma}(\hat{x})|^{2n} d\hat{\xi}(\hat{x}),$$

où $\hat{\xi}$ est la mesure de Haar sur $\hat{X}$ associée à $\xi$. La fonction $\varphi$ étant quelconque, $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\sigma}(\hat{x})|^{2n}$ est convergente $\hat{\xi}-p.p.$ sur $\hat{X}$, et donc $|\hat{\sigma}(\hat{x})| \leqq 1$ $\hat{\xi}-p.p.$ sur $\hat{X}$. La fonction $\hat{\sigma}$ est continue dans $\hat{X}$, et par suite $|\hat{\sigma}(\hat{x})| \leqq 1$ partout sur $\hat{X}$, d'où $\int d\sigma = \hat{\sigma}(\hat{O}) \leqq 1$, où $\hat{O}$ est l'origine de $\hat{X}$. Le lemme 2.2 est ainsi démontré.

Lemme 2.3. *Soit $N \neq 0$ un noyau de convolution sur $X$. Alors les quatres énoncés suivants sont équivalents*:

(1) *$N$ satisfait au principe complet du maximum.*

(2) *$N$ satisfait au principe de domination et $N \prec \xi$.*

(3) *$N$ satisfait au principe de domination et*

$$C_N = \sup \left\{ \int d\mu ; \mu: \textit{ mesure positive, } N*\mu \leqq N \right\} < +\infty .$$

(4) *$N$ satisfait au principe du balayage et, pour un ouvert relativement compact $\omega$ de $X$ quelconque, $\int d\varepsilon'_\omega \leqq 1$,* où *$\varepsilon'_\omega$ est une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega$ relativement au noyau $N$.*

On remarque que l'équivalence entre (1), (2) et (4) est presque connue.

Montrons d'abord (1)$\Rightarrow$(2). Supposons que, pour $f, g \in M_K^+$, $Nf \leqq Ng$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$. Alors, pour toute $c>0$, $N(f/c) \leqq N(g/c)+1$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$ et donc $\xi-p.p.$ sur $X$, d'où $Nf \leqq Ng + c$ $\xi-p.p.$ sur $X$. En faisant $c \to 0$, on a $Nf \leqq Ng$ $\xi-p.p.$ sur $X$, d'où $N \in \mathscr{D}(X)$. Supponons que, pour $f, g \in M_K^+$, $Nf \leqq \xi g = \int g d\xi$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$. Si $g=0$, alors $Nf=0$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$. On a, pour toute $c>0$ et pour toute $h$ de $M_K^+$, $cNf \leqq cNh+1$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$, et donc $Nf \leqq Nh + \frac{1}{c}$ $\xi-p.p.$ sur $X$. En faisant $c \to +\infty$ et $h \to 0$, on a $Nf=0$ $\xi-p.p.$. Si $g \neq 0$, alors, pour toute $h \in M_K^+$, $\frac{1}{\int g d\xi} Nf \leqq Nh+1$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$, et donc $\xi-p.p.$ sur $X$. Comme $h$ est quelconque, on a $Nf \leqq \int g d\xi$ $\xi-p.p.$ sur $X$, d'où $N \prec \xi$.

Montrons (2)$\Rightarrow$(3). Supposons que, pour une mesure positive $\mu$ dans $X$, $N*\mu \leqq N$ dans $X$. Alors, d'après le corollaire 5 du théorème 1, on a $\xi*\mu \leqq \xi$, d'où $\int d\mu \leqq 1$. On a donc $C_N \leqq 1$.

Montrons (3)$\Rightarrow$(4). Comme $N*\varepsilon'_\omega \leqq N$ dans $X$, il suffit de montrer $C_N \leqq 1$ en supposant $C_N < +\infty$. Sinon, il existe une mesure positive $\mu$ dans $X$ telle que $N \geqq N*\mu$ dans $X$ et $\int d\mu > 1$. D'après le lemme 2.1, pour tout l'entier $m \geqq 1$, $(\mu)^m$ et $N*(\mu)^m$ sont définies et $N \geqq N*(\mu)^m$ dans $X$. Alors $C_N \geqq \int d(\mu)^m = \left(\int d\mu\right)^m$, d'où $C_N = +\infty$. On arrive à une contradiction, d'où $C_N \leqq 1$.

Montrons finalement (4)$\Rightarrow$(1). Pour le principe complet du maximum pour $N$, il suffit de montrer que, pour $f$, $g$ de $C_K^+$,

$$N*f \leqq N*g+1 \quad sur \quad \operatorname{supp}(f) \Rightarrow N*f \leqq N*g+1 \quad sur \quad X.$$

Soient $\omega$ un ouvert relativement compact de $X$ tel que $\omega \supset \operatorname{supp}(f)$ et $x$ un point de $\mathscr{C}\operatorname{supp}(f)$ quelconque. On pose, pour un nombre $\delta>0$, $\omega_\delta=\{y \in X; N*g(y)+1+\delta>N*f(y)\} \cap \omega$. Alors on a $\omega_\delta \supset \operatorname{supp}(f)$. On désigne par $\varepsilon'$ une mesure balayée de $\varepsilon_{-x}$ sur $-\omega_\delta$ relativement au noyau $N$. Alors $\int d\check{\varepsilon}'=\int d\varepsilon' \leqq 1$, car $\varepsilon'$ est une mesure positive obtenue d'une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $-\omega_\delta+\{x\}$ relativement au noyau $N$ par la translation de $-x$. On a

$$\check{N}*\varepsilon_x \geqq \check{N}*\check{\varepsilon}' \qquad dans \quad X$$

et

$$\check{N}*\varepsilon_x = \check{N}*\check{\varepsilon}' \qquad dans \quad \widecheck{-\omega_\delta} = \omega_\delta.$$

Evidemment $\operatorname{supp}(\check{\varepsilon}') \subset \bar{\omega}_\delta$. Donc

$$N*g(x)+1+\delta-N*f(x) = N*g*\check{\varepsilon}_x(0)+1+\delta-N*f*\check{\varepsilon}_x(0)$$

$$=\int gd\check{N}*\varepsilon_x+1+\delta-\int fd\check{N}*\varepsilon_x \geqq \int gd\check{N}*\check{\varepsilon}'+1+\delta-\int fd\check{N}*\check{\varepsilon}'$$

$$=\int N*gd\check{\varepsilon}'+1+\delta-\int N*fd\check{\varepsilon}'$$

$$\geqq \int (N*g+1+\delta-N*f)d\check{\varepsilon} \geqq 0.$$

Il s'en suit que $N*f \leqq N*g+1+\delta$ dans $X$. En faisant $\delta \downarrow 0$ on arrive à $N*f \leqq N*g+1$ sur $X$. On voit donc $N \ll N$. Le lemme 2.3 est ainsi démontré.

Le présent lemme et le corollaire 5 du théorème 1 donnent immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Si un noyau de convolution $N \neq 0$ sur $X$ satisfait au principe complet du maximum, alors $\int d\mu \leqq \int d\nu$ dès que $N*\mu \leqq N*\nu$ dans $X$ pour deux mesures positives $\mu$ et $\nu$ dans $X$ de masse totale finie.*

En effet, on a $N \prec \xi$. D'après le corollaire 5 du théorème 1, on a $\xi*\mu \leqq \xi*\nu$, d'où $\int d\mu \leqq \int d\nu$.

Le deuxième théorème est concernant des caractérisations du principe complet du maximum.

THÉORÈME 2. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au prin-*

*cipe de domination. Alors les quatre énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *$N$ satisfait au principe complet du maximum.*

(2) *Il existe un noyau de convolution symétrique $N'\neq 0$ sur $X$ tel que $N\prec N'$.*

(3) *Il existe un noyau de convolution $N'$ sur $X$ et une fonction $f$ de $L_{loc}^{+}$ tels que $N\prec N'$ et que $N'f$ ait sens et*

$$\operatorname*{ess.inf}_{x\in X} N'f(x) > 0 .$$

(4) *Il existe un noyau de convolution $N'\neq 0$ sur $X$ et une fonction $f\neq 0$ de $M_K^{+}$ tels que $N\prec N'$ et*

$$\operatorname*{ess.sup}_{x\in X} N'f(x) < +\infty .$$

Démonstration. L'implication (1)⇒(2) résulte immédiatement du lemme 2.3, car en posant $N'=\xi$, on voit que l'énoncé (2) a lieu. On voit aussi que (1)⇒(3) et (1)⇒(4) sont vraies.

Montrons l'implication (2)⇒(1). Si $N=0$, alors l'énoncé (1) est évident. Donc on suppose $N\neq 0$. D'après le lemme 2.3, il suffit de montrer que, quelle que soit $\mu$ une mesure positive dans $X$, $\int d\mu\leqq 1$ dès que $N*\mu\leqq N$ dans $X$. On peut supposer que $\mathrm{supp}(\mu)$ est compact. D'après le corollaire 5 du théorème 1, on a $N'*\mu\leqq N'$ dans $X$. Comme $N'$ est symétrique, on a $\check{N}'*\check{\mu}=(N'*\mu)^{\vee}\leqq\check{N}'=N'$ dans $X$. On pose, pour un nombre $\delta$ avec $0<\delta<1$, $\mu_\delta=\frac{\delta}{2}(\mu+\check{\mu})$. Alors

$$N'-N'*\mu_\delta \geqq (1-\delta)N'(\neq 0) \qquad \textit{dans} \quad X .$$

D'après (2) du lemme 2.1, $\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_\delta)^n$ est vaguement convergente. Comme $\mu_\delta$ est symétrique par rapport à l'origine, le lemme 2.2 donne que $\int d\mu_\delta\leqq 1$, d'où $\delta\int d\mu\leqq 1$. En faisant $\delta\uparrow 1$ on arrive à $\int d\mu\leqq 1$. On voit que (2)⇒(1) a lieu.

Montrons que (3) implique (1). On peut supposer $N\neq 0$. Pour une fonction $\varphi$ $(\neq 0)$ de $C_K^{+}$, on a $\inf_{x\in X} N'f*\varphi(x)>0$, où $f$ est la fonction donnée dans l'énoncé (3). Supposons que, pour une mesure positive $\mu$ dans $X$ à support compact, $N*\mu\leqq N$ dans $X$. Le corollaire 5 du théorème 1 donne $N'*\mu\leqq N'$ dans $X$, et

$$N'*(f*\varphi)(x) \geqq N'*(f*\varphi)*\mu(x) \qquad \textit{sur} \quad X .$$

Comme $N'f*\varphi=N'*(f*\varphi)$ et

$$N'*(f*\varphi)*\mu(0) = \int N'*(f*\varphi)(-y)d\mu(y) \geqq (\inf_{x\in X} N'f*\varphi(x))\int d\mu ,$$

on a

$$\int d\mu \leqq \frac{N'f*\varphi(0)}{\inf\limits_{x\in X} N'f*\varphi(x)}.$$

Le terme droit ne dépend pas de $\mu$, et donc la constante $C_N$ introduite dans (3) du lemme 2.3 est $\leqq$ le terme droit, d'où $C_N < +\infty$. D'après le lemme 2.3, on voit $N \lll N$, d'où (3)$\Rightarrow$(1).

Montrons finalement (4)$\Rightarrow$(1). On peut supposer $N \neq 0$. D'après le lemme 2.3, il suffit de montrer que, quelle que soit $\mu$ une mesure positive dans $X$ à support compact, $\int d\mu \leqq 1$ dès que $N*\mu \leqq N$ dans $X$. Soit $a$ une constante telle que $a > \int d\mu = \int d\check{\mu}$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}\check{\mu})^n$ est vaguement convergente et

$$\int d \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\check{\mu}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\int d\check{\mu}\right)^n = \frac{a}{a - \int d\check{\mu}} < +\infty .$$

Soit $f$ la fonction donnée dans l'énoncé (4). On a, pour toute $\varphi$ de $C_K^+$,

$$\begin{aligned}
&\int \varphi(x+y)dN'*(f\xi)(y)d \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\check{\mu}\right)^n(x) \\
&\qquad = \int \varphi(x+y)N'f(y)d\xi(y)d \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\check{\mu}\right)^n(x) \\
&\qquad \leqq (\operatorname*{ess.sup}_{x\in X} N'f(x)) \int \varphi d\xi \int d \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\check{\mu}\right)^n < +\infty .
\end{aligned}$$

Donc la convolution $(N'*(f\xi))* \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}\check{\mu})^n$ a un sens. Comme $f \neq 0$, pour toute $\varphi$ de $C_K^+$, il existe $\psi$ de $C_K^+$ telle que $\check{f}*\psi \geqq \varphi$ sur $X$, et donc

$$\begin{aligned}
&\iint \varphi(x+y)dN'(y)d \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\check{\mu}\right)^n(x) \\
&\qquad \leqq \iint \check{f}*\psi(x+y)dN'(y)d \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\mu\right)^n(x) \\
&\qquad = \iint \psi(x+y)dN'*(f\xi)(y)d \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\check{\mu}\right)^n(x) < +\infty .
\end{aligned}$$

Par conséquent, la convolution $N'* \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}\check{\mu})^n$ a aussi un sens. On pose $N'' = N'*(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}\check{\mu})^n$ et $\tilde{\mu}_a = \mu*\check{\mu}/a$. Comme

$$N'' - N''*\tilde{\mu}_a = N' + N'* \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\check{\mu}\right)^n - N'*\mu* \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\check{\mu}\right)^n$$

$$= N' + (N' - N'*\mu)* \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\check{\mu}\right)^n \geqq N' \geqq 0$$

dans $X$ et $N' \neq 0$, le lemme 2.1 donne que $\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{\mu}_a)^n$ est vaguement convergente. Comme $\tilde{\mu}_a$ est symétrique par rapport à l'origine, le lemme 2.2 donne $\int d\tilde{\mu}_a \leqq 1$, d'où $\int\left(d\mu\right)^2 = a\int d\tilde{\mu}_a \leqq a$. En faisant $a \downarrow \int d\mu$, on arrive à $\int d\mu \leqq 1$. On voit ainsi que (4)⇨(1) a lieu.

La démonstration est ainsi complète.

Le théorème 2 donne immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au principe de domination. On a alors*:

(1) *Si $N$ est symétrique, alors $N$ satisfait au principe complet du maximum.*

(2) *S'il existe une fonction $f \neq 0$ de $C_K^+$ telle que $Nf$ ait un sens et que* $\text{ess.}\inf_{x \in X} Nf(x) > 0$, *alors $N$ satisfait au principe complet du maximum.*

(3) *S'il existe une fonction $f \neq 0$ de $C_K^+$ telle que $\sup_{x \in X} N*f(x) < +\infty$, alors $N$ satisfait au principe complet du maximum.*

## §3. Le principe relatif de domination et la résolvante

On dit qu'une famille $(N_p)_{p>0}$ de noyaux de convolution sur $X$ est une *résolvante* si, pour tous $p>0$ et $q>0$, $N_p*N_q$ a un sens et

(7) $$N_p - N_q = (q-p)N_p*N_q \qquad \text{(Equation résolvante)}.$$

Remarque 3.1. Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$. Une résolvante $(N_p)_{p>0}$ satisfaisant à $\lim_{p\to 0} N_p = N$ (vaguement) est uniquement déterminée lorsqu'elle existe.

En effet, soient $(N_p)_{p>0}$ et $(N'_p)_{p>0}$ deux résolvantes telles que $\lim_{p\to 0} N_p = \lim_{p\to 0} N'_p = N$. En faisant $q \downarrow 0$ dans (7), on obtient que, pour tout $p>0$, $N = N_p + pN*N_p = N'_p + pN*N'_p$. Donc

$$(pN+\varepsilon)*(\varepsilon - pN_p) = (pN+\varepsilon)*(\varepsilon - pN'_p) = \varepsilon.$$

Comme $N \leqq pN*N_p$ dans $X$ et $N*N'_p$ a un sens, la convolution $N*N_p*N'_p$ a un sens. Donc

$$\varepsilon - pN_p = (pN+\varepsilon)*(\varepsilon - pN_p)*(\varepsilon - pN'_p) = \varepsilon - pN'_p,$$

d'où $N_p = N'_p$.

Dans ce cas, en posant $N_0 = N$, $(N_p)_{p \geqq 0}$ s'appelle la résolvante associée au noyau $N$.

Lemme 3.1. *Soient $N$ un noyau de convolution sur $X$ et $(N_p)_{p \geqq 0}$ est la* *résolvante associée à $N$. Alors, pour tout $p>0$,*

$$N=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n\,.$$

Fournons la démonstration. En faisant $q\to 0$ dans (7), on obtient que $N*N_p$ a un sens et $N-N_p=pN*N_p$. Pour notre égalité, on peut supposer $N\neq 0$, car si $N=0$, alors $N_p$ s'annule aussi. D'après le lemme 2.1, $\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n$ est vaguement convergente et

$$\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n = pN-p\lim_{n\to+\infty}N*(pN_p)^n$$

(cf. (6)). Donc $N\geqq p^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n$. Réciproquement, soit $q$ un nombre avec $0<q<p$. En utilisant (6) et (7) on a aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty}((p-q)N_p)^n = (p-q)N_q-(p-q)\lim_{n\to+\infty}N_q*((p-q)N_p)^n\,.$$

Comme $N_q\leqq N$ dans $X$, on a, pour tout l'entier $m>0$,

$$N_q*((p-q)N_p)^m\leqq\left(\frac{p-q}{p}\right)^m N*(pN_p)^m\leqq\left(\frac{p-q}{p}\right)^m N\,.$$

Donc

$$(p-q)N_q=\sum_{n=1}^{\infty}((p-q)N_p)^n\leqq\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n\,.$$

En faisant $q\downarrow 0$, on arrive à $N\leqq P^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n$. Par conséquent on obtient l'égalité demandée.

La remarque suivante est obtenue par un calcul élémentaire et bien connue (cf. par exemple, [2]).

REMARQUE 3.2. Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ de la forme $N=a(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma)^n)$, où $a$ est une constante positive et où $\sigma$ est une mesure positive dans $X$. Alors il existe la résolvante $(N_p)_{p\geqq 0}$ associée au noyau $N$ et, pour tout $p>0$,

$$N_p=\frac{a}{ap+1}\left(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{ap+1}\sigma\right)^n\right).$$

Le lemme 3.1 et la présente remarque donnent que, pour un noyau de convolution $N$ quelconque sur $X$ auquel la résolvante est associée et pour une constante $c>0$ quelconque, il existe la résolvante associée au noyau $N+c\varepsilon$.

La remarque suivante est aussi connue.

REMARQUE 3.3. Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ auquel la résolvante $(N_p)_{p \geqq 0}$ est associée. Alors, pour tout $p>0$, il existe la résolvante associée au noyau $N_p$. On voit facilemment que $(N_{p+q})_{q \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau $N_p$.

Fournons une caractérisation de la résolvante associée au noyau donné.

LEMME 3.2. *Soient $N$ un noyau de convolution sur $X$ et $(N_p)_{p \geqq 0}$ une famille de noyaux de convolution sur $X$. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *$(N_p)_{p \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau $N$.*

(2) *Pour tout $p>0$, $(pN+\varepsilon)*N_p=N$ et $\lim_{p \to 0} N_p=N_0=N$ (vaguement).*

DÉMONSTRATION. L'implication (1)⇒(2) est évidente. Montrons son inverse. Pour cela, il suffit de montrer l'équation résolvante. Soient $p>0$ *et* $q>0$ quelconque. On a

$$\begin{aligned}(pN+\varepsilon)*N_p &= (qN+\varepsilon)*N_q = (pN+\varepsilon)*N_q+(q-p)N*N_q \\ &= (pN+\varepsilon)*N_q+(q-p)(pN+\varepsilon)*N_p*N_q = (pN+\varepsilon)*(N_q+(q-p)N_p*N_q).\end{aligned}$$

En utilisant encore $N=(pN+\varepsilon)*N_p$, on a

$$N*N_p = N*(N_q+(q-p)N_p*N_q).$$

Par conséquent

$$N_p = N_q+(q-p)N_p*N_q,$$

d'où l'équation résolvante a lieu. Le lemme 3.2 est ainsi démontré.

Le lemme suivant est bien connu (cf. par exemple, la proposition 2 dans [4]).

LEMME 3.3. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ de la forme $N=a(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma)^n)$, où $a$ est une constante$>0$ et $\sigma$ est une mesure positive dans $X$. Alors $N$ satisfait au principe de domination.*

En généralisant le cadre des noyaux de convolution sur $X$ de la présente forme, J. Deny a défini un cadre plus large suivant des noyaux de convolution sur $X$ (cf. [2]).

Un noyau de convolution $N \neq 0$ sur $X$ est dit *associé* (à une famille fondamentale) s'il existe une base de voisinages compacts $\mathscr{V}$ de l'origine telle qu'à $V \in \mathscr{V}$ quelconque, on puisse associer une mesure positive $\sigma_V$ dans $X$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(a) $N \geqq N*\sigma_V$ *dans* $X$.

(b) $\operatorname{supp}(N-N*\sigma_V) \subset V$.

(c) $\lim_{n \to +\infty} N*(\sigma_V)^n = 0$ (*vaguement*).

REMARQUE 3.4. La présente définition est un peu différente de celle par J. Deny. On remarque qu'il n'y a pas la condition $N \neq N*\sigma_V$ qui se trouve dans la définition par J. Deny.

REMARQUE 3.5. Soit $N$ un noyau de convolution de la même forme que dans le lemme 3.3. En posant $\mathscr{V}$ = la totalité des voisinages compacts de l'origine et $\sigma_V = \sigma$ pour tout $V$ de $\mathscr{V}$, on voit que $N$ est associé.

Le lemme suivant est généralisation du lemme 3.3.

LEMME 3.4. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$. Si $N$ est associé, alors $N$ satisfait au principe de domination.*

J. Deny [2] montre qu'un noyau associé est un noyau de convolution de Hunt (voir §. 5), et donc le lemme 3.4 est connu. Nous donnerons ici la démonstration dirécte. Supposons que, pour deux fonctions $f \neq 0$ et $g$ de $C_K^+$, $N*f \leqq N*g$ sur $\mathrm{supp}(f)$. Posons $\omega = \{x \in X; f(x) > 0\}$ et, pour un entier $m \geqq 1$ quelconque, $f_m = f - \inf(f, 1/m)$. Alors on peut choisir $V \in \mathscr{V}$ tel que $\mathrm{supp}(f_m) + V \subset \omega$. Posons $\eta_V = N - N*\sigma_V$. Comme $N \neq 0$, le lemme 2.1 donne que, pour tout l'entier $n > 0$, $(\sigma_V)^n$ et $N*(\sigma_V)^n$ sont définies, et on a $N*(\sigma_V)^n \geqq N*(\sigma_V)^{n+1}$ dans $X$. En remarquant $N \neq 0$ et la condition (c) qui apparaît dans la définition d'un noyau associé, on voit facilement $\eta_V \neq 0$. D'après le lemme 2.1, $\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_V)^n$ est vaguement convergente. D'après la condition citée ci-dessus et l'égalité (6), on a encore

$$N = \eta_V * \Big(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_V)^n\Big).$$

Si la totalité des voisinages compacts $V$ appartenant à $\mathscr{V}$ et satisfaisant à $\sigma_V = 0$ forme une base de voisinages de l'origine, alors, en vertu de la condition (b) qui apparaît dans la définition d'un noyau associé, $N$ est proportionnel à $\varepsilon$. Dans ce cas, il est évident que $N$ satisfait au principe de domination. Donc on peut supposer que, quel que soit $V$ de $\mathscr{V}$, $\sigma_V \neq 0$. Montrons $N*g \geqq N*f_m$ sur $X$. Posons $u_m = \inf(N*f_m, N*g)$; alors $u_m*\sigma_V$ a un sens et $u_m \geqq u_m*\sigma_V$ sur $X$. Posons $h_m = u_m - u_m*\sigma_V$; alors $h_m$ est une fonction non-négative, finie et continue. Comme

$$\lim_{n \to +\infty} u_m*(\sigma_V)^n(x) \leqq \lim_{n \to +\infty} N*g*(\sigma_V)^n(x) = 0$$

sur $X$, on a

$$u_m = \Big(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_V)^n\Big) * h_m.$$

Soit $x$ un point de $\omega$ quelconque. Alors $N*f_m(x) = u_m(x)$ et

$$h_m(x) = u_m(x) - u_m*\sigma_V(x) \geqq N*f_m(x) - N*f_m*\sigma_V(x) = \eta_V*f_m(x).$$

Comme $\operatorname{supp}(\eta_V * f_m) = \operatorname{supp}(\eta_V) + \operatorname{supp}(f_m) \subset V + \operatorname{supp}(f_m) \subset \omega$, on a $h_m \geqq \eta_V * f_m$ sur $X$ d'où

$$u_m \geqq (\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_V)^n) * \eta_V * f_m = N * f_m$$

sur $X$. Par conséquent $u_m = N * f_m$ sur $X$ d'où $N * f_m \leqq N * g$ sur $X$. En faisant $m \uparrow +\infty$, on arrive à $N * f \leqq N * g$ sur $X$. D'après la proposition 1.2, on voit que $N$ satisfait au principe de domination. Le lemme 3.4 est ainsi démontré.

Le troisième théorème est de fournir des caractérisations de l'existence de la résolvante associée au noyau donné.

THÉORÈME 3. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *Il existe la résolvante $(N_p)_{p \geqq 0}$ associée au noyau $N$.*

(2) *Posons $\mathscr{V}_c$ la totalité des voisinages compacts de l'origine. $N$ satisfait au principe de domination et*

$$\lim_{\substack{V \uparrow X \\ V \in \mathscr{V}_c}} N_{\mathscr{C}V} = 0 \qquad (vaguement),$$

*où $N_{\mathscr{C}V}$ est le noyau de convolution balayé de $N$ sur $\mathscr{C}V$ relativement à $(N, N)$ dès que $N \neq 0$ et où $N_{\mathscr{C}V} = 0$ ($\forall V \in \mathscr{V}_c$) dès que $N = 0$.*

(3) *$N$ satisfait au principe de domination et il existe une suite $(N^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ de noyaux de convolution sur $X$ telle que l'on ait $N \prec N^{(n)}$, $N \geqq N^{(n)}$ ($\forall n \geqq 1$), $\lim_{n \to +\infty} N^{(n)} = 0$ (vaguement) et que $N * (N - N^{(n)})$ ait un sens.*

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord (1)$\Rightarrow$(2). On peut supposer évidemment $N \neq 0$. D'après les lemmes 3.1 et 3.3, on voit que, pour une constante $c > 0$ quelconque, $N + c\varepsilon$ satisfait au principe de domination, et donc la proposition 1.1 donne le principe de domination pour $N$. Comme $(N_{\mathscr{C}V})_{V \in \mathscr{V}_c}$ est une famille filtrante à gauche lorsque $V \uparrow X$ (voir la remarque de la fin dans § 1), $\lim_{V \uparrow X} N_{\mathscr{C}V}$ a un sens. On prend une suite $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts relativement compacts de $X$ telle que $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = X$. Pour $V \in \mathscr{V}_c$ quelconque, le théorème 1 donne l'existence d'une mesure balayée $\varepsilon'_{\mathscr{C}V,n}$ de $\varepsilon$ sur $\mathscr{C}V \cap \omega_n$ relativement au noyau $N$. D'après le lemme 1.7, $N * \varepsilon'_{\mathscr{C}V,n}$ est le $N$-potentiel balayé de $N * \varepsilon'_{\mathscr{C}V,n+1}$ sur $\mathscr{C}V \cap \omega_n$ relativement au noyau $N$, et donc on voit que la suite $(N * \varepsilon'_{\mathscr{C}V,n})_{n=1}^{\infty}$ est croissante. En remarquant la manière de la construction de $N_{\mathscr{C}V}$ dans la proposition 1.4, on voit que

$$N_{\mathscr{C}V} = \lim_{n \to +\infty} N * \varepsilon'_{\mathscr{C}V,n} \qquad (vaguement).$$

Comme $N \neq 0$ et $N * \varepsilon'_{\mathscr{C}V,n} \leqq N$ dans $X$, le lemme 1.1 donne que $(\varepsilon'_{\mathscr{C}V,n})_{n=1}^{\infty}$

est vaguement bornée. Alors on peut supposer que $(\varepsilon'_{\mathscr{C}V,n})_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers une limite $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ lorsque $n\to+\infty$. Evidemment on a supp $(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})\subset\overline{\mathscr{C}V}$ et $N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}\leqq N$ dans $X$. Soit $p$ un nombre$>0$ quelconque. Pour $f\in C_K^+$ quelconque, on choisit une fonction $g$ de $C_K^+$ telle que $\check{N}*g\geqq f$ sur $X$. Comme

$$0\leqq f*\check{\varepsilon}'_{\mathscr{C}V,n}\leqq \check{N}*\widecheck{\varepsilon'_{\mathscr{C}V,n}}*g\leqq \check{N}*g \qquad sur \quad X$$

et, d'après le lemme 3.2,

$$\int \check{N}*g\,dN_p=\int g\,dN*N_p=\frac{1}{p}\int g\,d(N-N_p)<+\infty\,,$$

le théorème de Lebesgue donne que

$$\int f\,dN_p*\varepsilon'_{\mathscr{C}V,n}=\int f*\check{\varepsilon}'_{\mathscr{C}V:n}\,dN_p\longrightarrow\int f*\check{\varepsilon}'_{\mathscr{C}V}\,dN_p=\int f\,dN_p*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$$

lorsque $n\to+\infty$. Comme $f$ est quelconque,

$$\lim_{n\to+\infty}N_p*\varepsilon'_{\mathscr{C}V,n}=N_p*\varepsilon'_{\mathscr{C}V} \qquad (vaguement).$$

On prend une suite $(V_m)_{m=1}^{\infty}$ de $\mathscr{V}_c$ telle que $\mathscr{C}V_m\supset\overline{\mathscr{C}V_{m+1}}$ ($\forall m\geqq 1$) et $\bigcup_{m=1}^{\infty}V_m=X$. Comme $\mathrm{supp}(\varepsilon'_{\mathscr{C}V_m})\subset\mathscr{C}V_m$, $\lim_{m\to+\infty}\varepsilon'_{\mathscr{C}V_m}=0$ (vaguement). De la même manière comme ci-dessus, on a

$$\lim_{n\to+\infty}N_p*\varepsilon'_{\mathscr{C}V_m}=0 \qquad (vaguement).$$

D'après le lemme 3.2, on a

$$\begin{aligned}N_{\mathscr{C}V_m}*(pN_p)&=\lim_{n\to+\infty}N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V_m,n}*(pN_p)=\lim_{n\to+\infty}(N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V_m,n}-N_p*\varepsilon'_{\mathscr{C}V_m,n})\\&=N_{\mathscr{C}V_m}-N_p*\check{\varepsilon}'_{\mathscr{C}V_m}.\end{aligned}$$

La suite $(N_{\mathscr{C}V_m})_{m=1}^{\infty}$ étant décroissante, $N'=\lim_{m\to+\infty}N_{\mathscr{C}V_m}$ a un sens et $N'*(pN_p)=N'$. D'après le lemme 2.1, pour tout l'entier $m\geqq 1$, $N'*(pN_p)^m=N'$. D'après le lemme 3.1, on a $\lim_{n\to+\infty}N*(pN_p)^n=0$ (vaguement), et donc $N'=\lim_{m\to+\infty}N'*(pN_p)^m=0$, car $N'\leqq N$, d'où $\lim_{m\to+\infty}N_{\mathscr{C}V_m}=0$ (vaguement). On a ainsi

$$\lim_{\substack{V\uparrow X\\ V\in\mathscr{V}_c}}N_{\mathscr{C}V}=0 \qquad (vaguement),$$

d'où (1)$\Rightarrow$(2).

On voit facilement (2)$\Rightarrow$(3). En effet, en remarquant que $(N_{\mathscr{C}V})_{V\in\mathscr{V}_c}$ est filtrante à gauche lorsque $V\uparrow X$ et que $X$ est dénombrable à l'infini, on voit qu'il existe une suite $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathscr{V}_c$ telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X$ et $\lim_{n\to+\infty} N_{\mathscr{C}V_n} = 0$ (vaguement). Comme $N - N_{\mathscr{C}V_n}$ est à support compact, la convolution $N*(N - N_{\mathscr{C}V_n})$ a un sens. L'inégalité $N \geqq N_{\mathscr{C}V_n}$ résulte de la définition de $N_{\mathscr{C}V_n}$ et $N \prec N_{\mathscr{C}V_n}$ en résulte aussi.

Montrons finalement que (3) implique (1). On a d'abord, pour tout $p>0$, $pN+\varepsilon \prec N$. En effet, pour $f$, $g \in M_K^+$ quelconque, l'inégalité $pNf+f \leqq Ng$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$ implique $pNf \leqq Ng$ $\xi-p.p.$ sur $K_f$, et donc $pNf \leqq Ng$ $\xi-p.p.$ sur $X$. On a ainsi $pNf+f \leqq Ng$ $\xi-p.p.$ dans $\mathscr{C}K_f$, d'où $pNf+f \leqq Ng$ $\xi-p.p.$ sur $X$. On prend une suite $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts relativement compacts de $X$ telle que $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = X$. D'après le théorème 1, il existe une mesure balayée $\varepsilon'_{p,n}$ de $\varepsilon$ sur $\omega_n$ relativement à $(pN+\varepsilon, N)$. On remarque ici que le principe de domination pour $pN+\varepsilon$ résulte de la proposition 1.1. Comme $(pN+\varepsilon)*\varepsilon'_{p,n} \leqq (pN+\varepsilon)*\varepsilon'_{p,n+1}$ dans $\omega_{n+1}$ et $\mathrm{supp}(\varepsilon'_{p,n}) \subset \overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$, le lemme 1.2 donne $(pN+\varepsilon)*\varepsilon'_{p,n} \leqq (pN+\varepsilon)*\varepsilon'_{n+1}$ dans $X$, d'où $((pN+\varepsilon)*\varepsilon'_{p,n})_{n=1}^{\infty}$ est croissante. Comme $pN+\varepsilon \prec N$, le corollaire 5 du théorème 1 donne que $(N*\varepsilon'_{p,n})_{n=1}^{\infty}$ est aussi croissante. Comme $(pN+\varepsilon)*\varepsilon'_{p,n} = (pN+\varepsilon)*\varepsilon'_{p,n+1}$ dans $\omega_n$, il s'en suit que $\varepsilon'_{p,n} \geqq \varepsilon'_{p,n+1}$ dans $\omega_n$. On voit ainsi que

$$\lim_{n\to+\infty} (pN+\varepsilon)*\varepsilon'_{p,n} = N \qquad (vaguement)$$

et que $(\varepsilon'_{p,n})_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers une limite $N_p$ lorsque $n \to +\infty$. Pour toute $f$ de $C_K^+$,

$$\begin{aligned}\int (pN+\varepsilon)*f d\check{N}_p &\leqq \liminf_{n\to+\infty} \int (pN+\varepsilon)*f d\check{\varepsilon}'_{p,n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} (pN+\varepsilon)*\varepsilon'_{p,n}*f(0) = N*f(0),\end{aligned}$$

et donc $N*N_p$ a un sens et $(pN+\varepsilon)*N_p \leqq N$ dans $X$. Montrons $N \leqq (pN+\varepsilon)*N_p$ dans $X$. Si $N=0$, alors cela est évident. On suppose $N \neq 0$. Soit $f \in C_K^+$ quelconque; alors on choisit $g \in C_K^+$ telle que $\check{N}*g \geqq f$ sur $X$. Comme

$$0 \leqq \check{\varepsilon}'_{p,n}*f \leqq \check{N}*\check{\varepsilon}'_{p,n}*g \leqq \check{N}*g \qquad sur \quad X$$

et, pour tout $m \geqq 1$,

$$\int \check{N}*g d(N-N^{(m)}) = \int g dN*(N-N^{(m)}) < +\infty,$$

le théorème de Lebesque donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int f*\check{\varepsilon}'_{p,n} d(N-N^{(m)}) = \int f*\check{N}_p d(N-N^{(m)}).$$

On a donc, pour tout $m \geqq 1$,

$$\lim_{n\to+\infty}(N-N^{(m)})*\varepsilon'_{p,n} = (N-N^{(m)})*N_p \qquad (vaguement). \tag{9}$$

D'après le corollaire 5 du théorème 1, on a $N^{(m)}*\varepsilon'_{p,n} \leqq N^{(m)}$ dans $X$. Donc, pour toute $f$ de $C_K^+$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int fdN*\varepsilon'_{p,n} &\leqq \lim_{n\to+\infty}\int fd(N-N^{(m)})*\varepsilon'_{p,n} + \limsup_{n\to+\infty}\int fdN^{(m)}*\varepsilon'_{p,n} \\ &\leqq \int fd(N-N^{(m)})*N_p + \int fdN^{(m)} \leqq \int fdN*N_p + \int fdN^{(m)}.\end{aligned}$$

En faisant $m \uparrow +\infty$, on arrive à

$$\lim_{n\to+\infty}\int fdN*\varepsilon'_{p,n} \leqq \int fdN*N_p.$$

Par conséquent $(pN+\varepsilon)*N_p \geqq N$ dans $X$. On voit ainsi $(pN+\varepsilon)*N_p = N$ dans $X$. Montrons finalement que $\lim_{p\to 0} N_p = N$. On peut supposer encore $N \neq 0$. Ayant $N_p \leqq N$ pour tout $p>0$, on voit que $(pN_p)_{p>0}$ converge vaguement vers 0 lorsque $p\to 0$. Soit $m$ un entier $\geqq 1$ quelconque. Comme $N*(pN_p) \leqq N$ dans $X$, $N \neq 0$ et $N*(N-N^{(m)})$ a un sens, on obtient, de la même maniére que dans la dèmonstration de l'égalité (9),

$$\lim_{p\to 0} p(N-N^{(m)})*N_p = 0 \qquad (vaguement).$$

D'après le corollaire 5 du théorème 1, on a $N^{(m)}*(pN_p) \leqq N^{(m)}$ dans $X$. Donc, pour toute $f$ de $C_K^+$,

$$\limsup_{p\to 0} p\int fdN^{(m)}*N_p \leqq \int fdN^{(m)},$$

et par suite

$$\limsup_{p\to 0} p\int fdN*N_p \leqq \int fdN^{(m)}.$$

En faisant $m\to+\infty$, on arrive à $\lim_{p\to 0} p\int fdN*N_p = 0$ d'où $pN*N_p$ converge vaguement vers 0 avec $p\to 0$. On a donc

$$\lim_{p\to 0} N_p = N \qquad (vaguement).$$

Par conséquent le lemme 3.2 donne l'existence de la résolvante $(N_p)_{p\geqq 0}$ associée au noyau $N$, d'où (3)$\Rightarrow$(1).

La démonstration est ainsi complète.

Corollaire 1. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au principe de domination. Si $(N)^2=N*N$ a un sens, alors il existe la résolvante associée au noyau $N$.*

En effet, en posant $N^{(m)}=0$ $(m=1, 2,\cdots)$, on voit que $N$ satisfait à l'énoncé (3) du théorème 3. Le corollaire 1 est un théorème de Kishi. M. Kishi [6] le montre pour un noyau d'un cadre plus large (voir le théorème 1 dans [6]).

Le corollaire suivant est obtenu par J. Deny (cf. [2]).

Corollaire 2. *Pour un noyau associé $N$, il existe la résolvante associée au noyau $N$.*

En effet, d'après le lemme 3.4, $N$ satisfait au principe de domination. Soient $\mathscr{V}$ une base de voisinages compacts de l'origine associée à $N$ et $V\in\mathscr{V}$ quelconque. On désigne par $\sigma_V$ une mesure positive donnée dans la définition d'un noyau associé. En posant $N^{(m)}=N*(\sigma_V)^m$ $(m=1, 2,\cdots)$, on a $N\geqq N^{(m)}$ et $\lim_{m\to 0} N^{(m)}=0$ (vaguement) (voir les conditions (a) et (c) dans la définition d'un noyau associé). D'après le corollaire 2 du théorème 1, on a $N\prec N^{(m)}$. On voit que $N$ satisfait à l'énoncé (3) du théorème 3.

En remarquant l'énoncé (2) du théorème 3, on obtiendra le corollaire suivant:

Corollaire 3. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ auquel la résolvante est associée. Alors, pour une mesure positive $\mu$ dans $X$ telle que $N*\mu$ ait un sens et pour un ouvert $\omega$ de $X$ quelconque, il existe une mesure positive $\mu'$ dans $X$ portée par $\bar{\omega}$ telle que l'on ait: (a) $N*\mu\geqq N*\mu'$ dans $X$. (b) $N*\mu=N*\mu'$ dans $\omega$. (c) Quelle que soit $\nu$ une mesure positive dans $X$ portée par $\bar{\omega}$, $N*\nu\geqq N*\mu'$ dans $X$ dès que $N*\nu\geqq N*\mu$ dans $\omega$.*

Démonstration. Si $N=0$, alors notre énoncé est évident. On suppose $N\neq 0$. On peut choisir une suite croissante $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts relativement compacts de $X$ telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n=\omega$. D'après le corollaire 3 du théorème 1 et le théorème 3, il existe une mesure balayée $\mu_n'$ de $\mu$ sur $\omega_n$ relativement au noyau $N$. Comme $N\neq 0$ et $N*\mu_n'\leqq N*\mu$ dans $X$, on peut supposer que $(\mu_n')_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers une limite $\mu'$ dans $X$ lorsque $n\to+\infty$ (cf. le lemme 1.1). On a alors $\mathrm{supp}(\mu')\subset\bar{\omega}$ et $N*\mu'\leqq N*\mu$ dans $X$. Pour tout $V$ de $\mathscr{V}_c$, $N-N_{\mathscr{C}V}$ est à support compact, et donc

$$\lim_{n\to+\infty}(N-N_{\mathscr{C}V})*\mu_n' = (N-N_{\mathscr{C}V})*\mu' \qquad (\textit{vaguement}).$$

Comme $N\prec N_{\mathscr{C}V}$ et $N\geqq N_{\mathscr{C}V}$ dans $X$, le corollaire 5 du théorème 1 donne que $N_{\mathscr{C}V}*\mu_n'\leqq N_{\mathscr{C}V}*\mu$ dans $X$. Donc, pour toute $f$ de $C_K^+$,

$$\limsup_{n\to+\infty}\int fdN*\mu_n' \leqq \int fd(N-N_{\mathscr{C}V})*\mu' + \limsup_{n\to+\infty}\int fdN_{\mathscr{C}V}*\mu_n'$$

$$\leqq \int f dN*\mu' + \int f dN_{\mathscr{C}V}*\mu .$$

En remarquant l'énoncé (2) du théorème 3, on obtient que $(N_{\mathscr{C}V})_{V\in\mathscr{V}_c}$ converge d'une manière décroissante vers 0 lorsque $V\uparrow X$. Donc $\lim_{V\uparrow X}\int f dN_{\mathscr{C}V}*\mu=0$ (vaguement) d'où

$$\limsup_{n\to+\infty}\int f dN*\mu'_n \leqq \int f dN*\mu' .$$

En ulitisant la semi-continuité inférieure de la convolution, on peut conclure

$$\lim_{n\to+\infty}\int f dN*\mu'_n = \int f dN*\mu' .$$

Comme $f$ est quelconque,

$$\lim_{n\to+\infty} N*\mu'_n = N*\mu' \qquad (\textit{vaguement}).$$

On a donc $N*\mu'=N*\mu$ dans $\omega$. Montrons finalement que $\mu'$ vérifie la condition (c). Soit $\nu$ une mesure positive portée par $\bar{\omega}$ telle que $N*\nu\geqq N*\mu$ dans $\omega$. On désigne par $\nu'_n$ une mesure balayée de $\nu$ sur $\omega_n$ relativement au noyau $N$. Alors $N*\mu\leqq N*\nu=N*\nu'_n$ dans $\omega_n$ et $\operatorname{supp}(\nu'_n)\subset\overline{\omega_n}$. D'après le corollaire 3 du théorème 1, $N*\nu'_n\geqq N*\mu'_n$ dans $X$ d'où $N*\mu'_n\leqq N*\nu$. En faisant $n\to+\infty$, on arrive à $N*\mu'\leqq N*\nu$ dans $X$. On voit ainsi que $\mu'$ vérifie la condition (c), et notre corollaire est démontré.

On dit aussi que $\mu'$ est une mesure balayée de $\mu$ sur $\omega$ relativement au noyau $N$.

Remarque 3.6. Soit $N$ le même que ci-dessus. Pour tout l'ouvert $\omega$ de $X$, $N_\omega=N*\varepsilon'_\omega$, où $N_\omega$ est le noyau de convolution balayé de $N$ sur $\omega$ relativement à $(N, N)$ et où $\varepsilon'_\omega$ est une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega$ relativement au noyau $N$. Cela est un résultat immédiat du présent corollaire.

Remarque 3.7. Soit $N$ le même que ci-dessus. Pour $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque, on note $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\mathscr{C}V$ relativement au noyau $N$. Si $N\neq N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$, alors $\lim_{n\to+\infty} N*(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n=0$ (vaguement).

En effet, d'après le lemme 2.1, $\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n$ est vaguement convergente, et donc $\lim_{n\to+\infty}(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n=0$ (vaguement). La suite $(N*(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n)_{n=1}^{\infty}$ étant décroissante, $N'=\lim_{n\to+\infty} N*(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n$ (vaguement) a un sens. Soit $U\in\mathscr{V}_c$. Comme

$$\lim_{n\to+\infty}(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}U})*(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n = 0 \qquad (\textit{vaguement}),$$

on a $N'=N'*\varepsilon'_{\mathscr{C}U}$ dans $X$. Ayant $N\geqq N'$ dans $X$ et $\lim\limits_{U\uparrow X} N*\varepsilon'_{\mathscr{C}U}=0$ (vaguement), on a $N'=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} N*(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n=0$ (vaguement).

Pour simplifier la notation, on désigne par $\mathscr{R}(X)$ l'ensemble constitué par tout le noyau de convolution sur $X$ auquel la résolvante est associée. On a montré que $\mathscr{D}(X)$ est vaguement fermé (cf. la proposition 1.3), mais $\mathscr{R}(X)$ n'est pas toujours vaguement fermé.

Exemple. Pour une constante $c$ quelconque, posons $\kappa_{(c)}=\exp(-c|t|)dt$ sur la droite réelle $R^1$. Alors, pour tout $c>0$, $\kappa_{(c)}$ appartient à $\mathscr{R}(R^1)$. Mais $\kappa_{(0)}\notin\mathscr{R}(R^1)$.

En remarquant $\mathscr{R}(X)=\{N\in\mathscr{R}(X);\, N\prec 0\}$, on montrera la proposition suivante:

Proposition 3.1. *Soit $N'$ un noyau de convolution $\neq 0$ sur $X$ auquel la résolvante est associée, et posons $\mathscr{R}_r(N')=\{N\in\mathscr{R}(X);\, N\prec N'\}$. Alors on a:*

(1) *$\mathscr{R}_r(N')$ est vaguement fermé.*

(2) *Pour tout $N$ de $\mathscr{R}_r(N')$, la résolvante $(N_p)_{p\geqq 0}$ associée au noyau $N$ est aussi contenue dans $\mathscr{R}_r(N')$ et, pour un nombre $p>0$ quelconque, l'application $\mathscr{R}_r(N')\ni N\to N_p\in\mathscr{R}_r(N')$ est vaguement continue.*

Pour montrer la proposition 3.1, on doit préparer le lemme suivant:

Lemme 3.5. *Soient $N$ un noyau de convolution appartenant à $\mathscr{R}(X)$ et $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante de mesures positives dans $X$ qui converge vaguement vers une limite $\mu$. S'il existe une mesure positive $\nu$ dans $X$ telle que $N*\nu$ ait un sens et si, pour tout $\alpha\in A$, $N*\mu_\alpha\leqq N*\nu$ dans $X$, alors*

$$\lim_\alpha N*\mu_\alpha = N*\mu \qquad (vaguement).$$

Montrons le lemme 3.5. Pour $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque, le corollaire 3 du théorème 3 donne l'existence d'une mesure balayée $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ de $\varepsilon$ sur $\mathscr{C}V$ relativement au noyau $N$. Comme $\operatorname{supp}(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})\subset V$,

$$\lim_\alpha (N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})*\mu_\alpha = (N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})*\mu \qquad (vaguement).$$

Pour $f\in C_K^+$ quelconque,

$$\limsup_\alpha \int f dN*\mu_\alpha \leqq \lim_\alpha \int fd(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})*\mu_\alpha + \limsup_\alpha \int fdN*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}*\mu_\alpha$$

$$\leqq \int fd(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})*\mu + \int fdN*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}*\nu \leqq \int fd\,N*\mu + \int fdN*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}*\nu\,.$$

Comme $(N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})_{V\in\mathscr{V}_c}$ converge d'une manière décroissante vers 0 lorsque $V\uparrow X$

(cf. le théorème 3 et la remarque 3.6), on a $\lim_{V \uparrow X} N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}*\nu=0$ (vaguement). Donc

$$\limsup_{\alpha} \int f dN*\mu_\alpha \leqq \int df N*\mu .$$

Réciproquement on a

$$\liminf_{\alpha} \int f dN*\mu_\alpha \geqq \int f dN*\mu ,$$

d'où $\lim_{\alpha} \int f dN*\mu_\alpha = \int f dN*\mu$. Comme $f$ est quelconque,

$$\lim_{\alpha} N*\mu_\alpha = N*\mu \qquad (vaguement),$$

d'où le lemme 3.5.

Montrons la proposition 3.1. Soit $N$ un point vaguement adhérent de $\mathscr{R}_r(N')$ quelconque. Si $N=0$, évidemment $N \in \mathscr{R}_r(N')$. On suppose $N \neq 0$. D'après le théorème 3, $\mathscr{R}(X) \subset \mathscr{D}(X)$. Donc la proposition 1.3 donne $N \in \mathscr{D}(X)$. D'après la corollaire 4 du théorème 1, on a $N \prec N'$. Soit $V \in \mathscr{V}_c$ quelconque. En rappelant la proposition 1.4 et sa démonstration, on voit qu'il existe une famille filtrante à droite $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'ouverts relativement compacts de $X$ telle que $\overline{\omega_\alpha} \subset \mathscr{C}V$ et $N*\varepsilon'_\alpha \uparrow N_{\mathscr{C}V}$, où $\varepsilon'_\alpha$ est une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega_\alpha$ relativement au noyau $N$ et où $N_{\mathscr{C}V}$ est le noyau de convolution balayé de $N$ sur $\mathscr{C}V$ relativement à $(N, N)$. Comme $N \neq 0$ et $N*\varepsilon'_\alpha \leqq N$ dans $X$, on peut supposer que $(\varepsilon'_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge vaguement vers une limite $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ (cf. le lemme 1.1). D'après le corollaire 5 du théorème 1, on a $N'*\varepsilon'_\alpha \leqq N'$ dans $X$. Donc le présent lemme 3.5 donne

$$\lim_{\alpha} N'*\varepsilon'_\alpha = N'*\varepsilon'_{\mathscr{C}V} \qquad (vaguement). \tag{10}$$

Pour toute $f$ de $C_K^+$, il existe une fonction $g$ de $C_K^+$ telle que $N*f \leqq N'*g$ sur $\mathrm{supp}(f)$, car $N' \neq 0$. En vertu de $N \prec N'$, $N*f \leqq N'*g$ sur $X$. L'égalité (10) donne $\lim_{\alpha} \int \check{N}'*g d\varepsilon'_\alpha = \int \check{N}'*g f \varepsilon'_{\mathscr{C}V}$. Comme $(\varepsilon'_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge vaguement vers $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$, on voit $\lim_{\alpha} \int N*f d\varepsilon'_\alpha = \int N*f d\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ d'où

$$\lim_{\alpha} \int f dN*\varepsilon'_\alpha = \int f dN*\varepsilon'_{\mathscr{C}V} .$$

Comme $f$ est quelconque,

$$N_{\mathscr{C}V} = \lim_{\alpha} N*\varepsilon'_\alpha = N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V} \qquad dans \quad X .$$

Montrons que $\lim_{V \uparrow X} N_{\mathscr{C}V}=0$ (vaguement). Comme $\mathrm{supp}(\varepsilon'_{\mathscr{C}V}) \subset \mathscr{C}V$, on a $\lim_{V \uparrow X} \varepsilon'_{\mathscr{C}V} =0$. En remarquant $N'*\varepsilon'_{\mathscr{C}V} \leqq N'$ dans $X$, on voit, de la même manière comme ci-dessus, on a

$$\lim_{V\uparrow X} N*\varepsilon'_{\complement V} = 0 \qquad (vaguement).$$

D'après le théorème 3, on a $N\in\mathscr{R}(X)$ d'où $N\in\mathscr{R}_r(N')$. Il s'en suit que l'énoncé (1) a lieu.

La remarque 3.2 donne que, pour $N\in\mathscr{R}(X)$ quelconque, la résolvante $(N_p)_{p\geqq 0}$ associée au noyau $N$ est contenue dans $\mathscr{R}(X)$. D'autre part, d'après le corollaire 2 du théorème 1 et l'égalité $(pN+\varepsilon)*N_p=N$, on a $N_p\prec N$ ($^\forall p>0$). D'après le corollaire 1 du théorème 1, on voit que si $N\prec N'$, alors, pour tout $p>0$, $N_p\prec N'$. Donc la première partie de l'énoncé (2) a lieu.

Montrons finalement que la deuxième partie de (2) a lieu. Soit $(N_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ une famille filtrante de $\mathscr{R}_r(N')$ qui converge vaguement vers $N\in\mathscr{R}_r(N')$. On désigne par $(N_{\alpha,p})_{p\geqq 0}$ et par $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N_\alpha$ et la résolvante associée au noyau $N$, respectivement. Soit $p$ un nombre$>0$ quelconque fixé. Comme $N_{\alpha,p}\leqq N_\alpha$ dans $X$, $(N_{\alpha,p})_{\alpha\in\Lambda}$ est vaguement bornée. Par conséquent il suffit de montrer l'énoncé suivant: *Lorsque $(N_{\alpha,p})_{\alpha\in\Lambda}$ converge vaguement vers une limite $M_p$, alors $N_p=M_p$.* Si $N=0$, alors $N_p$ s'annule aussi. Comme $N_{\alpha,p}\leqq N_\alpha$ et $\lim_\alpha N_\alpha=0$, on a $\lim_\alpha N_{\alpha,p}=0$. Supposons $N\neq 0$; alors on peut supposer que, pour tout $\alpha$ de $\Lambda$, $N_\alpha\neq 0$. Comme $N_\alpha*(pN_{\alpha,p})\leqq N_\alpha$ dans $X$ et $N_\alpha\prec N'$, le corollaire 5 du théorème 1 donne $N'*(pN_{\alpha,p})\leqq N'$ dans $X$. En utilisant le lemme 3.5, on a

$$\lim_\alpha N'*N_{\alpha,p} = N'*M_p \qquad (vaguement).$$

Soit $f\in C_K^+$ quelconque; alors on peut choisir une fonction $g$ de $C_K^+$ telle que $N*f\leqq N'*g$ et $N_\alpha*f\leqq N'*g$ sur $\mathrm{supp}(f)$ ($^\forall\alpha\in\Lambda$), car $N'\neq 0$ et $(N_\alpha*f)_{\alpha\in\Lambda}$ converge uniformément vers $N*f$ sur tout compact de $X$. Donc $N*f\leqq N'*g$ et $N_\alpha*f\leqq N'*g$ sur $X$. Comme $(N_{\alpha,p})_{\alpha\in\Lambda}$ converge vaguement vers $M_p$ et $\lim_\alpha\int\check{N}'*g\,dN_{\alpha,p}=\int\check{N}'*g\,dM_p$, pour un nombre $\delta>0$ quelconque, il existe un compact $K$ de $X$ et $\alpha_0\in\Lambda$ tels que, quel que soit $\alpha>\alpha_0$,

$$\int_{\complement K}\check{N}'*g\,dN_{\alpha,p} < \delta.$$

Soit $\varphi$ une fonction de $C_K^+$ telle que $\varphi=1$ sur $K$ et $0\leqq\varphi\leqq 1$ sur $X$. Alors

$$\limsup_\alpha\int\check{N}_\alpha*f\,dN_{\alpha,p} \leqq \limsup_\alpha\int(\check{N}_\alpha*f)\varphi\,dN_{\alpha,p}+\limsup_\alpha\int(\check{N}_\alpha*f)(1-\varphi)\,dN_{\alpha,p}$$

$$\leqq \int(\check{N}*f)\varphi\,dM_p+\limsup_\alpha\int_{\complement K}(N'*g)\,dN_{\alpha,p} < \int\check{N}*f\,dM_p+\delta.$$

En faisant $\delta \downarrow 0$, on arrive à

$$\limsup_{\alpha} \int \check{N}_\alpha * f dN_{\alpha,p} \leqq \int \check{N} * f dM_p .$$

On a évidemment

$$\liminf_{\alpha} \int \check{N}_\alpha * f dN_{\alpha,p} \geqq \int \check{N} * f dM_p .$$

Comme $f$ est quelconque, on a

$$\lim_{\alpha} N * N_{\alpha,p} = N * M_p \qquad (vaguement).$$

En rappelant $(pN_\alpha + \varepsilon) * N_{\alpha,p} = N_\alpha$ dans $X$, on a $(pN + \varepsilon) * M_p = N$ dans $X$ d'où $(pN + \varepsilon) * M_p = (pN + \varepsilon) * N_p$. Comme $M_p \leqq N$ dans $X$, on a $\lim_{n \to +\infty} M_p * (pN_p)^n = 0$ (vaguement). Donc le lemme 3.1 donne $M_p = N_p$. On voit ainsi que la deuxième partie de (2) a lieu, et donc la proposition 3.1 est démontrée.

La présente proposition donne immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ auquel la résolvante $(N_p)_{p \geqq 0}$ est associée. Pour une constante $c > 0$, on désigne par $((N + c\varepsilon)_p)_{p \geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N + c\varepsilon$. Alors, pour tout $p > 0$,*

$$\lim_{c \to 0} (N + c\varepsilon)_p = N_p \qquad (vaguement).$$

En effet, comme $(N + c\varepsilon) * (c^{-1} N_{c^{-1}}) = N$ dans $X$, on a, pour tout $c > 0$, $N + c\varepsilon \in \mathscr{R}_r(N)$. Donc le corollaire résulte de la proposition 3.1.

## §4. Les noyaux de convolution de Hunt

Rappelons qu'une famille $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ de mesures positives dans $X$ est un *semi-groupe vaguement continu* si $\alpha_0 = \varepsilon$, $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$ ($^\forall t \geqq 0$, $^\forall s \geqq 0$) et si l'application $t \to \alpha_t$ est vaguement continue (c'est-à-dire, pour toute $f$ de $C_K$, $t \to \int f d\alpha_t$ est continue). On dit que $N$ est un *noyau de convolution de Hunt* sur $X$ si $N$ s'écrit, avec un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)$, comme $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$; c'est-à-dire, pour toute $f$ de $C_K$, $\int f dN = \int_0^\infty \int f d\alpha_t dt$ (cf. par exemple, [2]).

Remarque 4.1. Soit $N$ le même que ci-dessus. Pour $p > 0$ quelconque, posons $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt) dt$; alors $(N_p)_{p \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau $N$.

Cela est bien connu (cf. par exemple, [2]). On l'obtient facilement par un calcul élémentaire.

REMARQUE 4.2. Pour un noyau de convolution de Hunt $N$ sur $X$, un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ avec $N=\int_0^\infty \alpha_t dt$ est uniquement déterminé.

En effet, soit $(\alpha'_t)_{t\geqq 0}$ un autre semi-groupe vaguement continu tel que $N=\int_0^\infty \alpha'_t dt$. Alors $\left(\int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt\right)_{p>0}$ et $\left(\int_0^\infty \alpha'_t \exp(-pt)dt\right)_{p>0}$ sont des résolvantes et on a

$$\lim_{p\to 0}\int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt = \lim_{p\to 0}\int_0^\infty \alpha'_t \exp(-pt)dt = N \quad (\textit{vaguement}).$$

L'unicité de résolvante donne que, pour tout $p\geqq 0$ et pour toute $f$ de $C_K^+$,

$$\int_0^\infty \int f d\alpha_t \exp(-pt)dt = \int_0^\infty \int f d\alpha'_t \exp(-pt)dt.$$

Rappelons que $t\to\int f d\alpha_t$ et $t\to\int d\alpha'_t$ sont continues; alors l'injectivité de la transformation de Laplace donne que, pour tout $t\geqq 0$, $\int f d\alpha_t = \int f d\alpha'_t$ d'où $\alpha_t=\alpha'_t$.

On dit que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu associé au noyau $N$. Pour simplifier la notation, on désignera par $\mathscr{H}=\mathscr{H}(X)$ la totalité des noyaux de convolution de Hunt sur $X$. Pour un noyau de convolution $N'$ sur $X$, on notera

$$\mathscr{H}_r(N') = \{N\in\mathscr{H}; N \prec N'\}.$$

REMARQUE 4.3. Soit $N$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$. Alors on a:

(1) $N\neq 0$ et $\mathrm{supp}(N)$ contient l'origine.

(2) Pour toute constante $c>0$, $cN$ est aussi un noyau de convolution de Hunt.

En effet, soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé au noyau $N$. En remarquant que $\alpha_0=\varepsilon$ et $t\to\alpha_t$ est vaguement continue, on voit l'énoncé (1). Pour une constante $c>0$, $(\alpha_{t/c})_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu et $cN=\int_0^\infty \alpha_{t/c}dt$.

Pour un noyau de convolution de Hunt $N$ sur $X$, il est important d'examiner l'allure du semi-groupe vaguement continu associé au noyau $N$. Pour cela, on introduit une fonction. Pour un noyau de convolution de Hunt $N=\int_0^\infty \alpha_t dt$ sur $X$ et pour une fonction universellement mesurable $\varphi\geqq 0$ sur $X$, on note

$$\psi_{N,\varphi}(t) = \int \varphi d\alpha_t \qquad (\forall t \geqq 0).$$

Alors $\psi_{N,\varphi}$ est une fonction (finie ou infini) définie sur $R^+=\{t\in R^1; t\geqq 0\}$.

THÉORÈME 4. *Soient $N'$ et $N''$ deux noyaux de convolution non-zéro sur $X$. Alors, pour tout $N$ de $\mathscr{H}_r(N')$ et pour toute $f$ de $C_K^+$, $\psi_{N,\check{N}'*f}$ est finie et continue sur $R^+$. Pour $f\in C_K^+$ quelconque, l'ensemble*

$$\{\psi_{N,\check{N}'*f};\, N\in\mathscr{H}_r(N'),\, N\geqq N'' \quad \textit{dans} \quad X\}$$

*est une famille normale sur tout compact de $R^+$.* [1]

DÉMONSTRATION. Comme tout le noyau de convolution de Hunt ne s'annule pas, il suffit de montrer la deuxième partie. Soit $f$ une fonction de $C_K^+$ quelconque fixée. Soient $N\in\mathscr{H}_r(N')$ quelconque et $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé au noyau $N$. Pour tout $t\geqq 0$,

$$N*\alpha_t=\int_0^\infty \alpha_t*\alpha_s ds=\int_0^\infty \alpha_{t+s}ds=\int_t^\infty \alpha_s ds\leqq N$$

dans $X$. Comme $N\in\mathscr{H}\subset\mathscr{R}(X)\subset\mathscr{D}(X)$ (cf. la remarque 4.1 et le théorème 3) et $N\prec N'$, le corollaire 5 du théorème 1 donne $N'*\alpha_t\leqq N'$ dans $X$. Donc

$$\psi_{N,\check{N}'*f}(t)=\int N'*fd\alpha_t=\int fdN'*\alpha_t\leqq\int fdN'<+\infty \tag{11}$$

sur $R^+$. Par conséquent l'ensemble

$$\{\psi_{N,\check{N}'*f};\, N\in\mathscr{H}_r(N')\}$$

est uniformément borné sur $R^+$.

Supposons que $N\geqq N''$ dans $X$. Comme $N''\neq 0$, on peut choisir une fonction $g$ de $C_K^+$ telle que $\check{N}''*g\geqq f$ sur $X$. On prend une suite $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ d'ouverts relativement compacts de $X$ telle que, pour $n\geqq 1$ quelconque, $\overline{\omega_n}\subset\omega_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^\infty \omega_n=X$. Désignons par $\varepsilon_n'$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega_n$ relativement à $(N, N')$. Alors $(N*\varepsilon_n')_{n=1}^\infty$ converge d'une manière croissante vers $N'$ avec $n\uparrow+\infty$. Soient $t\geqq 0$, $s\geqq 0$ quelconques. On peut supposer $t\geqq s$. On a

$$|\psi_{N,\check{N}'*f}(t)-\psi_{N,\check{N}'*f}(s)|=\left|\int\check{N}'*fd\alpha_t-\int\check{N}'*fd\alpha_s\right|$$

$$=\left|\int fdN'*\alpha_t-\int fdN'*\alpha_s\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\int fdN*\varepsilon_n'*\alpha_t-\int fdN*\varepsilon_n'*\alpha_s\right|$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^\infty\int fd\alpha_u*\alpha_t*\varepsilon_n'du-\int_0^\infty\int fd\alpha_u*\alpha_s*\varepsilon_n'du\right|$$

1) Précisément, pour tout compact $K$ de $R^+$, l'ensemble des restreintes des éléments de cet ensemble sur $K$ est une famille normale sur $K$.

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^\infty\int fd\alpha_{u+t}*\varepsilon_n' du - \int_0^\infty\int fd\alpha_{u+s}*\varepsilon_n' du\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\int_t^\infty\int fd\alpha_u*\varepsilon_n' du - \int_s^\infty\int fd\alpha_u*\varepsilon_n' du\right| = \lim_{n\to+\infty}\int_s^t\int fd\alpha_u*\varepsilon_n' du$$

$$\leqq \liminf_{n\to+\infty}\int_s^t\int \check{N}''*gd\alpha_u*\varepsilon_n' du \leqq \liminf_{n\to+\infty}\int_s^t\int \check{N}*gd\alpha_u*\varepsilon_n' du$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\int_s^t\int gdN*\varepsilon_n'*\alpha_u du = \int_s^t\int gdN'*\alpha_u du$$

$$\leqq \int_s^t gdN' du = \left(\int gdN'\right)(t-s).$$

Par conséquent $\psi_{N,\check{N}'*f}$ est finie et continue sur $R^+$. En rappelant que $\int gdN'$ ne dépend pas de $N$, on voit que la famille

$$\{\psi_{N,\check{N}*f};\, N\in\mathscr{H}_r(N'),\, N\geqq N'' \quad dans \quad X\}$$

est équi-continue sur $R^+$. Le théorème 4 est ainsi démontré.

On donne une modification du présent théorème.

Théorème 4′. *Soient $N'\neq 0$ un noyau de convolution sur $X$, $f$ une fonction de $C_K^+$ et $A$ une famille de $\mathscr{H}_r(N')$. S'il existe une fonction $g$ de $C_K^+$ telle que, pour $N\in A$ quelconque, $\check{N}*g\geqq f$ sur $X$, alors $\{\psi_{N,\check{N}'*f};\, N\in A\}$ est une famille normale sur tout compact de $R^+$.*

Régardons la démonstration du présent théorème; alors on voit que $N''$ sert l'existence d'une telle fonction $g$.

Remarque 4.4. Nous ne connaissons pas maintenant si, pour un noyau de convolution $N'\neq 0$ sur $X$ et pour $f\in C_K^+$, l'ensemble

$$\{\psi_{N,\check{N}'*f};\, N\in\mathscr{H}_r(N')\}$$

est toujours une famille normale sur tout compact de $R^+$.

Le théorème 4′ et la proposition 3.1 donnent le corollaire suivant.

Corollaire. *Soient $N'\in\mathscr{R}(X)$ et $(N_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante de $\mathscr{H}_r(N')$ qui converge vaguement vers une limite $N\neq 0$. Alors, pour $f\in C_K^+$ quelconque, $(\psi_{N_\alpha,\check{N}'*f})_{\alpha\in A}$ est uniformément convergente sur tout compact de $R^+$.*

Démonstration. Notons $C(R^+)$ l'espace vectoriel topologique des fonctions finies et continues sur $R^+$ muni de la topologie de convergence compacte. Soit $f$ une fonction quelconque donnée. Comme $N\neq 0$, on peut choisir $g\in C_K^+$ telle que $\check{N}*g>f$ sur supp$(f)$. En remarquant que $(\check{N}_\alpha*g)_{\alpha\in A}$ converge uniformément vers $\check{N}*g$ sur tout compact, on peut supposer que, pour $\alpha \in A$ quelconque, $\check{N}_\alpha*g \geqq f$ sur $\operatorname{supp}(f)$ d'où $\check{N}_\alpha*g \geqq f$ sur $X$. D'après le théorème 4', $(\psi_{N_\alpha,\check{N}'*f})_{\alpha\in A}$ est relativement compacte dans $C(R^+)$. Soient $\psi$ et $\psi'$ deux points adhérents de $(\psi_{N_\alpha,\check{N}'*f})_{\alpha\in A}$ quelconques. On désigne par $(N_{\alpha,p})_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N_\alpha$ (cf. la remarque 4.1). Alors, d'après (2) de la proposition 3.1, pour tout $p>0$, $(N_{\alpha,p})_{\alpha\in A}$ est vaguement convergente. Comme $N'*(pN_{\alpha,p})\leqq N'$ dans $X$ (voir le corollaire 5 du théorème 1), le lemme 3.5 donne que, pour tout $p>0$, $(N'*N_{\alpha,p})_{\alpha\in A}$ est vaguement convergente. Comme, pour $\alpha\in A$ quelconque,

$$0 \leqq \psi_{N_\alpha,\check{N}'*f}(t) \leqq \int f dN' \qquad sur \quad R^+$$

(cf. la formule (11)), on a, pour $p>0$ quelconque,

$$\lim_\alpha \int f dN'*N_{\alpha,p} = \lim_\alpha \int \check{N}'*f dN_{\alpha,p} = \lim_\alpha \int_0^\infty \psi_{N_\alpha,\check{N}'*f}(t)\exp(-pt)dt$$
$$= \int_0^\infty \psi(t)\exp(-pt)dt = \int_0^\infty \psi'(t)\exp(-pt)dt.$$

En vertu de l'injectivité de la transformation de Laplace, on voit $\psi=\psi'$. Par conséquent on achève la démonstration.

Pour les appliquer à une caractérisation d'un noyau de convolution de Hunt, on préparera d'abord une définition et deux lemmes.

Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$. On dit que $N$ est injectif (ou bien satisfait au principe d'unicité) si, pour deux mesures positives $\mu$ et $\nu$ dans $X$ quelconques, $\mu=\nu$ dès que $N*(\mu+\nu)$ a un sens et $N*\mu=N*\nu$ dans $X$.

LEMME 4.1. *Soient $N$ un noyau de convolution infectif sur $X$ auquel la résolvante est associée, et $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante de mesures positives dans $X$. Supposons qu'il existe une mesure positive $\nu$ dans $X$ telle que $N*\nu$ ait un sens et que, pour $\alpha\in A$ quelconque, $N*\mu_\alpha\leqq N*\nu$ dans $X$. Si $(N*\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ est vaguement convergente, alors $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. Comme $N\neq 0$, le lemme 1.1 donne que $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ est vaguement bornée. Soient $\mu$ et $\mu'$ deux points vaguement adhérents de $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ quelconques. D'après le lemme 3.5, on a

$$N*\mu = N*\mu' = \lim_\alpha N*\mu_\alpha \qquad (vaguement).$$

Comme $N$ est injectif, on a $\mu=\mu'$. On voit donc que $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge vaguement vers $\mu$.

Le lemme suivant est élémentaire (cf. le lemme 8.4 dand [2]).

LEMME 4.2. *Soit $N$ un noyau de convolution de la forme $N=\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma)^n$,* *où $\sigma$ est une mesure positive dans $X$. Alors $N$ est un noyau de convolution de Hunt sur $X$.*

En posant $\alpha_t=\exp(-t)\left(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n(\sigma)^n}{n!}\right)(\forall t\geqq 0)$, on voit facilement que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est le semi-groupe vaguement continu associé au noyau $N$.

THÉORÈME 5. *Soit $N\neq 0$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au principe de domination. S'il existe un noyau de convolution injectif $N'$ appartenant à $\mathscr{R}(X)$ telle que $N\prec N'$, alors $N$ est un noyau de convolution de Hunt.*

DÉMONSTRATION. Regardons la démonstration de l'énoncé (1) dans la proposition 3.1; alors on voit que $N\in\mathscr{R}(X)$. Soit $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N$. Alors le lemme 3.1 donne que, pour tout $p>0$,

$$N+\frac{1}{p}\varepsilon=\frac{1}{p}\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n\,.$$

Le lemme 4.2 et la remarque 4.3 donnent donc que $N+\varepsilon/p$ est un noyau de convolution de Hunt. Soit $(\alpha_{p,t})_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé au noyau $N+\varepsilon/p$. Pour simplifier la notation, on pose $\psi_{p,\check{N}'*f}=\psi_{N+\varepsilon/p,\check{N}'*f}$ pour $f\in C_K^+$. D'après le corollaire du théorème 4', $(\psi_{p,\check{N}'*f})_{p>0}$ est uniformément convergente sur tout compact de $R^+$ lorsque $p\to+\infty$. Désignons par $\psi_{p,\check{N}'*f}$ sa limite. Comme $N+\varepsilon/p\prec N\prec N'$ et $(N+\varepsilon/p)*\alpha_{p,t}\leqq N+\varepsilon/p$ dans $X$, les corollaires 1 et 5 du théorème 1 donnent que $N*\alpha_{p,t}\leqq N$ et $N'*\alpha_{p,t}\leqq N'$ dans $X$ $(\forall t\geqq 0;\forall p>0)$. En remarquant que $\psi_{p,\check{N}'*f}(t)=\int f dN'*\alpha_{p,t}$, on voit que $\lim_{p\to+\infty}\int f dN'*\alpha_{p,t}$ existe. Comme $f$ est quelconque, $(N'*\alpha_{p,t})_{p>0}$ converge vaguement lorsque $p\to+\infty$. Donc $(\alpha_{p,t})_{p>0}$ est aussi vaguement convergente lorsque $p\to+\infty$, d'après le lemme 4.1. Avec sa limite $\alpha_t$, on a, pour $f\in C_K^+$ quelconque,

$$\psi_{0,\check{N}'*f}(t)=\int \check{N}'*f d\alpha_t=\int f dN'*\alpha_t \qquad sur \quad R^+\,.$$

On obtient évidemment que $\alpha_0=\varepsilon$. L'inégalité $N'*\alpha_t\leqq N'$ et le lemme 1 montrent que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est vaguement borné. La continuité de $\psi_{0,\check{N}'*f}$ donne que l'application $R^+\ni t\to N'*\alpha_t$ est vaguement continue, et donc on voit, d'après le lemme 4.1, que $t\to\alpha_t$ est vaguement continue, car $N'*\alpha_t\leqq N'$ dans $X$ $(\forall t\geqq 0)$. Soit $s\geqq 0$ quelconque. En remarquant que $N'*\alpha_s\leqq N'$ dans $X$ et $\lim_{p\to+\infty}N'*\alpha_{p,t}=N'*\alpha_t$ (vaguement), on voit que, pour tout $t\geqq 0$ et toute $f\in C_K^+$,

$$\liminf_{p\to+\infty}\int f dN'*\alpha_s*\alpha_{p,t}\geqq\int f dN'*\alpha_s*\alpha_t$$

et

$$\liminf_{p\to+\infty}\int fd(N'-N'*\alpha_s)*\alpha_{p,t} \geqq \int fd(N'-N'*\alpha_s)*\alpha_t\,.$$

Donc on a

$$\lim_{p\to+\infty} N'*\alpha_s*\alpha_{p,t} = N'*\alpha_s*\alpha_t \qquad \text{(vaguement)}. \tag{12}$$

Soit $f\in C_K^+$ quelconque. D'après le théorème 4, $(\psi_{p,\check{N}'*\alpha_s*f})_{p>0}$ est relativement compact dans $C(R^+)$, car, en posant $N''=N'*\alpha_s$, $N+\varepsilon/p\prec N''$ pour tout $p>0$. Ceci et l'égalité (12) donnent que $(\psi_{p,\check{N}'*\alpha_s*f})_{p>0}$ converge uniformément vers une limite $\psi_{0,\check{N}'*\alpha_s*f}$ sur tout compact de $R^+$ lorsque $p\to+\infty$. On a, pour tout $t>0$,

$$\psi_{p,\check{N}*\alpha_s*f}(t) = \int fdN'*\alpha_t\,.$$

Comme $\psi_{0,\check{N}'*\alpha_s*f}$ est continue et $f$ est quelconque, l'application $t\to N'*\alpha_s*\alpha_t$ est vaguement continue, et donc le lemme 4.1 donne que $t\to\alpha_s*\alpha_t$ est vaguement continue. En remarquant que, pour $q>0$ quelconque, $\left(\int_0^\infty \alpha_{q,t}\exp(-pt)dt\right)_{p>0}$ est la résolvante associée au noyau $N+\varepsilon/q$, on voit, d'après (2) de la proposition 3.1 que

$$\lim_{q\to+\infty}\int_0^\infty \alpha_{q,t}\exp(-pt)dt = N_p \qquad \text{(vaguement)}$$

pour tout $p>0$. Soit $f$ une fonction de $C_K^+$ quelconque; on choisit une fonction $g$ de $C_K^+$ telle que $\check{N}'*g\geqq f$ sur $X$. On a, pour tous $t>0$ et $q>0$, $\int fd\alpha_{q,t}\leqq\int gdN' <+\infty$ (cf. l'inégalité (11)), et donc le théorème de Lebesgue donne que, pour tout $p>0$,

$$\lim_{q\to+\infty}\int_0^\infty\int fd\alpha_{q,t}\exp(-pt)dt = \int_0^\infty\int fd\alpha_t\exp(-pt)dt\,.$$

Comme $f$ est quelconque,

$$N_p = \int_0^\infty \alpha_t\exp(-pt)dt\,.$$

En faisant $p\downarrow 0$, on arrive à

$$N = \int_0^\infty \alpha_t dt\,.$$

D'autre part, comme, pour tout $p>0$, $N*\alpha_{p,t}\leqq N$ dans $X$ et $N+\varepsilon/p<N$, le lemme 3.5 donne aussi que, pour $s>0$ quelconque,

$$\int_0^\infty \alpha_t * \alpha_s dt = N*\alpha_s = \lim_{p\to+\infty} N*\alpha_{p,s} = \lim_{p\to+\infty}\left(N+\frac{1}{p}\varepsilon\right)*\alpha_{p,s}$$

$$= \lim_{p\to+\infty}\int_0^\infty \alpha_{p,s}*\alpha_{p,t}dt = \lim_{p\to+\infty}\int_0^\infty \alpha_{p,s+t}dt = \lim_{p\to+\infty}\int_s^\infty \alpha_{p,t}dt.$$

Remarquons que $\lim_{p\to+\infty}\int_0^\infty \alpha_{p,t}dt = \int_0^\infty \alpha_t dt$ (vaguement); alors, en utilisant l'inégalité analogue à (11) et le théorème de Lebesgue, on a

$$(13) \qquad \int_0^\infty \alpha_t*\alpha_s dt = \lim_{p\to+\infty}\int_s^\infty \alpha_{p,t}dt = \int_s^\infty \alpha_t dt \qquad (\textit{vaguement})$$

En vertu de la semi-continuite inférieure de la convolution de mesures positives, on a $\alpha_t*\alpha_s \leqq \alpha_{t+s}$ ($^\forall t\geqq 0$, $^\forall s\geqq 0$). D'après l'égalité (13) et les continuités de $t\to\alpha_t*\alpha_s$ et de $t\to\alpha_{t+s}$, on a, pour tout $t\geqq 0$, $\alpha_t*\alpha_s=\alpha_{t+s}$. Donc $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe. On voit ainsi que $N$ est un noyau de convolution de Hunt et que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est le semi-groupe vaguement continu associé au noyau $N$. La démonstration est ainsi compléte.

D'après le présent théorème, on doit examiner précisément les noyaux de convolution injectifs.

Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$. On dit que $N$ est *non-périodique* si, pour $x\neq 0$ de $X$ quelconque, $N\neq N*\varepsilon_x$.

Proposition 4.1. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ auquel la résolvante est associée. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *$N$ est non-périodique.*

(2) *Pour une mesure positive $\mu$ dans $X$ quelconque, $\mu=\varepsilon$ dès que $N=N*\mu$.*

(3) *$N$ est injectif.*

Démonstration. Montrons d'abord (1)⇒(2). La non-périodicité de $N$ donne $N\neq 0$. Supposons que, pour une mesure positive $\mu$ dans $X$, $N=N*\mu$. D'après le lemme 2.1, pour un entier $m\geqq 0$ quelconque, $(\mu)^m$ et $N*(\mu)^m$ sont définies et on a

$$N = N*(\mu)^m \qquad dans \quad X.$$

Soit $x$ un point de $\mathrm{supp}(\mu)$ quelconque. Pour un voisinage ouvert $U_x$ de $x$ quelconque, on désigne par $\varepsilon'_{U_x}$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $U_x$ relativement au noyau $N$ (voir le corollaire 3 du théorème 1). On a $\mathrm{supp}(N-N*\varepsilon'_{U_x})\not\ni x$, car $N=N*\varepsilon'_{U_x}$ dans $U_x$. En remarquant

$$\mathrm{supp}(N-N*\varepsilon'_{U_x}) = \mathrm{supp}((N-N*\varepsilon'_{U_x})*\mu) = \mathrm{supp}(N-N*\varepsilon'_{U_x})+\mathrm{supp}(\mu),$$

on a $\mathrm{supp}(N-N*\varepsilon'_{U_x})\not\ni 0$. Donc $N=N*\varepsilon'_{U_x}$ dans un certain voisinage ouvert de l'origine. Le lemme 1.2 donne $N\leqq N*\varepsilon'_{U_x}$ dans $X$, car, en posant $N'=N*\varepsilon'_{U_x}$, $N\prec N'$. Donc on a $N=N*\varepsilon'_{U_x}$ dans $X$. Ceci donne que, pour tout l'entier $m\geqq 0$,

$$N = N*(\varepsilon'_{U_x})^m \qquad dans \quad X.$$

Comme $N\neq 0$, le lemme 1.1 donne que $(\varepsilon'_{U_x})_{U_x}$ est vaguement bornée, et donc on peut supposer qu'elle converge vaguement lorsque $\overline{U_x}\downarrow\{x\}$. Sa limite est portée par $\{x\}$, et elle est égale à $c_x\varepsilon_x$, où $c_x$ est une constante $\geqq 0$. Il s'en suit que, pour tout l'entier $m>0$, $(\varepsilon'_{U_x})^m$ converge vaguement vers $(c_x)^m\varepsilon_{mx}$ lorsque $\overline{U_x}\downarrow\{x\}$. Par conséquent

$$N = (c_x)^m N*\varepsilon_{mx} \qquad dans \quad X. \tag{14}$$

Pour $U\in\mathscr{V}_c$ quelconque, le corollaire 3 du théorème 3 donne l'existence d'une mesure balayée $\varepsilon'_{\mathscr{C}U}$ de $\varepsilon$ sur $\mathscr{C}U$ relativement au noyau $N$, et $N_{\mathscr{C}U}=N*\varepsilon'_{\mathscr{C}U}$ (cf. (la remarque 3.6). D'après le théorème 3, on a $\lim_{U\uparrow X} N*\varepsilon'_{\mathscr{C}U}=0$ (vaguement). Comme $N\neq 0$, il existe $V\in\mathscr{V}_c$ tel que $N\neq N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$. On verra que $\mathrm{supp}(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})$ contient l'origine 0. En effet, si $\mathrm{supp}(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})\notin 0$, alors $N=N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ dans un certain voisinage de l'origine. Comme $N\prec N_{\mathscr{C}V}$, le lemme 1.2 donne $N\leqq N_{\mathscr{C}V}$ dans $X$ d'où $N=N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ dans $X$, mais cela est une contradiction. Soit $m$ un entier $>0$ quelconque. Comme

$$N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V} = (N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})*(\mu)^m \qquad dans \quad X,$$

$\mathrm{supp}((\mu)^m)\subset V$. Comme $V$ est compact, on peut choisir $f\in C_K^+$ telle que $\check{N}*f\geqq 1$ sur $V$. Alors l'égalité (14) donne

$$\check{N}*f(0) = \int f dN = (c_x)^m\int f dN*\varepsilon_{mx} = (c_x)^m\int \check{N}*f d\varepsilon_{mx} = (c_x)^m\check{N}*f(mx).$$

Comme $mx\in\mathrm{supp}((\mu)^m)\subset V$, on a

$$(c_x)^m \leqq \check{N}*f(0) \leqq (c_x)^m \max_{y\in V} N*f(y).$$

On voit alors $c_x=1$ d'où $N=N*\varepsilon_x$ dans $X$. Donc, d'après l'énoncé (1), $x=0$. Ceci donne que $\mu$ est concentrée à l'origine d'où, avec une constante $c\geqq 0$, $\mu=c\varepsilon$. Comme $N\neq 0$ et $N=N*\mu$, on a $\mu=\varepsilon$.

Montrons ensuite (2)$\Rightarrow$(3). Supposons que, pour deux mesures positives $\mu$ et $\nu$ dans $X$, $N*(\mu+\nu)$ a un sens et $N*\mu=N*\nu$ dans $X$. Pour $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque, on note $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\mathscr{C}V$ relativement au noyau $N$. Comme $\varepsilon\neq\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$, on a $N\neq N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$. Posons $a_V=\int d(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})>0$. Alors

$$\frac{1}{a_V}(N - N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})*\mu = \frac{1}{a_V}(N - N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})*\nu$$

dans $X$. En faisant $V\downarrow\{0\}$. on arrive à l'égalité $\mu=\nu$. On voit donc (2)⇒(3).

On voit évidemment (3)⇒(1), et la démonstration est ainsi complète.

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du théorème 5 et de la proposition 4.1. Cela est essentiellement connu. En particulier, l'équivalencé entre (1) et (3) est un résultat principal dans [2].

COROLLAIRE 1. *Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *$N$ est un noyau associé.*

(2) *$N$ est non-périodique et appartient à $\mathscr{R}(X)$.*

(3) *$N$ est un noyau de convolution de Hunt.*

L'implication (2)⇒(1) résulte immédiatement du corollaire 3 du théorème 3, la remarque 3.7 et de la proposition 4.1. L'implication (2)⇒(3) résulte immédiatement du théorème 5 et de la proposition 4.1. Pour (1)⇒(2), il suffit de montrer qu'un noyau associé est non-périodique (voir le corollaire 2 du théorème 3). Pour (3)⇒(2), il suffit de montrer qu'un noyau de convolution de Hunt est non-périodique (voir la remarque 4.1).

Montrons qu'un noyau associé $N$ est non-périodique. Supposons qu'il existe un point $x\neq 0$ tel que $N=N*\varepsilon_x$ dans $X$. Soit $\mathscr{V}$ une base de voisinages compacts de l'origine associée à $N$. On choisit $V$ tel que $V\not\ni -x$ et on désigne par $\sigma_V$ la mesure positive dans $X$ donnée pour $V$ dans la définition d'un noyau associé. On voit facilement $N\neq N*\sigma_V$. Comme $(N-N*\sigma_V)*\varepsilon_x=N-N*\sigma_V$ dans $X$ et $\mathrm{supp}(N-N*\sigma_V)\subset V$, on a $\mathrm{supp}(N-N*\sigma_V)\not\ni 0$. D'après les lemmes 3.4 et 1.2, on obtient $N\leqq N*\sigma_V$ dans $X$ d'où $N=N*\sigma_V$. On arrive donc à une contradiction, et $N$ est non-périodique.

Montrons qu'un noyau de convolution de Hunt $N$ est non-périodique. On désigne par $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et $(N_p)_{p\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé au noyau $N$ et la résolvante associée au noyau $N$, respectivement. Supposons qu'il existe un point $x\neq 0$ tel que $N=N*\varepsilon_x$ dans $X$. On choisit une fonction $f$ de $C_K^+$ telle que $f(0)\neq f(x)$. Pour $p>0$ quelconque,

$$N_p = N - pN_p*N = N*\varepsilon_x - pN_p*N*\varepsilon_x = N_p*\varepsilon_x$$

dans $X$. Ceci donne que, pour tout $p\geqq 0$,

$$\int_0^\infty \int f d\alpha_t \exp(-pt)dt = \int_0^\infty \int f d\alpha_t*\varepsilon_x \exp(-pt)dt.$$

En vertu de l'injectivité de la transformation de Laplace, pour tout $t\geqq 0$, $\int f d\alpha_t = \int f d\alpha_t*\varepsilon_x$. Posons $t=0$; alors $f(0)=f(x)$ d'où une contradiction, et on voit que $N$ est non-périodique.

COROLLAIRE 2. *Soit $N \neq 0$ un noyau de convolution sur $X$ auquel la résolvante est associée. S'il existe un noyau de convolution $N'$ non-périodique sur $X$ tel que $N \prec N'$, alors $N$ est un noyau de convolution de Hunt.*

DÉMONSTRATION. D'après le présent corollaire, il suffit de montrer que $N$ est non-périodique. Supposons que, pour un point $x$ de $X$, $N = N * \varepsilon_x$. Soit $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts relativement compacts dans $X$ telle que $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = X$. Le théorème 1 donne l'existence d'une mesure balayée $\varepsilon'_n$ de $\varepsilon$ sur $\omega_n$ relativement à $(N, N')$. D'après le lemme 1.2, $(N * \varepsilon'_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante et $\lim_{n \to +\infty} N * \varepsilon'_n = N'$ (vaguement). Comme $N * \varepsilon'_n = N * \varepsilon_x * \varepsilon'_n$ $({}^{\forall} n \geqq 1)$, on a $N' = N' * \varepsilon_x$. La non-périodicité de $N'$ donne $x = 0$, d'où $N$ est aussi non-périodique. Le corollaire 2 est démontré.

Le corollaire suivant est aussi un résultat immédiat du théorème 5 et de la proposition 4.1.

COROLLAIRE 3. *Soit $N'$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$. Alors* $\{N \in \mathscr{D}(X); N \prec N'\} = \mathscr{H}_r(N') \cup \{0\}$.

Par conséquent $\mathscr{H}_r(N') \cup \{0\}$ est vaguement fermé, d'après le corollaire 4 du théorème 1.

## §5. La division entre deux noyaux de convolution

Soient $N_1$ et $N_2$ deux noyaux de convolution sur $X$. On dira que $N_1$ sera un *diviseur* de $N_2$ s'il existe un autre noyau de convolution $N_3$ sur $X$ tel que $N_2 = N_1 * N_3$.

REMARQUE 5.1. Si $N_1 \in \mathscr{D}(X)$ et si $N_1$ est un diviseur de $N_2$, alors $N_1 \prec N_2$. Voir le corollaire 2 du théorème 1.

En regardant la présente définition et la remarque 5.1, on arrive à une autre définition.

Soient $N$ et $\eta$ deux noyaux de convolution sur $X$. On dira que $\eta$ sera *$N$-invariant* si $N \prec \eta$ et si, pour une mesure positive $\nu$ dans $X$ quelconque, $\nu = 0$ dès que $N * \nu \leqq \eta$ dans $X$ et $N \prec \eta - N * \nu$.

Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$. On note $\mathscr{D}_{mul}(N)$ la totalité des noyaux de convolution $N'$ sur $X$ tels que $N$ soit un diviseur de $N'$, et $\mathscr{D}_{inv}(N)$ la totalité des noyaux de convolution $N$-invariants sur $X$. On voit facilement la remarque suivante:

REMARQUE 5.2. Soit $N$ un noyau de convolution $\in \mathscr{D}(X)$. Alors $\mathscr{D}_{mul}(N) \cap \mathscr{D}_{inv}(N) = \{0\}$.

Pour montrer le sixième théorème, on prépare un lemme et une proposition concernant les noyaux de convolution $N$-invariants.

LEMME 5.1. *Soient $N \neq 0$ un noyau de convolution sur $X$ satisfaisant au principe de domination, $N'$ un noyau de convolution sur $X$, $\mu$ une mesure positive dans $X$ à support compact et $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts de $X$. Supposons $N \prec N'$. Alors il existe une suite $(\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que, pour $n \geqq 1$ quelconque, $\mu'_n$ soit une mesure balayée de $\mu$ sur $\omega_n$ relativement à $(N, N')$ et que $\mu'_n \geqq \mu'_{n+1}$ dans $\omega_n$ ($^\forall n \geqq 1$).*

DÉMONSTRATION. Pour une constante $c>0$ quelconque, $N+c\varepsilon \in \mathscr{D}(X)$ et $N+c\varepsilon \prec N \prec N'$. Donc on a aussi $N+c\varepsilon \prec N'$. Pour $n \geqq 1$ quelconque, le théorème 1 donne l'existence d'une mesure balayée $\mu'_{c,n}$ de $\mu$ sur $\omega_n$ relativement à $(N+c\varepsilon, N')$. Comme $N \neq 0$ et $N*\mu'_{c,n} \leqq N*\mu'_{c,n}+c\mu'_{c,n} \leqq N'*\mu$ dans $X$, le lemme 1.1 donne que la famille $\{\mu'_{c,n};\, c>0, n=1, 2,\cdots\}$ est vaguement bornée. Donc on peut choisir une suite décroissante $(c_m)_{m=1}^{\infty}$ de nombres positifs telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} c_m =0$ et que, pour $n \geqq 1$ quelconque, $(\mu'_{c_m,n})_{m=1}^{\infty}$ est vaguement convergente. Posons $\mu'_n = \lim\limits_{m\to+\infty} \mu'_{c_m,n}$; alors $\operatorname{supp}(\mu'_n) \subset \overline{\omega_n}$. Comme $\lim\limits_{m\to+\infty} N*\mu'_{c_m,n} = N*\mu'_n$ (vaguement), on a $N*\mu'_n \leqq N'*\mu$ dans $X$ et $N*\mu'_n = N'*\mu$ dans $\omega_n$. Soit $\nu$ une mesure positive dans $X$ portée par $\overline{\omega_n}$ telle que $N*\nu \geqq N'*\mu$ dans $\omega_n$. Alors, pour $m \geqq 1$ quelconque, $N*\nu + c_m\nu \geqq N'*\mu$ dans $\omega_n$. D'après la condition (c) qui apparaît dans la définition du principe relatif du balayage, on a $N*\nu+c_m\nu \geqq N*\mu'_{c_m,n}+c_m\mu'_{c_m,n}$ dans $X$. En faisant $m\to+\infty$, on a $N*\nu \geqq N*\mu'_n$ dans $X$. Donc $\mu'_n$ est une mesure balayée de $\mu$ sur $\omega_n$ relativement á $(N, N')$. Soit $m \geqq 1$ quelconque. D'après la condition (c) qui apparaît dans la définition du principe relatif du balayage et $N+c_m\varepsilon \prec N$, le corollaire 5 du théorème 1 donne que

$$N*\mu'_{c_m,n} \leqq N*\mu'_{c_m,n+1} \qquad \text{dans} \quad X.$$

Comme $(N+c_m\varepsilon)*\mu'_{c_m,n} = (N+c_m\varepsilon)*\mu'_{c_m,n+1}$ dans $\omega_n$, on a $\mu'_{c_m,n} \geqq \mu'_{c_m,n+1}$ dans $\omega_n$. En faisant $m\to+\infty$, on arrive á $\mu'_n \geqq \mu'_{n+1}$ dans $\omega_n$. Par conséquent $(\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite demandée, et le lemme 5.1 est ainsi démontré.

On dit qu'un noyau de convolution $N \in \mathscr{D}(X)$ est singulier si, pour $V$ de $\mathscr{V}_c$ quelconque, $N=N_{\mathscr{C}V}$, où $N_{\mathscr{C}V}$ est le noyau de convolution balayé de $N$ sur $\mathscr{C}V$ relativement à $(N, N)$. Nous allons caractériser les noyaux de convolution $N$-invariants sur $X$, où $N$ est non-singulier.

PROPOSITION 5.1. *Soient $N$ un noyau de convolution $\in \mathscr{D}(X)$ non-singulier, et $\eta$ un noyau de convolution sur $X$; alors les quatre énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *$\eta$ est $N$-invariant.*

(2) *Il existe une suite $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ de mesures positives dans $X$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$*

$=0$ (*vaguement*) *et que* $N*\lambda_n \uparrow \eta$ *avec* $n \uparrow +\infty$.

(3) $N \prec \eta$, *et pour toute la famille filtrante* $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ *de mesures positives dans* $X$ *telle que* $(N*\nu_\alpha)$ *soit croissante,* $N*\nu_\alpha \leqq N$ *dans* $X$ $(^\forall \alpha \in A)$ *et que* $\operatorname{supp}(N - \lim_\alpha N*\nu_\alpha)$ *soit compact,*

$$\eta = \lim_\alpha \eta*\nu_\alpha .$$

(4) $N \prec \eta$, *et pour* $V \in \mathscr{V}_c$ *quelconque, il existe une famille filtrante* $(\nu_{V,\alpha})_{\alpha \in A}$ *de mesures positives dans* $X$ *telle que* $N*\nu_{V,\alpha} \uparrow N_{\mathscr{C}V}$ *et* $\eta*\nu_{V,\alpha} \uparrow \eta$.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord (1)$\Rightarrow$(2). Soit $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ une suite d'ouverts relativement compacts de $X$ telle que $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$ et $\bigcup_{n-1}^{\infty} \omega_n = X$. D'après le lemme 5.1, il existe une suite $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ telle que $\lambda_n$ soit une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega_n$ relativement à $(N, \eta)$ et que $\lambda_n \geqq \lambda_{n+1}$ dans $\omega_n$. On voit facilement que $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ est vaguement convergente. Le lemme 1.2 donne que $(N*\lambda_n)_{n=1}^\infty$ est croissante et on a $\lim_{n\to+\infty} N*\lambda_n = \eta$. Posons $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n$ (vaguement) et notons $\lambda'_n$ la restreinte de $\lambda$ sur $\omega_n$. Alors $\lambda_n - \lambda'_n$ est une mesure positive dans $X$ $(^\forall n \geqq 1)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} N*(\lambda_n - \lambda'_n) = \eta - N*\lambda \qquad \text{(vaguement)}.$$

Donc $\eta - N*\lambda \geqq 0$ dans $X$ et le corollaire 2 du théorème 1 donne $N \prec \eta - N*\lambda$ d'où $\lambda = 0$. On voit ainsi que $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ est suite demandée d'où (1)$\Rightarrow$(2).

Montrons ensuite (2)$\Rightarrow$(3). Il résulte du corollaire 2 du théorème 1 que $N \prec \eta$. Le corollaire 5 du théorème 1 donne que $(\eta*\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ est croissante et que $\eta \geqq \lim_\alpha \eta*\nu_\alpha$ dans $X$. Pour $n \geqq 1$ quelconque,

$$(\lim_\alpha N*\nu_\alpha)*\lambda_n = \lim_\alpha N*\lambda_n*\nu_\alpha \leqq \lim_\alpha \eta*\nu_\alpha$$

dans $X$. Comme $\lim_{n\to+\infty} (N - \lim_\alpha N*\nu_\alpha)*\lambda_n = 0$ (vaguement), on a

$$\eta = \lim_{n\to+\infty} N*\lambda_n = \lim_{n\to+\infty} (\lim_\alpha N*\nu_\alpha)*\lambda_n \qquad (\textit{vaguement}).$$

Donc $\eta \leqq \lim_\alpha \eta*\nu_\alpha$. On voit ainsi $\eta = \lim_\alpha \eta*\nu_\alpha$, d'où (2)$\Rightarrow$(3).

En rappelant la manière de la construction de $N_{\mathscr{C}V}$ (cf. la démonstration de la proposition 1.4), on voit facilement (3)$\Rightarrow$(4).

Montrons finalement (4)$\Rightarrow$(1). Soit $\nu$ une mesure positive dans $X$ telle que $N*\nu \leqq \eta$ dans $X$ et $N \prec \eta - N*\nu$. Pour $V \in \mathscr{V}_c$ quelconque, le corollaire 5 du théorème 1 donne que $((\eta - N*\nu)*\nu_{V,\alpha})_{\alpha\in A}$ est aussi croissante. Comme $N \geqq N_{\mathscr{C}V} \geqq N*\nu_{V,\alpha}$ dans $X$ $(^\forall \alpha \in A)$, on a

$$\eta - N*\nu \geqq \lim_\alpha (\eta - N*\nu)*\nu_{V,\alpha} = \eta - N_{\mathscr{C}V}*\nu$$

dans $X$. Comme $N \geqq N_{\mathscr{C}V}$ dans $X$, on a $(N-N_{\mathscr{C}V})*\nu=0$ dans $X$. Comme $N$ est non-singulier, il existe $V \in \mathscr{V}_c$ tel que $N \neq N_{\mathscr{C}V}$. Par conséquent $\nu=0$ d'où $\eta$ est $N$-invariant. On voit ainsi (4)⇒(1). La démonstration est complète.

Nous montrerons notre sixième théorème.

THÉORÈME 6. *Soient $N$ un noyau de convolution $\in \mathscr{D}(X)$ non-singulier et $N'$ un noyau de convolution sur $X$. Alors pour que $N \prec N'$, il faut et il suffit que $N'$ soit de la forme*

$$N' = N'' + \eta,$$

*où $N'' \in \mathscr{D}_{mul}(N)$ et $\eta \in \mathscr{D}_{inv}(N)$. Si $N \in \mathscr{R}(X)$ ou bien si, pour $V \in \mathscr{V}_c$ quelconque, $N \neq N_{\mathscr{C}V}$, alors cette décomposition de $N'$ est unique.*

DÉMONSTRATION. Il suit immédiatement du corollaire 2 du théorème 1 que la condition est suffisante. Montrons son inverse. Soient $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ la même que dans la démonstration de la proposition 5.1. On note $(\varepsilon'_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de mesures positives obtenue dans le lemme 5.1 pour $N$, $N'$, $\mu=\varepsilon$ et pour $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$. De la même manière que dans la proposition 5.1, on voit que $(\varepsilon'_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers une limite $\nu$ lorsque $n \to +\infty$, et que $(N*\varepsilon'_n)_{n=1}^{\infty}$ converge d'une manière croissante vers $N'$ avec $n \uparrow +\infty$. Posons $\eta = N' - N*\nu$; alors $\eta = \lim_{n\to+\infty} N*(\varepsilon'_n - \nu_n)$ (vaguement), où $\nu_n$ est la restreinte de $\nu$ sur $\omega_n$. Comme $\varepsilon'_n \geqq \varepsilon_{n+1}$ dans $\omega_n$, $\varepsilon'_n - \nu_n$ est une mesure positive dans $X$. Donc $\eta$ définit un noyau de convolution sur $X$ et $N \prec \eta$ (cf. le corollaire 2 du théorème 1). Soit $(\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante de mesures positives dans $X$ telle que $(N*\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ soit croissante, $N*\nu_\alpha \leqq N$ dans $X$ et que $\mathrm{supp}(N - \lim_\alpha N*\nu_\alpha)$ soit compact. La suite $(N*(\varepsilon'_n - \nu_n))_{n=1}^{\infty}$ n'est pas toujours croissante, mais, de la même manière que dans (2)⇒(3) dans la présente proposition, on peut montrer que $\eta = \lim_\alpha \eta*\nu_\alpha$ (vaguement). Par conséquent $\eta$ est $N$-invariant et, en posant $N'' = N*\nu$, $N' = N'' + \eta$.

Montrons finalement l'unicité de la décomposition de $N'$ sous notre hypothèse additionelle. Soit $N' = N^{(3)} + \eta'$ une autre décomposition demandée quelconque. Ecrivons, avec une mesure positive $\nu'$ dans $X$, $N^{(3)} = N*\nu'$. Soit $V \in \mathscr{V}_c$ quelconque. En rappelant la manière de la construction de $N_{\mathscr{C}V}$, on voit qu'il existe une famille filtrante $(\nu_\alpha)_{\alpha\in A}$ de mesures positives dans $X$ portées par $\mathscr{C}V$ telle que $N*\nu_\alpha \uparrow N_{\mathscr{C}V}$. D'après la proposition 5.1, on a

$$N_{\mathscr{C}V}*\nu + \eta = \lim_\alpha N'*\nu_\alpha = N_{\mathscr{C}V}*\nu' + \eta' \qquad \textit{dans} \quad X.$$

Si $N \in \mathscr{R}(X)$, alors en faisant $V \uparrow X$, on arrive à $\eta = \eta'$, d'après le théorème 3, d'où l'unicité de la décomposition de $N'$.

Supposons que $N$ vérifie la deuxième hypothèse. Alors la présente égalité donne que

$$(N-N_{\mathscr{C}V})*\nu = (N-N_{\mathscr{C}V})*\nu' \qquad dans \quad X.$$

Posons $a_V=\int d(N-N_{\mathscr{C}V})\,(\forall V\in\mathscr{V}_c)$: alors $a_V>0$. On a donc

$$\nu=\lim_{V\downarrow\{0\}}\frac{1}{a_V}(N-N_{\mathscr{C}V})*\nu=\lim_{V\downarrow\{0\}}\frac{1}{a_V}(N-N_{\mathscr{C}V})*\nu'=\nu',$$

d'où $N''=N^{(3)}$ et $\eta=\eta'$. La démonstration est ainsi complète.

Remarque 5.3. Soient $N\in\mathscr{D}(X)$ satisfaisant à la condition que, pour $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque, $N\neq N_{\mathscr{C}V}$ et $N'$ un noyau de convolution. Remarquons la présente démonstration; alors on voit que si $N\prec N'$, il existe uniquement une mesure positive $\nu$ dans $X$ et un noyau de convolution $N$-invariant $\eta$ dans $X$ tels que $N'=N*\nu+\eta$.

Remarque 5.4. Nous ne connaissons pas maintenant si la décomposition de $N'$ dans le théorème 6 est unique sans aucune condition additionnelle. Mais nous pouvons énoncer la décomposition unique de $N'$ de la forme suivante:

*Si $N\prec N'$, alors il existe uniquement un noyau de convolution $N''$ sur $X$ et un noyau de convolution $N$-invariant $\eta$ sur $X$ tels que $N$ soit un diviseur de $N''$, $N'=N''+\eta$ et que, quel que soit $\eta'$ un noyau de convolution $N$-invariant sur $X$, $\eta\geqq\eta'$ dans $X$ dès que $N'\geqq\eta'$ dans $X$ et que $N$ est un diviseur de $N'-\eta'$.*

En effet, il est évident qu'une décomposition de $N'$ demandée est unique lorsqu'elle existe. Soit $\eta'$ un noyau de convolution $N$-invariant sur $X$ tel que $N'\geqq\eta'$ dans $X$ et que $N$ soit un diviseur de $N'-\eta'$. Posons $N^{(3)}=N'-\eta'$ et écrivons, avec une mesure positive $\nu'$ dans $X$, $N^{(3)}=N*\nu'$. Soit $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ la même que dans la démonstration de la proposition 5.1. Pour $n\geqq 1$ et pour une constante $c>0$, on désigne respectivement par $\nu_{c,n}$, $\nu'_{c,n}$ et par $\lambda'_{c,n}$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega_n$ relativement à $(N+c\varepsilon, N')$, une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega_n$ relativement à $(N+c\varepsilon, N^{(3)})$ et une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega_n$ relativement à $(N+c\varepsilon, \eta')$. D'après la condition (c) qui apparaît dans la définition du principe relatif du balayage, on voit que $((N+c\varepsilon)*\nu_{c,n})\leqq(N+c\varepsilon)*(\nu'_{c,n}+\lambda'_{c,n})$ dans $X$. D'autre part, le lemme 1.2 donne que $(N+c\varepsilon)*(\nu'_{c,n}+\lambda'_{c,n})\leqq(N+c\varepsilon)*\nu_{c,n+1}$ dans $X$. En utilisant $N+c\varepsilon\prec N$ et le corollaire 5 du théorème 1, on a

$$N*\nu_{c,n}\leqq N*(\nu'_{c,n}+\lambda'_{c,n})\leqq N*\nu_{c,n+1}$$

dans $X$, et donc

$$\nu_{c,n}\geqq \nu'_{c,n}+\lambda'_{c,n}\geqq \nu_{c,n+1}$$

dans $\omega_n$. Regardons la démonstration du lemme 5.1; alors on peut supposer que, pour $n\geqq 1$ quelconque, $(\nu_{c,n})$, $(\nu'_{c,n})$ et $(\lambda'_{c,n})$ sont vaguement convergentes lorsque $c \downarrow 0$. Posons $\nu_n = \lim_{c \downarrow 0} \nu_{c,n}$, $\nu'_n = \lim_{c \downarrow 0} \nu'_{c,n}$ et $\lambda'_n = \lim_{c \downarrow 0} \lambda'_{c,n}$; alors $\nu_n \geqq \nu'_n + \lambda'_n \geqq \nu_{n+1}$ dans $\omega_n$. Soient $\nu = \lim_{n \uparrow +\infty} \nu_n$, $\nu'' = \lim_{n \uparrow +\infty} \nu'_{c,n}$, $\lambda' = \lim_{n \uparrow +\infty} \lambda'_n$, $\eta = N' - N*\nu$, $\eta'' = N*\nu' - N*\nu''$ et $\eta^{(3)} = \eta' - N*\lambda'$. Alors $N' = N*\nu + \eta$, $N^{(3)} = N*\nu'' + \eta''$ et $\eta' = N*\lambda' + \eta^{(3)}$ sont respectivement des décompositions de $N'$, de $N^{(3)}$ et de $\eta'$ dans le théorème 6. Comme $\eta'$ est $N$-invariant, $\lambda' = 0$. Donc $\nu = \nu''$ et $\eta = \eta'' + \eta'$ d'où $\eta \geqq \eta'$ dans $X$. Par conséquent $N' = N*\eta$ est la décomposition de $N'$ demandée.

En utilisant le théorème 6 et la proposition 5.1, on montrera des corollaires remarquables.

Corollaire 1. *Soient $N$ un noyau de convolution $\in \mathscr{D}(X)$ non-singulier, $\eta$ un noyau de convolution sur $X$ et $c > 0$ une constante donnée. Alors pour que $\eta$ soit $N$-invariant, il faut et il suffit que $\eta$ soit $(N + c\varepsilon)$-invariant.*

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est suffisante. On connaît déjà que $N + c\varepsilon \in \mathscr{D}(X)$. Pour $V \in \mathscr{V}_c$ quelconque, on désigne par $(N + c\varepsilon)_{\mathscr{C}V}$ le noyau de convolution balayé de $N + c\varepsilon$ sur $\mathscr{C}V$ relativement à $(N + c\varepsilon, N + c\varepsilon)$. Rappelons la manière de la construction de $(N + c\varepsilon)_{\mathscr{C}V}$. Comme $N + c\varepsilon \prec N$ et $(N + c\varepsilon)_{\mathscr{C}V} = N_{\mathscr{C}V}$ dans $\mathscr{C}V$, on a $(N + c\varepsilon)_{\mathscr{C}V} \leqq N_{\mathscr{C}V}$ dans $X$ (cf. le lemme 1.2). Donc $N + c\varepsilon \neq (N + c\varepsilon)_{\mathscr{C}V}$ d'où $N + c\varepsilon$ n'est pas singulier. D'après la proposition 5.1, il existe une suite $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ de mesures positives dans $X$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$ (vaguement) et que $(N + c\varepsilon)*\lambda_n \uparrow \eta$ avec $n \uparrow +\infty$. Le corollaire 5 du théorème 1 donne que $(N*\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ est aussi croissante. On voit $\lim_{m \to +\infty} N*\lambda_n = \eta$ (vaguement). En utilisant encore la proposition 5.1, on voit que $\eta$ est $N$-invariant, d'où la condition est suffisante.

Montrons ensuite que la condition est nécessaire. Comme $N + c\varepsilon \prec N \prec \eta$, on a $N + c\varepsilon \prec \eta$. D'après le théorème 6, il existe une mesure positive $\nu_c$ dans $X$ et un noyau de convolution $(N + c\varepsilon)$-invariant $\eta_c$ sur $X$ tels que

$$\eta = (N + c\varepsilon)*\nu_c + \eta_c \quad \textit{dans} \quad X. \tag{16}$$

Il s'en suit que $\eta_c$ est $N$-invariant. Soit $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts relativement compacts de $X$ contenant l'origine telle que $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = X$. Posons $V_n = \overline{\omega_n}$; alors $V_n \in \mathscr{V}_c$. Pour $n$ et $m$ avec $1 \leqq n < m$ quelconques, on désigne par $\varepsilon'_{n,m}$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\mathscr{C}V_n \cap \omega_m$ relativement au noyau $N$. La suite $(N*\varepsilon'_{n,m})_{m=n+1}^{\infty}$ est croissante (voir la remarque de § 1) et on a évidemment $N_{\mathscr{C}V_n} = \lim_{m \to +\infty} N*\varepsilon'_{n,m}$ (vaguement). Comme $N \neq 0$ et $N*\varepsilon'_{n,m} \leqq N$ dans $X$, on peut supposer que $(\varepsilon'_{n,m})_{m=n+1}^{\infty}$ converge vaguement vers une limite $\varepsilon'_n$ lorsque $m \to +\infty$ (voir le lemme 1.1). Pour $f \in C_K^+$ quelconque, on peut choisir $g \in C_K^+$ telle que $\check{N}*g \geqq f$ sur $X$. Comme

$$0 \leqq \check{\varepsilon}'_{n,m}*f \leqq \check{N}*\check{\varepsilon}'_{n,m}*g \leqq \check{N}*g \qquad \textit{sur} \quad X$$

et

$$\int \check{N}*g d\nu_c = \int g dN*\nu_c < +\infty,$$

le théorème de Lebesque donne

$$\lim_{m\to+\infty}\int f d\nu_c*\varepsilon'_{n,m} = \lim_{m\to+\infty}\int \check{\varepsilon}'_{n,m}*f d\nu_c$$

$$= \int \check{\varepsilon}'_n*f d\nu_c = \int f d\nu_c*\varepsilon'_n.$$

Comme $f$ est quelconque,

$$\lim_{m\to+\infty} \nu_c*\varepsilon'_{n,m} = \nu_c*\varepsilon'_n \qquad (vaguement).$$

En vertu de la semi-continuité inférieure de la convolution de mesures positives, on a $N*\varepsilon'_n \leqq N$ dans $X$ ($^\forall n \geqq 1$). Comme $\mathrm{supp}(\varepsilon'_n) \subset \mathscr{C}\omega_n$, on a $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$ (vaguement). De la même manière comme ci-dessus, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \nu_c*\varepsilon'_n = 0 \qquad (vaguement).$$

Comme, pour $n \geqq 1$ et $m \geqq n+1$ quelconques, l'égalité (16) donne

$$\eta*\varepsilon'_{n,m} = N*\varepsilon'_{n,m}*\nu_c + c\nu_c*\varepsilon'_{n,m} + \eta_c*\varepsilon'_{n,m} \qquad dans \quad X,$$

en faisant $m\to+\infty$ on a, d'après la proposition 5.1,

$$\eta = N_{\mathscr{C}V_n}*\nu_c + c\nu_c*\varepsilon'_n + \eta_c \qquad dans \quad X.$$

En faisant ensuite $n\to+\infty$, on a

$$\eta = (\lim_{n\to+\infty} N_{\mathscr{C}V_n})*\nu_c + \eta_c \qquad dans \quad X.$$

Comme $N \geqq \lim_{n\to+\infty} N_{\mathscr{C}V_n}$ dans $X$, $\nu_c = 0$, et donc $\eta = \eta_c$ d'où la condition est nécessaire. Le corollaire 1 est ainsi démontré.

Soit $N$ un noyau de convolution $\in \mathscr{D}(X)$ non-singulier et posons $N_{(s)} = \lim_{V\uparrow X} N_{\mathscr{C}V}$. On dit que $N_{(s)}$ est la partie singulière de $N$. Dans le cas où $N_{(s)} \neq 0$, il est un problème si tout le noyau de convolution $N$-invariant $\eta$ sur $X$ est de la forme $\eta = N_{(s)}*\lambda$, où $\lambda$ est une mesure positive dans $X$. Si c'est vrai, on verra qu'il sera plus important d'étudier la $N$-invariance pour $N \in \mathscr{R}(X)$.

En utilisant le présent corollaire 1, on obtient une caractérisation des noyaux de convolution $N$-invariants sur $X$, où $N$ est un noyau de convolution $\in \mathscr{R}(X)$.

COROLLAIRE 2. *Soient $N \neq 0$ un noyau de convolution sur $X$ auquel la ré-*

*solvante* $(N_p)_{p\geqq 0}$ *est associée et* $\eta$ *un noyau de convolution sur* $X$. *Alors les trois énoncés suivants sont équivalents.*

(1) $\eta$ *est N-invariant.*

(2) *Pour tout* $p>0$, $\eta=p\eta*N_p$ *dans* $X$.

(3) *Il existe un nombre* $p_0>0$ *tel que* $\eta=p_0\eta*N_{p_0}$ *dans* $X$.

DÉMONSTRATION. Le théorème 3 donne $N\in\mathscr{D}(X)$ et $\lim_{V\uparrow X} N_{\mathscr{C}V}=0$ (vaguement), et donc $N$ n'est pas singulier. Montrons d'abord (1)⇒(2). D'après le présent corollaire 1, pour $p>0$ quelconque, $\eta$ est $(pN+\varepsilon)$-invariant. Le lemme 3.1 donne $pN+\varepsilon=\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n$. Comme $pN+\varepsilon\prec\eta$ et $(pN+\varepsilon)*(pN_p)\leqq pN+\varepsilon$ dans $X$, le corollaire 5 du théorème 1 donne que $p\eta*N_p$ a un sens et $\eta\geqq p\eta*N_p$ dans $X$. Si $\eta\neq p\eta*N_p$, le lemme 2.1 donne que, pour tout l'entier $m\geqq 1$, $\eta*(pN_p)^m$ a un sens et on a, d'après (6),

$$\eta=(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n)*(\eta-p\eta*N_p)+\lim_{n\to+\infty}\eta*(pN_p)^n.$$

D'après le corollaire 2 du théorème 1, on a $pN+\varepsilon\prec N\prec\lim_{n\to+\infty}\eta*(pN_p)^n$. Comme $pN+\varepsilon=\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n$, le présente égalité est en contradiction avec la $(pN+\varepsilon)$-invariance de $\eta$, d'où $\eta=p\eta*N_p$ dans $X$.

L'implication (2)⇒(3) est évident, et on montrera (3)⇒(1). Admettons $N+\varepsilon/p_0\prec\eta$. Alors, d'après le théorème 6, on peut écrire $\eta=(N+\varepsilon/p_0)*\nu+\eta'$, où $\nu$ est une mesure positive dans $X$ et où $\eta'$ est un noyau de convolution $(N+\varepsilon/p_0)$-invariant. D'après le présent corollaire 1, $\eta'$ est $N$-invariant, et donc $\eta'=p_0\eta'*N_{p_0}$ dans $X$ (voir (1)⇒(2)). Il s'en suit que $\nu=0$ d'où $\eta$ est $N$-invariant. Montrons finalement que $N+\varepsilon/p_0\prec\eta$. Soit a une constante avec $0<a<1$ quelconque. Alors

$$\begin{aligned}(1-a)(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(ap_0N_{p_0})^n)*\eta &= (\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(ap_0N_{p_0})^n)*(\eta-ap_0\eta*N_{p_0})\\ &= \eta-\lim_{n\to+\infty}\eta*(ap_0N_{p_0})^n=\eta-\lim_{n\to+\infty}a^n\eta=\eta.\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.3 et le corollaire 2 du théorème 1, $\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(ap_0N_{p_0})^n\in\mathscr{D}(X)$ et $\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(ap_0N_{p_0})^n\prec\eta$. Comme $\lim_{a\to 1}(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(ap_0N_{p_0})^n)=p_0N+\varepsilon$, le corollaire 4 du théorème 1 donne $p_0N+\varepsilon\prec\eta$ d'où $N+\varepsilon/p_0\prec\eta$. On voit ainsi (3)⇒(1), et donc le corollaire 2 est démontré.

Le présent corollaire et la remarque 3.2 donnent immédiatement la remarque suivante:

REMARQUE 5.5. Soit $N$ un noyau de convolution sur $X$ de la forme $N$

$=a(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma)^n)$, où $a$ est une constante $>0$ et où $\sigma$ est une mesure positive dans $X$. Alors un noyau de convolution $\eta$ sur $X$ est $N$-invariant si et seulement is $\eta=\eta*\sigma$ dans $X$.

Pour un noyau de convolution de Hunt $N$ sur $X$, nous considérerons les noyaux de convolution $N$-invariants. Pour une mesure positive $\mu$ dans $X$ à support compact et pour un ouvert $\omega$ de $X$, une mesure balayée de $\mu$ sur $\omega$ relativement au noyau $N$ est uniquement déterminée, car $N$ est injectif et le $N$-potentiel balayé de $N*\mu$ relativement au noyau $N$ est toujours unique (cf. le corollaire 3 du théorème 3). Donc on peut définir une notion de "*N-harmonicité*".

Soit $\eta$ une mesure réelle dans $X$. On dit que $\eta$ est $N$-harmonique si, pour $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque, $\eta*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ a un sens et $\eta=\eta*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ dans $X$, où $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ est la mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\mathscr{C}V$ relativement au noyau $N$.

COROLLAIRE 3. *Soient $N$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé au noyau $N$ et $\eta$ un noyau de convolution sur $X$. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *$\eta$ est $N$-invariant.*

(2) *$\eta$ est $N$-harmonique.*

(3) *Pour $t\geqq 0$ quelconque, $\eta=\eta*\alpha_t$ dans $X$.*

DÉMONSTRATION. On montrera d'abord l'équivalence entre (1) et (3). Notons $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N$. Remarquons que, pour $p>0$ quelconque, $N_p=\int_0^{\infty}\alpha_t\exp(-pt)dt$ (cf. la remarque 4.1). Si (3) a lieu, alors, pour tout $p\geqq 0$, $\eta=p\eta*N_p$ dans $X$, et donc le présent corollaire 2 donne que $\eta$ est $N$-invariant. Supposons réciproquement que (1) a lieu. Soit $t\geqq 0$ quelconque. Comme $N\prec\eta$ et $N\geqq N*\alpha_t$ dans $X$, $\eta*\alpha_t$ a un sens et $\eta\geqq\eta*\alpha_t$ dans $X$ (cf. le corollaire 5 du théorème 1). D'après le présent corollaire 2, on a, pour $f\in C_K^+$ quelconque,

$$p\int_0^{\infty}\exp(-pt)\int fd(\eta-\eta*\alpha_t)dt=\int fd(\eta-p\eta*N_p)=0 \qquad (^\forall p>0).$$

En vertu de l'injectivité de la transformation de Laplace,

$$\int fd\eta*\alpha_t=\int fd\eta. \tag{17}$$

pour presque tout $t$ de $R^+$. Supposons qu'il existe $s\in R^+$ tel que $\int fd\eta>\int fd\eta*\alpha_s$. Alors, pour $t\geqq 0$ quelconque,

$$\int fd\eta*\alpha_{s+t}=\int fd\eta*\alpha_t*\alpha_s\leqq\int fd\eta*\alpha_s<\int fd\eta,$$

d'où une contradiction. Par conséquent, pour tout $t\geqq 0$, l'égalité (17) a lieu.

Comme $f$ est quelconque, l'énoncé (3) a lieu.

Montrons ensuite (1)⇨(2). Soit $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque. Comme $N\prec\eta$ et $N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}\leqq N$ dans $X$, $\eta*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ a un sens et $\eta*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}\leqq\eta$ dans $X$. Nous voyons dans la proposition 5.1 qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ de mesures positives dans $X$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=0$ (vaguement) et que $N*\lambda_n\uparrow\eta$ avec $n\uparrow+\infty$. On a

$$\eta-\eta*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}=\lim_{n\to+\infty}(N*\lambda_n-N*\lambda_n*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})=\lim_{n\to+\infty}N*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V})*\lambda_n=0$$

(vaguement), car $N*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V})$ est portée par le compact $V$. On voit donc que $\eta$ est $N$-harmonique.

Montrons finalement (2)⇨(1). Admettons d'abord que $N\prec\eta$. Alors le théorème 6 donne $\eta=N*\lambda+\eta'$ dans $X$, où $\lambda$ est une mesure positive dans $X$ et où $\eta'$ est un noyau de convolution $N$-invariant sur $X$. On connaît déjà que $\eta'$ est $N$-harmonique (voir l'implication (1)⇨(2)). Donc, pour $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque, $(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})*\lambda=0$ dans $X$ d'où $\lambda=0$. Par conséquent $\eta$ est $N$-invariant. On montrera que $N\prec\eta$. Soit $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque. D'après l'injectivité de $N$, on a $N\neq N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$, et donc le lemme 2.1 donne que $\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n$ définit un noyau de convolution sur $X$. On a

$$N=(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})*(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n)\qquad dans\quad X$$

(voir (6) et la remarque 3.7). Soit $a$ une constante avec $0<a<1$ quelconque. Alors, de la même manière que dans le présent corollaire 2,

$$\eta=(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(a\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n)*((1-a)\eta)\qquad dans\quad X.$$

Donc le corollaire 2 du théorème 1 donne que $\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(a\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n\prec\eta$. En faisant $a\uparrow 1$, on a, d'après le corollaire 4 du théorème 1, $\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n\prec\eta$, d'où $\eta\in\mathscr{D}_R(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n)$. Posons $\beta_V=\eta*(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})$. En rappelant une caractérisation de $\mathscr{D}_R(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})^n)$ dans le corollaire 2 du théorème 1, on voit facilement $\beta_V\in\overline{\mathscr{P}_K(N)}=\mathscr{D}_R(N)$. Posons $a_V=\int d(N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V})$; alors $a_V>0$. Comme $\lim_{V\downarrow\{0\}}a_V^{-1}\beta_V=\eta$ (vaguement) et $\mathscr{D}_R(N)$ est vaguement fermé (cf. le corollaire 2 du théorème 1), on a $N\prec\eta$. On voit ainsi (2)⇨(1), et le corollaire 3 est démontré.

Le corollaire suivant est une généralisation d'un théorème principal dans [3]. Nous l'avons montré dans [3] dans le cas où $N'$ est borné.

Corollaire 4. *Soient $N$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$ et $N'$ un noyau de convolution sur $X$. Alors pour que $N\prec N'$, il faut et il suffit que*

*N soit de la forme*

$$N' = N*\nu+\eta \qquad dans \quad X,$$

*où $\nu$ est une mesure positive dans $X$ et où $\eta$ est un noyau de convolution $N$-harmonique dans $X$. Dans ce cas, la couple $(\nu, \eta)$ est uniquement déterminée.*

Cela est un résultat immédiat du théorème, du corollaire 3 et de l'injectivitè de $N$.

On verra que l'étude de $\{N\in\mathscr{D}(X); \mathscr{D}_{inv}(N)\neq\{0\}\}$ est déduite du principe complet du maximum. D'autre part, il est un problème de déterminer $N \in\mathscr{D}(X)$ satisfaisant à $D_{inv}(N)=\{0\}$. On connaît qu'un tel noyau de convolution existe. Par exemple, soit $(a_m)_{m=1}^{\infty}$ une suite de nombres positifs telle que, pour un entier $k\geqq 1$ quelconque, $\lim_{m\to+\infty} a_m\exp(-km)=+\infty$, et posons

$$N = \varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\varepsilon_m\Big)^n$$

sur $R^1$. Alors $N\in\mathscr{H}(R^1)$ et $\mathscr{D}_{inv}(N)=\{0\}$. On ne connaît pas maintenant de bonnes caractérisations des tels noyaux de convolution $\in\mathscr{D}(X)$.

Remarque 5.6. Soit $N$ un noyau de convolution $\in\mathscr{D}(X)$ tel que, pour $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque, $N\neq N_{\mathscr{C}V}$, et supposons que $\mathscr{D}_{inv}=\{0\}$. Alors $N$ est un noyau de convolution de Hunt.

En effet, soit $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque. Comme $N\prec N_{\mathscr{C}V}$, il existe une mesure positive $\nu_{\mathscr{C}V}$ dans $X$ telle que $N_{\mathscr{C}V}=N*\nu_{\mathscr{C}V}$ dans $X$ (cf. le théorème 6). Soit $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante à droite d'ouverts relativement compacts de $X$ telle que $\bar{\omega}_\alpha\subset\mathscr{C}V$ et $\bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha=\mathscr{C}V$. Notons $\varepsilon'_\alpha$ une mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\omega_\alpha$ relativement au noyau $N$. Alors, pour tout $U$ de $\mathscr{V}_c$,

$$\lim_\alpha (N-N_{\mathscr{C}U})*\varepsilon'_\alpha = (N-N_{\mathscr{C}U})*\nu_{\mathscr{C}V} \qquad (vaguement),$$

car $N_{\mathscr{C}U}=N*\nu_{\mathscr{C}U}$. Comme $N\neq N_{\mathscr{C}U}$ ($\forall U\in\mathscr{V}_c$), on a $\lim_\alpha\varepsilon'_\alpha=\nu_{\mathscr{C}V}$ (vaguement). Donc $\mathrm{supp}(\nu_{\mathscr{C}V})\subset\overline{\mathscr{C}V}$. Posons $N_{(s)}=\lim_{V\uparrow X} N_{\mathscr{C}V}$; alors $N\prec N_{(s)}$ (voir le corollaire 2 du théorème 1), et donc il existe une mesure positive dans $X$ telle que $N_{(s)}=N*\nu$ dans $X$. De la même manière que ci-dessus, on a $\lim_{V\uparrow X}\nu_{\mathscr{C}V}=\nu$ (vaguement), d'où $\nu=0$. Donc $N_{(s)}=0$. D'après le théorème 3, $N\in\mathscr{R}(X)$. L'injectivité de $N$ résulte immédiatement de la condition que, pour $V\in\mathscr{V}_c$ quelconque, $N\neq N_{\mathscr{C}V}$, et par suite $N$ est un noyau de convolution de Hunt.

Considérons la division sur $\mathscr{H}(X)$. En regardant la proposition suivante, on verra que $\prec$ est proche de la division.

Proposition 5.2. *Soient $N_1$ et $N_2$ deux noyaux de convolution de Hunt sur $X$. Alors pour que $N_1\prec N_2$, il faut et il suffit que $N_1$ soit diviseur de $N_2$.*

DÉMONSTRATION. Il est évident que la condition est suffisante. Montrons son inverse. D'après le corollaire 4 du théorème 6, il existe uniquement une mesure positive $\nu$ dans $X$ et un noyau de convolution $N_1$-harmonique $\eta$ sur $X$ tels que $N_2=N_1*\nu+\eta$ dans $X$. Soit $(N_{1,p})_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N_1$. Pour $p>0$ quelconque, le corollaire 2 du théorème 6 donne que

$$\eta=\lim_{n\to+\infty} N_2*(pN_{1,p})^n \qquad (vaguement).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}(pN_{1,p})^n=0$ (vaguement) et, pour $n\geqq 1$ quelconque, $N_2*(pN_{1,p})^n \leqq N_2$, le lemme 3.5 donne que $\eta=0$. Par conséquent $N_2=N_1*\nu$ d'où $N_2$ est un diviseur de $N_1$. La démonstration est ainsi complète.

Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathscr{H}(X)$. On dira qu'un noyau de convolution de Hunt $N\in A$ sera *maximum* dans $A$ si, pour $N'\in A$ quelconque, $N\sim N'$ dès que $N\prec N'$, où l'on rappelle $N\sim N'$ signifie que, avec une constante $c>0$, $N'=cN$. Pour la classification des noyaux de convolution de Hunt, il est important de déterminer tous les éléments maximum dans $\mathscr{H}(X)$. Mais nous n'avons pas maintenant de résultats remarquables.

EXEMPLE. Soit $A=\{N\in\mathscr{H}(R^1);\ \mathrm{supp}(N)\subset R^+\}$. Alors il n'existe pas d'éléments maximum dans $A$. En effet, pour $N\in A$ quelconque et pour une constante réelle $a$ quelconque, posons $dN^{(a)}=\exp(ax)dN(x)$; alors $N^{(a)}\in A$. Si $a>0$, alors $N\prec N^{(a)}$. Donc on voit le présent énoncé.

On considérera finalement la division entre des noyaux de convolution bornés sur $X$.

Soit $\mu$ une mesure réelle dans $X$. On note $\Gamma(\mu)=\{x\in X;\ \mu=\mu*\varepsilon_x \text{ dans } X\}$. Tout le point de $\Gamma(\mu)$ s'appelle une *période* de $\mu$. Il est évident que $\Gamma(\mu)$ est un sous-groupe fermé de $X$. Le lemme suivant est connu (cf. le théorème 1 dans [1]).

LEMME 5.2. *Soient $\sigma$ une mesure positive dans $X$ de masse totale d'unité et $\mu$ une mesure réelle dans $X$ vérifiant que, pour toute $f$ de $C_K$, $\mu*f$ est bornée sur $X$. Si $\mu=\mu*\sigma$ dans $X$, alors $\Gamma(\mu)\supset\mathrm{supp}(\sigma)$.*

Pour un noyau de convolution $N$ sur $X$, on notera $\mathscr{D}_R^{(b)}(N)=\{N'\in\mathscr{D}_R(N);\ N'\text{: borné}\}$.

PROPOSITION 5.3. *Soit $N$ un noyau de convolution de Hunt sur $X$, et supposons que $\mathscr{D}_R^{(b)}(N)\neq\{0\}$. Alors on a:*

(1) *Pour tout $N'$ de $\mathscr{D}_R^{(b)}(N)$, $N$ est un diviseur de $N'$ si et seulement si $\int dN<+\infty$.*

(2) *Si $\int dN=+\infty$, alors tout $N'$ de $\mathscr{D}_R^{(b)}(N)$ est de la forme $N'=N*\nu+\eta$, où $\nu$ est une mesure positive dans $X$ et où $\eta$ est un noyau de convolution sur $X$*

*avec* $\Gamma(\eta)\supset \operatorname{supp}(N)$. *Dans ce cas*, $(\nu, \eta)$ *est uniquement déterminée.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2, on voit que $N$ satisfait au principe complet du maximum. Soit $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N$. Comme $N*(pN_p)\leqq N$ dans $X$, le corollaire du lemme 2.3 donne que $p\int dN_p\leqq 1$ $(^\forall p>0)$. D'après le lemme 3.1, on a $\int dN=+\infty$ si et seulement si $p\int dN_p=1$ $(^\forall p>0)$ et $\int dN<+\infty$ si et seulement si $p\int dN_p<1$ $(^\forall p>0)$.

Supposons que, pour tout $N'$ de $\mathscr{D}_R^{(b)}(N)$, $N$ est un diviseur de $N$. D'après le principe complet du maximum pour $N$, on voit $N\prec\xi$, et donc il existe une mesure positive $\nu$ dans $X$ telle que $N*\nu=\xi$ dans $X$. D'après l'injectivité de $N$, on voit facilement que $\nu$ est aussi invariante par translations, et donc, avec une constante $c>0$, $\nu=c\xi$. On a donc $\int dN=1/c<+\infty$.

Supposons $\int dN<+\infty$, et soit $N'\in\mathscr{D}_R^{(b)}(N)$ quelconque. D'après le théorème 6, $N'=N*\nu+\eta$, où $\nu$ est une mesure positive dans $X$ et $\eta$ est un noyau de convolution $N$-invariant sur $X$. D'après le corollaire 2 du théorème 6, on a $\eta=p\eta*N_p$ $(^\forall p>0)$, et donc, pour un entier $m\geqq 1$ quelconque, $\eta=\eta*(pN_p)^m$ dans $X$. Donc, pour toute $f$ de $C_K^+$,

$$\int fd\eta = \int fd\eta*(pN_p)^m = \int \check{\eta}*fd(pN_p)^m \leqq (\sup_{x\in X}\check{\eta}*f(x))\int d(pN_p)^m$$

$$= (\sup_{x\in X}\eta*\check{f}(x))(p\int dN_p)^m \leqq (\sup_{x\in X}N'*\check{f}(x))(p\int dN_p)^m \longrightarrow 0$$

lorsque $m\to+\infty$. Ceci donne $\eta=0$ d'où $N$ est un diviseur de $N'$. On voit ainsi l'énoncé (1).

Montrons (2). D'après le corollaire 4 du théorème 6, il suffit de montrer qu'un noyau de convolution $N$-harmonique et borné $\eta$ sur $X$ satisfait à $\Gamma(\eta)\supset\operatorname{supp}(N)$. D'après le corollaire 2 du théorème 6 et le lemme 5.2, on a $\Gamma(\eta)\supset\operatorname{supp}(N_p)$ pour tout $p>0$. Comme $\Gamma(\eta)$ est fermé et $N_p\uparrow N$ avec $p\downarrow 0$, on a $\Gamma(\eta)\supset\operatorname{supp}(N)$, d'où (2).

La démonstration est ainsi complète.

Notons $\mathscr{H}^{(b)}(X)=\{N\in\mathscr{H}(X);\, N: \textit{borné}\}$. Nous donnerons quelques exemples d'éléments maximum dans un sous-ensemble de $\mathscr{H}^{(b)}(X)$.

EXEMPLE 1. Soit $X$ le groupe d'entiers. Dans ce cas, tout le noyau de convolution $N$ sur $X$ est, avec une suite $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ de nombres $\geqq 0$, de la forme $N=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\varepsilon_n$. Soit $A=\{N\in\mathscr{H}^{(b)}(N);\, \operatorname{supp}(N)\subset X^+\}$, où $X^+=\{t\in X;\, t\geqq 0\}$. Alors tout l'élément maximum dans $A$ est égal à $c\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varepsilon_n$, où $c$ est une constante

$>0$. En effet, soit $N=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon_n$ un élément de $A$ quelconque. Désignons par $(N_p=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}\varepsilon_n)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N$. Alors $p\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,p}\leqq 1$, d'après le principe de complet du maximum pour $N$. On a donc, pour tout $p>0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n*(\varepsilon-pN_p)\geqq 0 \qquad dans \quad X.$$

Par conséquent $N+\varepsilon/p\prec\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n$ ($^\forall p>0$) d'où $N\prec\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n$ (cf. le corollaire 4 du théorème 1). On voit ainsi notre énoncé.

Exemple 2. Soit $X=R^1$. On désigne par $A$ l'ensemble $\{N\in\mathscr{H}^{(b)}(X);\ \mathrm{supp}(N)\subset R^+\}$. Alors tout l'élément maximum dans $A$ est égal à $c\kappa$, où $c$ est une constante $>0$ et où $\kappa$ est le noyau d'Heaviside; c'est-à-dire, $\kappa=dt$ sur $R^+$ et $\kappa=0$ dans $\mathscr{C}R^+$. En effet, soit $N$ un élément de $A$ quelconque. Désignons par $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N$. D'après le principe complet du maximum pour $N$, on a, pour tout $p>0$, $p\int dN_p\leqq 1$. Comme $\mathrm{supp}(N_p)\subset R^+$, on a $\kappa*(\varepsilon-pN_p)\geqq 0$ et $\kappa=(\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}(pN_p)^n)*(\kappa-p\kappa*N_p)$. Donc on a $N+\varepsilon/p\prec\kappa$ ($^\forall p>0$). En faisant $p\to+\infty$, on a $N\prec\kappa$. On voit ainsi notre énoncé.

Exemple 3. Soit $X$ l'espace euclidien $R^n$ à dimension $n$ ($\geqq 3$). On note $A$ l'ensemble des noyaux de convolution de Hunt sur $R^n$ invariants par rotations. Alors tout l'élément maximum de $A$ est proportionnel au noyau newtonien. En effet, soit $N$ un élément de $A$ quelconque. D'après le corollaire du théorème 2, $N$ satisfait au principe complet du maximum. On désigne par $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $N$. Alors $N_p$ est aussi invariant par rotations et $p\int dN_p\leqq 1$ ($^\forall p>0$). Notons symboliquement $r^{2-n}$ le noyau newtonien sur $R^n$. Alors $r^{2-n}*(\varepsilon-pN_p)\geqq 0$ dans $X$ ($^\forall p>0$), et donc $N+\varepsilon/p\prec r^{2-n}$. En faisant $p\to+\infty$, on a $N\prec r^{2-n}$.

Exemple 4. Soit $L$ un opérateur différentiel uniformément elliptique et auto-adjoint d'ordre 2 sur $R^n$ ($n\geqq 3$) à coéfficients constants. On connaît bien que si le terme constant de $L$ est non-positif, alors il existe le noyau de convolution de Hunt $G_L$ sur $R^n$ tel que $LG_L=-\varepsilon$ au sens des distributions. Si le terme constant de $L$ s'annule, alors $G_L$ est maximum dans $\mathscr{H}(R^n)$. En effet, en considérant une certaine transformation linéaire de $R^n$, on voit qu'il suffit de montrer que $r^{2-n}$ est maximum dans $\mathscr{H}(R^n)$. Supposons que, pour un noyau de convolution de Hunt $N$ sur $R^n$, $r^{2-n}\prec N$. D'après la proposition 5.2, on peut écrire, avec une mesure positive $\nu$ dans $X$, $N=r^{2-n}*\nu$. Pour $f\in C_K^+$ quelconque, $\lim_{|x|\to+\infty} N*f(x)=0$, où $|x|$ désigne la distance entre $x$ et l'origine. Par conséquent, $N$ satisfait au principe complet du maximum (cf. le corollaire du théorème 2). On verra $\mathrm{supp}(\nu)\ni 0$. Sinon, il existe un nombre $r>0$ tel que $N=N*s_r$ dans un certain voisinage de $\{x\in R^n; |x|\leqq r\}$, où $s_r$ est la mesure uniforme sur $\{x; |x|=r\}$ avec $\int ds_r=1$. Donc on a $N=N*s_r$ dans $X$, mais cela est en contradiction avec l'injectivité de $N$, d'où $\mathrm{supp}(\nu)\ni 0$. D'après le principe complet du maximum pour $N$, $N\prec 1$, où 1 est le noyau de convolution défini par la mesure de Lebesque $dx$. Donc, pour un ouvert relativement compact $\omega$ de $X$ quelconque, il existe une mesure positive $\lambda_\omega$ portée par $\bar{\omega}$ telle que $N*\lambda_\omega\leqq dx$ dans $R^n$ et $N*\lambda_\omega=dx$ dans $\omega$. Comme $r^{2-n}*\nu*\lambda_\omega=dx$ dans $\omega$, on a $\mathrm{supp}(\lambda_\omega)+\mathrm{supp}(\nu)=\mathrm{supp}(\lambda_\omega*\nu)$ $\subset\mathscr{C}\omega$. Comme $\mathrm{supp}(\nu)\ni 0$, on a $\mathrm{supp}(\lambda_\omega)\subset Fr(\omega)$, où $Fr(\omega)$ est la frontière de $\omega$. On voit encore que $\mathrm{supp}(\nu)$ ne contient aucun ouvert non-vide. Soit $V$ un voisinage compact de l'origine quelconque. Notons $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ la mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\mathscr{C}V$ relativement au noyau $N$. Comme $r^{2-n}*\nu*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V})=N-N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ $=0$ dans $\mathscr{C}V$, on a $\nu=\nu*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ dans $\mathscr{C}V$. On verra que la restreinte de $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ sur $\mathscr{C}V$ sera absolument continue. Soit $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noayu $N$. On a, pour tout voisinage compact $U$ de l'origine et toute fonction $f$ de $C_K$ avec $U\cap\mathrm{supp}(f)=\phi$,

$$\lim_{p\to+\infty}\int fd(p^2N_p)*N*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}U}) = \lim_{p\to+\infty}\int fd(p(pN_p-\varepsilon))*N*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}U})$$

$$= \lim_{p\to+\infty}\int fd(pN_p)*(\varepsilon'_{\mathscr{C}U}-\varepsilon) = \int fd\varepsilon'_{\mathscr{C}U}\,.$$

Donc $(p^2N_p)_{p>0}$ converge vaguement vers une limite $\sigma$ en dehors de l'origine lorsque $p\to+\infty$. On a encore $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}=\left(\left(\int N*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V})(x-y)d\sigma(y)\right)dx\right.$ en dehors de $V$, où $N*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V})(x)$ désigne ici une densité borelienne de la mesure $N*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V})$. En remarquant que $\nu=\nu*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ dans $\mathscr{C}V$, $\mathrm{supp}(\nu)\ni 0$ et que $\mathrm{supp}(\nu)$ ne contient aucun ouvert non-vide, on voit que $\mathrm{supp}(\varepsilon'_{\mathscr{C}V})\subset Fr(V)$. Pour un nombre $r>0$, on désigne par $\varepsilon'_r$ la mesure balayée de $\varepsilon$ sur $\{x\in R^n; |x|>r\}$ par rapport au noyau $N$ et pose $\alpha_r=N-N*\varepsilon'_r$. Comme $-\Delta N=-\Delta\alpha_r*(\varepsilon+\sum_{m=1}^{\infty}(\varepsilon'_r)^m)$ $=C\nu$, où $C$ est une constante $>0$ tel que $\Delta r^{2-n}=-C\varepsilon$, la transformation de Fourier $\hat{\nu}$ de $\nu$ est définie et

$$\hat{\nu}(x)=\frac{|x|^2}{C(1-\widehat{\varepsilon'_r}(x))}\widehat{\alpha_r}(x)\quad p.p.$$

sur $R^n$, où $\hat{\nu}(x)=\int\exp(-\sqrt{-1}x\cdot y)d\nu(y)$. Comme la fonction droite est bornée dans un certain voisinage de l'origine, on a $\int d\nu<+\infty$. Comme $\int d\alpha_r\lim_{x\to 0}|x|^2/(1-\hat{\varepsilon}'_r(x))=C\int d\nu<+\infty$, on voit facilement que $\int y_i d\varepsilon'_r=0$ $(1\leqq{}^\forall i\leqq n)$,

$\int y_i y_j d\varepsilon'_r = 0$ $(i \neq j)$ et $\int y_i^2 d\varepsilon'_r = n^{-1}\int |y|^2 d\varepsilon'_r$. En remarquant que $\int d\alpha_r(1-\varepsilon'_r(x))^{-1}$ converge vers $\hat{N}$ lorsque $r \downarrow 0$, on voit que $N$ est invariant par rotations. On a donc, avec une constante $c>0$, $N = cr^{2-n}$ (voir le présent exemple 3).

Si l'on utilise le théorème de Levy-Khinchine, on peut le montrer plus simplement.

PROBLÈME. Est-ce-qu'il existe d'éléments maximum dans $\mathscr{H}^{(b)}(R^n)$ pour $n=1, 2$?

## Bibliographie

[1] J. Deny, Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$, Sém. de la théorie du potentiel, **4** ème année, 1959/60, n° 5.
[2] ———, Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale Ann. Inst. Fourier, **12** (1962), 643–667.
[3] I. Higuchi et M. Itô, Characterization of the relative domination principle, Nagoya Math. J., **50** (1973), 175–184.
[4] M. Itô, Sur les principes divers du maximum et le type positif, ibid., **44** (1971), 133–164.
[5] ———, Sur le principe de domination pour les noyaux de convolution, ibid., **50** (1973), 149–173.
[6] M. Kishi, Puissance fractionnaire d'un noyau dont le carré est encore un noyau, ibid., **44** (1971), 79–88.

*Mathematical Institute*
*Nagoya University*