HIROSHIMA MATH. J.
10 (1980), 271–293

Le problème de Stefan avec conditions latérales variables

Alain DAMLAMIAN et Nobuyuki KENMOCHI

(Reçu le 12 juin 1979)

Le problème de Stefan, c'est-à-dire une modélisation mathématique simplifiée de phénomènes de changement de phases, a été étudié par de nombreux auteurs (cf. Oleinick [15], Kamenomostskaïa [10], Rubinstein [16], Cannon-Primicerio [5], Friedman [9] et leurs bibliographies). On sait que le problème de Stefan à plusieurs phases en dimension d'espace supérieure à 1, admet une formulation faible comme inéquation variationnelle d'évolution de type dégénéré (cf. Brézis [4], Damlamian [8]).

On entreprend ici l'étude de ce problème dans le cas où les conditions latérales dépendant du temps, y compris la partie de la frontière latérale correspondant à la donnée de Dirichlet non homogène. Il s'agit alors d'un problème nouveau dont la résolution nécessite l'utilisation d'inéquations variationnelles plus générales que dans Damlamian [6], et qui ont été introduites sous forme abstraite dans Kenmochi-Nagai [13].

Pour fixer les idées considérons le problème à deux phases dans un ouvert borné régulier Ω (on néglige comme d'habitude les variations de volume).

Une normalisation de la température θ permet de ramener à $\theta=0$ la température de changement de phases, et chaque phase est alors incluse dans $\{\theta\leqq 0\}$ et $\{\theta\geqq 0\}$ respectivement.

La formulation classique est alors la suivante: on cherche θ distribution de température dans $Q=(0, T)\times\Omega$ et l'interface S (une hypersurface "régulière" dans Q) tels que

(i) dans $Q-S$, θ vérifie une équation de la chaleur s'écrivant

$$\rho(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}-\Delta\theta=f$$

(f terme de chauffage interne), où $\rho(\theta)$ est une fonction thermodynamique strictement positive (qui intègre la conductivité thermique et la chaleur massique, toutes deux dépendant de la température);

(ii) sur l'interface S (qui est une surface libre) deux conditions soient satisfaites: $\theta=0$ et la condition de conservation de l'énergie

$$b\cos(\vec{\nu},\vec{t})-\sum_i\left[\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right]_S\cos(\vec{\nu},\vec{x}_i)=0,$$

où b est la chaleur latente de changement de phase, constante strictement positive, $\vec{\nu}$ est la normale à S dans Q et $[\cdot]_S$ indique le saut à travers S dans le sens $\vec{\nu}$;

(iii) en $t=0$ les conditions initiales sont

$$\theta(0, \cdot) = \theta_o \quad \text{et} \quad S(0) = S \cap \{t = 0\} = S_o$$

surface de séparation des phases dans Ω avec la condition de compatibilité évidente (i.e., $\theta_o=0$ sur S_o, $\theta_o \leqq 0$ d'un côté, $\theta_o \geqq 0$ de l'autre de S_o);

(iv) les conditions latérales soient satisfaites: soit $\Gamma=\partial\Omega$ et $\Sigma=(0, T)\times\Gamma$. On suppose donnée une partie fermée régulière Σ_o de Σ, et on note $\{t\}\times\Gamma(t)$ avec $\Gamma(t)\subset\Gamma$ sa section à l'instant t. Soit g une fonction régulière sur $\bar{Q}$ (qui représente un relèvement dans Q de ses traces sur Σ). Les conditions s'écrivent alors

$$\theta - g = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_o,$$

$$\frac{\partial(\theta - g)}{\partial n} + p(\theta - g) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma' = \Sigma - \Sigma_o,$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire extérieure à Γ et p est une fonction non négative bornée sur Σ (elle mesure la perméabilité thermique locale de la frontière).

La formulation faible du problème s'obtient en multipliant les équations par une fonction-test ϕ de $C^1(\bar{Q})$ vérifiant $\phi_{|\Sigma_o}=0$ et $\phi(T, \cdot)=0$; tous calculs faits on obtient (cf. Damlamian [7, 8]): Chercher u et v fonctions dans Q vérifiant

$$-\int_Q \frac{\partial\phi}{\partial t} u \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T a(v, \phi)\mathrm{d}t = \int_Q f\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega u_o\phi(0, \cdot)\mathrm{d}x$$

avec $v=\beta(u)-g$ et

$$a(v, \phi) = \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x + \int_\Gamma pv\phi\mathrm{d}\Gamma, \quad \nabla\phi = \text{gradient de } \phi \text{ en } x\in\boldsymbol{R}^N,$$

où β est la fonction lipschitzienne dont l'inverse est le graphe maximal monotone:

$$r \longmapsto \int_0^r \rho(s)\mathrm{d}s + bH(r) \quad (H \text{ fonction de Heaviside})$$

et u_o est simplement

$$u_o(x) = \int_0^{\theta_o(x)} \rho(s)\mathrm{d}s + b\chi_{\{\theta_o\geqq 0\}}(x).$$

Le plan est le suivant:

Dans le premier paragraphe les hypothèses sont données et les résultats principaux énoncés. Pour le paragraphe 2 l'outil principal d'inéquation variationnelle est introduit avec l'opérateur L_{u_o}. Puis on étudie les solutions approchées (cas non linéaire non dégénéré) (paragraphe 3) et leur convergence (paragraphe 4). Au paragraphe 5 on démontre enfin l'unicité des solutions approchées. Certaines démonstrations compliquées sont mises en appendice (A, B, C et D).

Notations. Etant donné V espace de Banach (réel), on notera par $|\cdot|_V$ la norme dans V, par V^* son dual muni de la norme duale et par $(\cdot, \cdot)_V$ la forme de dualité entre V^* et V. On utilisera les signes "$\rightarrow$" et "$\rightharpoonup$" pour désigner respectivement les convergences forte et faible.

1. Position du problème ; énoncé des résultats

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ régulière dans $\boldsymbol{R}^N$ ($N \geqq 2$) et T un réel positif. On note:

$$Q = (0, T) \times \Omega, \quad \Sigma = (0, T) \times \Gamma,$$

$$H = L^2(\Omega), \quad X = H^1(\Omega), \quad X_o = H_o^1(\Omega).$$

On identifie H à son dual. Pour simplifier l'écriture on notera par $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|$ les normes dans $L^2(0, T; X^*)$ et $L^2(0, T; X)$ et par $(\!(\cdot, \cdot)\!)$ la forme de dualité entre ces deux espaces.

Soit β une fonction réelle de la variable réelle, non décroissante, nulle en zéro, lipschitzienne de constante de Lipschitz C_1 et vérifiant

$$0 < \liminf_{|r| \to \infty} \frac{\beta(r)}{r},$$

et p une fonction réelle mesurable sur Σ vérifiant $0 \leqq p \leqq C_2$ p.p. sur Σ, où C_1 et C_2 sont des constantes positives dont on suppose l'existence dans tout cet article. Sur Γ la mesure de surface (notée $\mathrm{d}\Gamma$) est considerée ainsi que $\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t$ sur Σ.

On se donne une famille $\{\Gamma(t); 0 \leqq t \leqq T\}$ de sous-ensembles fermés de Γ et on note

$$\Sigma_o = \cup_{0<t<T} \{t\} \times \Gamma(t);$$

on suppose qu'il est fermé dans Σ.

A cette famille on associe les espaces suivants:

$$X(t) = \{z \in X;\ z_{|\Gamma} = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma(t)\}$$

et

$$W(Q) = \{\phi \in H^1(Q);\ \phi_{|\Sigma} = 0 \text{ p.p. sur } \Sigma_o \text{ et } \phi(T, \cdot) = 0 \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

où $z_{|\Gamma}$ (resp. $\phi_{|\Sigma}$) est la trace de z (resp. ϕ) sur Γ (resp. Σ) et $\phi(t, \cdot) \in H$ pour tout t de $[0, T]$, puisque $W(Q)$ est considéré comme un sous-espace de $C([0, T]; H)$.

DÉFINITION 1.1. *On dit que u est une solution du problème $P(u_o, f, g)$ pour u_o donné dans H, f et g dans $L^2(0, T; H)$, si*

(i) *u est faiblement continue de $[0, T]$ à valeurs dans H avec $u(0)=u_o$;*

(ii) *$\beta(u)-g \in L^2(0, T; X)$ et $\beta(u(t))-g(t) \in X(t)$ pour presque tout t de $[0, T]$;*

(iii) $$-\int_Q u\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_Q \nabla(\beta(u)-g)\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Sigma p(\beta(u)-g)\phi\mathrm{d}\Sigma$$
$$= \int_Q f\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega u_o\phi(0,\cdot)\mathrm{d}x$$

pour tout ϕ de $W(Q)$, où ∇z=gradient de z en $x=(x_1, x_2,\dots, x_N)$ de $\boldsymbol{R}^N$.

Dans tout cet article on fera l'hypothèse géométrique suivante sur la famille $\{\Gamma(t);\, 0 \leqq t \leqq T\}$:

HYPOTHÈSE 1.1. *Il existe un arc lipschitzien θ: $[0, T] \to \mathrm{Diff.}(\bar{\Omega})$ tel que $\theta(0)=I$ et $\Gamma(t)=\theta(t)(\Gamma(0))$ pour tout t de $[0, T]$, où $\Gamma(0)$ est un compact de Γ ayant une mesure superficielle positive et $\mathrm{Diff.}(\bar{\Omega})$ est l'espace des C^1-difféomorphismes de $\bar{\Omega}$ sur lui-même muni de la topologie usuelle.*

Dans l'Appendice A nous donnons l'énoncé et la démonstration de deux estimations essentielles, conséquences de l'Hypothèse 1.1.

On a alors le théorème suivant:

THÉORÈME 1.1. *Sous les hypothèses précédentes, avec u_o dans H, f dans $L^2(0, T; H)$ et g dans $W^{1,2}(0, T; H)$, le problème $P(u_o, f, g)$ admet une solution.*

Pour montrer l'existence d'une solution de $P(u_o, f, g)$ on l'approche par une famille de problèmes $P_\nu(u_o, f, g)$ $(\nu \downarrow 0)$:

DÉFINITION 1.2. *On dit que u est une solution de $P_\nu(u_o, f, g)$, si u vérifie:*

$(\mathrm{i})_\nu$ *$u \in C([0, T]; H)$ et $u(0)=u_o$;*

$(\mathrm{ii})_\nu$ *$\nu u+\beta(u)-g \in L^2(0, T; X)$ avec $\nu u(t)+\beta(u(t))-g(t) \in X(t)$ p.p. $t \in [0, T]$;*

$(\mathrm{iii})_\nu$ $$-\int_Q u\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_Q \nabla(\nu u+\beta(u)-g)\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$+ \int_\Sigma p(\nu u+\beta(u)-g)\phi\mathrm{d}\Sigma$$

$$= \int_Q f\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega u_o \phi(0, \cdot)\mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in W(Q).$$

Nous montrerons l'existence d'une solution u_ν de $P_\nu(u_o, f, g)$, puis celle d'une suite $\{\nu_n\}$ décroissant vers zéro telle que u_{ν_n} converge vers une solution de $P(u_o, f, g)$.

Le problème de l'unicité de la solution de $P(u_o, f, g)$ est encore ouvert, mais sous une hypothèse supplémentaire sur p, nous montrerons l'unicité de la solution de $P_\nu(u_o, f, g)$.

2. L'opérateur L_{u_0}; perturbations L_{u_0}-pseudomonotones

On introduit les notations suivantes:

$$\mathscr{X} = \{v \in L^2(0, T; X);\ v(t) \in X(t) \text{ p.p. } t \in [0, T]\},$$

qui est un sous-espace fermé de $L^2(0, T; X)$, et

$$\mathscr{X}_o = \{v \in \mathscr{X};\ v' \ (= (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)v) \in L^2(0, T; X^*)\}$$

dont on sait qu'il est un sous-espace fermé de $C([0, T]; H)$ (cf. Lions-Magenes [14; Chapitre 1]). Pour u_o dans H on pose

$$\mathscr{X}_1(u_o) = \{v \in \mathscr{X};\ \exists v_n \in \mathscr{X}_o \text{ et } \exists C_v \in \boldsymbol{R} \text{ tels que } v_n(0) \longrightarrow u_o \text{ dans } H,$$
$$v_n \longrightarrow v \text{ dans } \mathscr{X} \text{ et } |\langle\!\langle v_n', w\rangle\!\rangle| \leqq C_v\|w\| \text{ pour tout } w \in \mathscr{X}\}.$$

Enfin on définit l'opérateur multivoque L_{u_o} par son graphe dans $L^2(0, T; X) \times L^2(0, T; X^*)$:

$$\text{(2.1)} \qquad u^* \in L_{u_o}u \Longleftrightarrow \begin{cases} u \in \mathscr{X}_1(u_o),\ u^* \in L^2(0, T; X^*) \text{ et} \\ -\langle\!\langle w', u\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u^*, w\rangle\!\rangle + (u_o, w(0))_H \\ \text{pour tout } w \in \mathscr{X}_o \text{ avec } w(T) = 0. \end{cases}$$

L'opérateur L_{u_o} va jouer le rôle d'une formulation affaiblie de $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, puisque les fonctions-test sont seulement les éléments de $\mathscr{X}_o$ nuls en $t = T$. Cet opérateur conserve suffisamment des propriétés usuelles de $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ comme le montrent la proposition suivante, dont on trouvera la démonstration dans les Appendices A et B. Remarquons que si u est dans $\mathscr{X}_o$, alors $u' \in L_{u(0)}u$.

PROPOSITION 2.1. (i) *Pour tout u_o de H, L_{u_o} est maximal monotone de $L^2(0, T; X)$ dans $L^2(0, T; X^*)$ et son domaine $D(L_{u_o})$ est inclus dans $\{u \in C([0, T]; H);\ u(0) = u_o\}$.*

(ii) *Pour tout $u_o, v_o \in H$, $u^* \in L_{u_o}u$, $v^* \in L_{v_o}v$, on a la formule d'intégration* *par parties*:

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t \{(u^*(\tau), v(\tau))_X + (v^*(\tau), u(\tau))_X\} d\tau$$

pour tout $0 \leqq s \leqq t \leqq T$.

(iii) *Soient* $u_o \in H$, $\{u_{o,n}\} \subset X(0)$ *avec* $u_{o,n} \to u_o$ *dans* H. *Pour tout* $u^* \in L_{u_o}u$ *il existe deux suites* $\{u_n\}$ *et* $\{u_n^*\}$ *telles que* $u_n^* \in L_{u_{o,n}}u_n$, $u_n \in W^{1,2}(0, T; H)$, $u_n \to u$ *dans* $L^2(0, T; X)$ *et dans* $C([0, T]; H)$ *et* $u_n^* \to u^*$ *dans* $L^2(0, T; X^*)$.

(iv) *Le graphe de* L_o *(pour* $u_o = 0$*) est linéaire dans* $L^2(0, T; X) \times L^2(0, T; X^*)$.

(v) *Le graphe de* L_{u_o} *est une variété affine de* $L^2(0, T; X) \times L^2(0, T; X^*)$ *de direction le graphe de* L_o.

PROPOSITION 2.2. *Soient* u_o *dans* H *et* $u_n^* \in L_{u_o}u_n$ $(n=1, 2,\dots)$. *Si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $L^2(0, T; X)$ *et si* $\{u_n^*\}$ *est bornée dans* $L^2(0, T; X^*)$, *alors* $u_n \to u$ *dans* $L^2(0, T; H)$.

DÉMONSTRATION. On a $X \subset H \subset X_o^*$ et ces injections sont compactes. D'après la définition de L_{u_o} on a

$$\langle\!\langle u_n^*, z\rangle\!\rangle = -\int_0^T (u_n(\tau), z)_{X_o} \rho'(\tau) d\tau, \quad \forall z \in X_o, \quad \forall \rho \in \mathscr{D}(0, T);$$

donc $u_n^* = u_n'$ dans $L^2(0, T; X_o^*)$. Le théorème de compacité d'Aubin [2] montre alors que $\{u_n\}$ est relativement compacte dans $L^2(0, T; H)$ et donc $u_n \to u$ dans cet espace.

PROPOSITION 2.3. *Soient* u_o *dans* H, u *dans* $\mathscr{X}$ *et* u^* *dans* $L^2(0, T; X^*)$. *On suppose que pour tout* w *de* $\mathscr{X}_o$ *avec* $w(T)=0$

$$-\langle\!\langle w', u\rangle\!\rangle = \langle\!\langle u^*, w\rangle\!\rangle + (u_o, w(0))_H.$$

Alors u *est dans* $\mathscr{X}_1(u_o)$ *et donc* $u^* \in L_{u_o}u$.

La proposition ci-dessus, dont la démonstration est donnée dans l'Appendice A, montre que l'opérateur L_{u_o} a pour domaine les éléments u de $L^2(0, T; X)$ tels que l'application

$$w \longmapsto \langle\!\langle w', u\rangle\!\rangle + (u_o, w(0))_H$$

définie sur $\mathscr{X}_o$ se prolonge (de manière unique) par continuité à $\mathscr{X}$.

Nous utiliserons dans la démonstration du Théorème 1.1 les perturbations L_{u_o}-pseudomonotones et le résultat suivant, conséquence de Brézis [3].

PROPOSITION 2.4. *Soit* P *un opérateur de* $L^2(0, T; X)$ *dans* $L^2(0, T; X^*)$ *vérifiant*:

(1) *P est partout défini et borné (i.e., envoie les bornés dans des bornés).*

(2) *P est coercif*: $\dfrac{\langle\langle Pv, v\rangle\rangle}{\|v\|} \to \infty$ *si* $\|v\| \to \infty$.

(3) *Si* $v_n \rightharpoonup v$ *dans* $L^2(0, T; X)$ *et* $v_n \to v$ *dans* $L^2(0, T; H)$, *alors* $Pv_n \rightharpoonup Pv$ *dans* $L^2(0, T; X^*)$ *et*

$$\liminf_{n\to\infty} \langle\langle Pv_n, v_n\rangle\rangle \geqq \langle\langle Pv, v\rangle\rangle .$$

Alors, pour tout u_o *de* H, *l'opérateur* $L_{u_o}+P$: $D(L_{u_o}) \to L^2(0, T; X^*)$ *est surjectif.*

Démonstration. La condition (3) et la Proposition 2.2 impliquent que P est L_{u_o}-pseudomonotone au sens de Brézis [3], c'est-à-dire que P vérifie la propriété suivante: si $v_n^* \in L_{u_o}v_n$, $v_n \rightharpoonup v$ dans $L^2(0, T; X)$, $\{v_n^*\}$ est bornée dans $L^2(0, T; X^*)$ et si

$$\limsup_{n\to\infty} \langle\langle Pv_n, v_n - v\rangle\rangle \leqq 0,$$

alors $Pv_n \rightharpoonup Pv$ dans $L^2(0, T; X^*)$ et

$$\lim_{n\to\infty} \langle\langle Pv_n, v_n - v\rangle\rangle = 0.$$

Par suite, la conclusion de la Proposition 2.4 est conséquence de Brézis [3; Théorème 1].

3. Les problèmes approchés

Soient u_o dans H, f dans $L^2(0, T; H)$ et g dans $W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; X)$. Pour $\nu>0$ on définit B^ν de $L^2(0, T; X)$ dans $L^2(0, T; X^*)$ par

$$\langle\langle B^\nu v, w\rangle\rangle = \int_Q \nabla(\beta^\nu(v) - g)\cdot \nabla w \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Sigma p(\beta^\nu(v) - g) w \mathrm{d}\Sigma$$

pour tout v, w de $L^2(0, T; X)$, où $\beta^\nu(r) = \nu r + \beta(r)$. Remarquons que $(\beta^\nu)^{-1}$ est une application croissante lipschitzienne de $\boldsymbol{R}$ dans lui-même et nulle en zéro. Par suite elle opère sur $L^2(0, T; X) \cap W^{1,2}(0, T; H)$. Cette remarque et le Lemme 3.1 ci-dessous permet de voir que u est une solution de $P_\nu(u_o, f, g)$ si et seulement si:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} u \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; X),\ u(0) = u_o, \\ \beta^\nu(u) - g \in \mathscr{X} \text{ et pour tout } v \in \mathscr{X}_o \text{ avec } v(T) = 0 \\ -\langle\langle v', u\rangle\rangle + \langle\langle B^\nu u - f, v\rangle\rangle = (u_o, v(0))_H. \end{cases}$$

Lemme 3.1 (cf. Damlamian [7]). *Pour* v *donné dans* $\mathscr{X}_o$, *il existe une suite* $\{v_n\} \subset W(Q)$*) *telle que* $v_n \to v$ *dans* $L^2(0, T; X)$ *et* $v_n' \to v'$ *dans* $L^2(0, T; X^*)$.

*) Voir la définition de W(Q) au paragraphe 1.

Notons $h_\nu = (\beta^\nu)^{-1} \circ g$, c'est-à-dire $h_\nu(t, x) = (\beta^\nu)^{-1}(g(t, x))$. Comme remarqué ci-dessus h_ν est dans $L^2(0, T; X) \cap W^{1,2}(0, T; H)$ et on a:

PROPOSITION 3.1. *Sous les hypothèses précédentes, u est une solution de $P_\nu(u_o, f, g)$ si et seulement si $v = u - h_\nu$ appartient au domaine de L_{v_o} avec $v_o = u_o - h_\nu(0)$ et*

$$f - h'_\nu \in L_{v_o} v + B^\nu(v + h_\nu).$$

DÉMONSTRATION. Si $f - h'_\nu - B^\nu(v + h_\nu) \in L_{v_o} v$, alors on voit facilement que $u = v + h_\nu$ satisfait à (3.1) et donc est une solution de $P_\nu(u_o, f, g)$. Réciproquement, si u est une solution de $P_\nu(u_o, f, g)$, reécrivant (3.1) en terme de $v = u - h_\nu$ et utilisant la Proposition 2.3 on voit que $f - h'_\nu - B^\nu(v + h_\nu) \in L_{v_o} v$.

On en déduit le:

THÉORÈME 3.1. *Le problème $P_\nu(u_o, f, g)$ admet une solution pour tout $\nu > 0$, u_o dans H, f dans $L^2(0, T; H)$ et g dans $L^2(0, T; X) \cap W^{1,2}(0, T; H)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $Pv = B^\nu(v + h_\nu)$. Il est alors aisé de vérifier que P satisfait aux hypothèses de la Proposition 2.4 (cf. Appendice D), d'où le résultat.

Nous allons établir une estimation indépendante de ν pour les solutions de $P_\nu(u_o, f, g)$ (elle correspond, dans le cas $X(t)$ indépendant de t, à l'estimation de l'énergie dans $X(t)^*$).

LEMME 3.2. *Sous les hypothèses précédentes et en notant j^ν la primitive de β^ν s'annulant en zéro, si $v^* \in L_{v_o} v$, alors on a pour tout s, t de $[0, T]$:*

$$\int_s^t (v^*(\tau) + h'_\nu(\tau), \beta^\nu(v(\tau) + h_\nu(\tau)) - g(\tau))_X d\tau$$

$$= \int_\Omega j^\nu(v(t) + h_\nu(t)) dx - \int_\Omega j^\nu(v(s) + h_\nu(s)) dx + \int_s^t (g'(\tau), v(\tau) + h_\nu(\tau))_H d\tau$$

$$- (v(t) + h_\nu(t), g(t))_H + (v(s) + h_\nu(s), g(s))_H.$$

DÉMONSTRATION. Utilisant la Proposition 2.1, (iii), on peut trouver des suites $\{v_{o,n}\}$ dans $X(0)$, $\{v_n\}$ dans $\mathscr{X} \cap W^{1,2}(0, T; H)$ et $\{v_n^*\} \subset L^2(0, T; X^*)$ avec $v_n^* \in L_{v_{o,n}} v_n$ telles que

$$v_{o,n} \longrightarrow v_o \text{ dans } H,$$

$$v_n \longrightarrow v \text{ dans } L^2(0, T; X) \text{ et dans } C([0, T]; H),$$

$$v_n^* \longrightarrow v^* \text{ dans } L^2(0, T; X^*).$$

De plus on a: pour tout $w \in \mathscr{X}$ et s, t de $[0, T]$,

$$\int_s^t (v_n^*, w)_X \mathrm{d}\tau = \int_s^t (v_n', w)_X \mathrm{d}\tau.$$

On a alors

$$\int_s^t (v_n^* + h_\nu', \beta^\nu(v_n + h_\nu) - g)_X \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_s^t (v_n' + h_\nu', \beta^\nu(v_n + h_\nu) - g)_H \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_s^t \frac{\partial}{\partial\tau} \int_\Omega j^\nu(v_n + h_\nu) \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau - \int_s^t (v_n' + h_\nu', g)_H \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_\Omega \{j^\nu(v_n(t) + h_\nu(t)) - j^\nu(v_n(s) + h_\nu(s))\} \mathrm{d}x + (v_n(s) + h_\nu(s), g(s))_H$$

$$- (v_n(t) + h_\nu(t), g(t))_H + \int_s^t (g', v_n + h_\nu)_H \mathrm{d}\tau.$$

Passant à la limite en n, et utilisant la continuité de β^ν sur H et sa continuité faible sur X, on obtient le résultat.

PROPOSITION 3.2. *Soient u_o dans H, f dans $L^2(0, T; H)$ et g dans $L^2(0, T; X)$ avec $g' \in L^2(0, T; H)$. Alors il existe une constante C_o dépendant de*

$$|u_o|_H, \ |f|_{L^2(0,T;H)}, \ |g|_{L^2(0,T;H)} \ \text{et} \ |g'|_{L^2(0,T;H)},$$

mais indépendante de ν telle que

$$\|\beta^\nu(u) - g\| \leqq C_o \ \text{et} \ \|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqq C_o$$

pour toutes les solutions u de $P_\nu(u_o, f, g)$ avec $0<\nu\leqq 1$.

DÉMONSTRATION. On applique le Lemme 3.2 à $f - h_\nu' - B^\nu(v + h_\nu) \in L_{v_o} v$ avec $v = u - h_\nu$ et $v_o = u_o - h_\nu(0)$. On voit alors

$$\int_\Omega j^\nu(u(t))\mathrm{d}x + \int_0^t [\int_\Omega |\nabla(\beta^\nu(u) - g)|^2 \mathrm{d}x + \int_\Gamma p|\beta^\nu(u) - g|^2 \mathrm{d}\Gamma] \mathrm{d}\tau + (u(t), g(t))_H$$

$$= \int_\Omega j^\nu(u_o)\mathrm{d}x + (u_o, g(0))_H - \int_0^t (g', u)_H \mathrm{d}\tau + \int_0^t (f, \beta^\nu(u) - g)_H \mathrm{d}\tau.$$

Comme il existe des constantes a, b, a', b', positives indépendantes de ν telles que

$$ar^2 - b \leqq j^\nu(r) \leqq a'r^2 + b', \quad \forall r \in \boldsymbol{R},$$

on en déduit que u est bornée dans $L^\infty(0, T; H)$, puis que $\beta^\nu(u) - g$ est bornée dans $\mathscr{X}$ indépendamment de ν.

4. Convergence des solutions approchées

On suppose désormais que u_o appartient à H, f à $L^2(0, T; H)$ et g à $W^{1,2}(0, T; H)$ seulement.

Pour chaque ν de $(0, 1]$ on choisit g_ν dans $W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; X)$ de telle sorte que g_ν converge vers g dans $W^{1,2}(0, T; H)$ pour ν tendant vers zéro.

Par le Théorème 3.1 et la Proposition 3.2 le problème $P_\nu(u_o, f, g_\nu)$ admet au moins une solution (notée u_ν) avec l'estimation suivante indépendante de ν:

$$(4.1) \qquad \|\beta^\nu(u_\nu) - g_\nu\| \leqq C_o, \quad |u_\nu|_{L^\infty(0,T;H)} \leqq C_o.$$

Soit alors $\{\nu_n\}$ une suite tendant vers zéro telle que u_{ν_n} converge faiblement dans $L^2(0, T; H)$ et $\beta^{\nu_n}(u_{\nu_n}) - g_{\nu_n}$ converge faiblement dans $L^2(0, T; X)$. Pour simplifier les notations on écrira u_n, β^n, g_n pour u_{ν_n}, etc... On a donc, en notant $v_n = \beta^n(u_n) - g_n$,

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H)$$

et

$$v_n = \beta^n(u_n) - g_n \longrightarrow v \text{ dans } L^2(0, T; X).$$

Il est clair que u est dans $L^\infty(0, T; H)$ et que v est dans $\mathscr{X}$.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition suivante qui démontre le Théorème 1.1.

PROPOSITION 4.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, la fonction u est une solution du problème $P(u_o, f, g)$.*

On considère la suite $\{u_n^* = f - B^{\nu_n} u_n\}$ dans $L^2(0, T; X^*)$. D'après (4.1), $\{u_n^*\}$ est bornée dans cet espace. Par ailleurs

$$(u_n(t), w(t))_H - (u_n(s), w(s))_H = \int_s^t \{(u_n^*(\tau), w(\tau))_X + (w'(\tau), u_n(\tau))_X\} d\tau$$

pour $0 \leqq s, t \leqq T$ et pour $w \in \mathscr{X}_o$.

D'après un résultat de compacité démontré dans l'Appendice C on a:

LEMME 4.1. $|u_n(t) - u_m(t)|_{X(t)^*} \to 0$ *uniformément en t dans $[0, T]$ lorsque $n, m \to \infty$.*

Ce lemme implique en particulier que la limite faible u de $\{u_n\}$ admet un représentant (que nous noterons encore u) qui est faiblement continu de $[0, T]$ dans H, et qui vérifie $u(0) = u_o$.

Dès lors, puisque v_n est dans $\mathscr{X}$, on a pour presque tout t

$$(u_n(t) - u_m(t), v_n(t) - v_m(t))_{X(t)} = (u_n(t) - u_m(t), v_n(t) - v_m(t))_H,$$

d'où l'on a d'après (4.1) et le Lemme 4.1

$$\int_0^T |(u_n - u_m, v_n - v_m)_H| \mathrm{d}t \leqq 2C_o\Big[\int_0^T |u_n - u_m|^2_{X(\cdot)^*} \mathrm{d}t\Big]^{1/2}$$

et par suite

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_0^T (u_n - u_m, v_n - v_m)_H \mathrm{d}t = 0.$$

On en déduit

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_0^T (u_n - u_m, \beta^n(u_n) - \beta^m(u_m))_H \mathrm{d}t = 0,$$

donc

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_0^T (u_n - u_m, \beta(u_n) - \beta(u_m))_H \mathrm{d}t = 0$$

et enfin, puisque β est lipschitzienne,

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_0^T |\beta(u_n) - \beta(u_m)|_H^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Par conséquent, $\beta(u_n)$ converge fortement vers $\beta(u)$ dans $L^2(0, T; H)$ (par maximale monotonie de β dans $L^2(0, T; H)$) ainsi que $\beta^n(u_n)$, et donc $v = \beta(u) - g$.

Il ne reste plus qu'à passer à la limite dans $(\mathrm{iii})_{v_n}$ de la Définition 1.2 du problème $P_{v_n}(u_o, f, g_{v_n})$ pour obtenir

$$-\int_0^T (\phi', u)_H \mathrm{d}t + \int_Q \nabla(\beta(u) - g)\cdot\nabla\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Sigma p(\beta(u) - g)\phi \mathrm{d}\Sigma$$
$$= \int_Q f\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega u_o\phi(0, \cdot)\mathrm{d}x, \quad \forall\phi \in W(Q),$$

c'est-à-dire que u est une solution de $P(u_o, f, g)$.

5. Unicité des solutions approchées

Dans ce paragraphe, outre l'Hypothèse 1.1, nous supposons que p est lipschitzienne par rapport à (t, x), i.e.,

(5.1) $\quad |p(t, x) - p(s, y)| \leqq C_3\{|t - s| + |x - y|\}, \quad x, y \in \Gamma, \ s, t \in [0, T].$

On notera

$$\Phi(t, z) = \frac{1}{2}\Big\{\int_\Omega |\nabla z|^2 \mathrm{d}x + \int_\Gamma p(t, \cdot)z^2 \mathrm{d}\Gamma\Big\}$$

qui est le carré d'une norme équivalente à la norme de X. On notera $A(t)$ l'application de dualité de $X(t)$ dans son dual $X(t)^*$ associée à la norme $(2\Phi(t, \cdot))^{1/2}$.

LEMME 5.1 (cf. Appendice A). *Il existe une constante K_1 telle que pour tout $0 \leqq s, t \leqq T$ et z dans $X(s)$, il existe $\tilde{z}$ dans $X(t)$ avec*

$$|\tilde{z} - z|_H \leqq K_1 |t - s| \Phi(s, z)^{1/2},$$

$$\Phi(t, \tilde{z}) - \Phi(s, z) \leqq K_1 |t - s| \Phi(s, z).$$

La méthode utilisée ici pour démontrer l'unicité est une généralisation de la méthode de norme variable (cf. Damlamian [7]) au cas où l'espace normé $X(t)$ dépend aussi de t. L'opérateur L_{u_0} joue alors le rôle de la dérivée en t, mais la démonstration des estimations est plus compliquée.

LEMME 5.2. *Soit u_0 dans H et $u^* \in L_{u_0} u$. Notant $U(t) = A(t)^{-1} u(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, on a*:

$$(5.2) \qquad |\Phi(t, U(t)) - \Phi(s, U(s)) - \int_s^t (u^*(\tau), U(\tau))_{X(\tau)} d\tau|$$
$$\leqq K_1 \int_s^t \{\Phi(\tau, U(\tau)) + |u(\tau)|_H \Phi(\tau, U(\tau))^{1/2}\} d\tau$$

pour $0 \leqq s \leqq t \leqq T$.

DÉMONSTRATION. Remarquons que pour tout t on a

$$(5.3) \qquad 2\Phi(t, U(t)) = (A(t)U(t), U(t))_{X(t)} = (u(t), U(t))_H,$$

car $u(t)$ appartient à H. De même

$$(u(t), z)_{X(t)} = (u(t), z)_H, \quad \forall z \in X(t).$$

Utilisant la dualité de Young-Fenschel le supremum suivant

$$\sup_{z \in X(t)} \{(u(t), z)_H - \Phi(t, z)\} = \sup_{z \in X(t)} \{(A(t)U(t), z)_{X(t)} - \Phi(t, z)\}$$

est atteint en $z = A(t)^{-1}(A(t)U(t)) = U(t)$, d'où

$$(5.4) \qquad \Phi(t, U(t)) - (u(t), U(t))_H = \min_{z \in X(t)} \{\Phi(t, z) - (u(t), z)_H\}.$$

Il est clair que $t \to |U(t)|_{X(t)}$ est bornée puisque cette norme est équivalente à $|u(t)|_{X(t)^*}$ et donc majorée par un multiple de $|u(t)|_H$. On déduit donc de (5.3) que $t \to \Phi(t, U(t))$ est aussi bornée sur $[0, T]$.

Supposons d'abord: $u \in W^{1,2}(0, T; H)$ et $u^* = u'$. Pour $0 \leqq s, t \leqq T$, d'après le Lemme 5.1 il existe $z \in X(t)$ tel que

$$|z - U(s)|_H \leqq K_1 |t - s| \Phi(s, U(s))^{1/2}$$

et

$$\Phi(t, z) - \Phi(s, U(s)) \leqq K_1|t-s|\Phi(s, U(s)).$$

On a alors grâce à (5.4)

$$\Phi(t, U(t)) - (u(t), U(t))_H \leqq \Phi(t, z) - (u(t), z)_H$$
$$\leqq \Phi(s, U(s)) - (u(s), U(s))_H + (u(s)-u(t), U(s))_H$$
$$+ (u(t), U(s)-z)_H + \Phi(t, z) - \Phi(s, U(s)).$$

Utilisant (5.3) on obtient:

$$\Phi(s, U(s)) - \Phi(t, U(t)) - (u(s)-u(t), U(s))_H$$
$$\leqq K_1|t-s|\{\Phi(s, U(s)) + |u(t)|_H\Phi(s, U(s))^{1/2}\}.$$

Ecrivant la même relation en échangeant s et t, on obtient facilement que $t \to \Phi(t, U(t))$ est absolument continue sur $[0, T]$. Par suite,

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t, U(t)) - (u'(t), U(t))_{X(t)}\right|$$
$$\leqq K_1\{\Phi(t, U(t)) + |u(t)|_H\Phi(t, U(t))^{1/2}\}$$

presque partout en t. Intégrant cette inégalité on obtient (5.2) dans le cas où $u^* = u'$.

Dans le cas général, on utilise les propriétés d'approximation de l'opérateur L_{u_o} (cf. Proposition 2.1): on trouve des suites $\{u_n\}$ et $\{u_n^*\}$ avec $u_n^* \in L_{u_n(0)}u_n$ telles que $u_n' \in L^2(0, T; H)$,

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; X),$$
$$u_n^* \longrightarrow u^* \text{ dans } L^2(0, T; X^*)$$

et

$$⟪u_n^*, w⟫ = ⟪u_n', w⟫, \quad \forall w \in \mathscr{X}.$$

On a donc pour $0 \leqq s \leqq t \leqq T$, avec des notations évidentes:

$$\left|\Phi(t, U_n(t)) - \Phi(s, U_n(s)) - \int_s^t (u_n^*, U_n)_{X(\cdot)}\mathrm{d}\tau\right|$$
$$\leqq K_1\int_s^t \{\Phi(\cdot, U_n) + |u_n|_H\Phi(\cdot, U_n)^{1/2}\}\mathrm{d}\tau.$$

Le passage à la limite est facile, car $U_n(\tau) \to U(\tau)$ dans $X(\tau)$ pour tout τ en restant borné, et donc $\Phi(\tau, U_n(\tau))$ tend vers $\Phi(\tau, U(\tau))$ pour tout τ en restant borné.

Ceci achève la démonstration du Lemme 5.2.

THÉORÈME 5.1. *Soient* $\nu>0$, $u_o\in H$, $f\in L^2(0, T; H)$ *et* $g\in W^{1,2}(0, T; H)\cap L^2(0, T; X)$. *Alors la solution de* $P_\nu(u_o, f, g)$ *est unique. Plus précisément, il existe une fonction réelle bornée sur* $[0, T]$ ρ *(dépendant de* ν*) telle que pour* u_o, f, g *(resp.* $\bar{u}_o, \bar{f}, g$*) donnés comme précédemment, les solutions* u *(resp.* $\bar{u}$*) de* $P_\nu(u_o, f, g)$ *(resp.* $P_\nu(\bar{u}_o, \bar{f}, g)$*) vérifient*:

$$e^{-\rho(t)}\Phi(t, A(t)^{-1}(u(t)-\bar{u}(t))) - e^{-\rho(s)}\Phi(s, A(s)^{-1}(u(s)-\bar{u}(s)))$$

$$\leqq \int_s^t e^{-\rho(\tau)}(f(\tau)-\bar{f}(\tau), A(\tau)^{-1}(u(\tau)-\bar{u}(\tau)))_H d\tau$$

pour tout $0\leqq s\leqq t\leqq T$.

DÉMONSTRATION. On note $h_\nu=(\beta^\nu)^{-1}\circ g$, et on a d'après la Proposition 3.1

$$f-\bar{f}-(B^\nu u - B^\nu\bar{u})\in L_{u_o-\bar{u}_o}(u-\bar{u}).$$

On applique alors le Lemme 5.2 à cet élément du graphe de $L_{u_o-\bar{u}_o}$, ce qui donne, en notant $U(t)=A(t)^{-1}(u(t)-\bar{u}(t))$,

$$\begin{aligned}&\Phi(t, U(t)) - \Phi(s, U(s))\\ &\leqq \int_s^t (f-\bar{f}, U)_H d\tau - \int_s^t (\beta^\nu(u)-\beta^\nu(\bar{u}), u-\bar{u})_H d\tau\\ &\quad + K_1\int_s^t \{\Phi(\cdot, U) + |u-\bar{u}|_H\Phi(\cdot, U)^{1/2}\}d\tau\\ &\leqq \int_s^t (f-\bar{f}, U)_H d\tau + K_1\Big(1+\frac{1}{4\nu}\Big)\int_s^t \Phi(\cdot, U)d\tau,\end{aligned}$$

car $(\beta^\nu(u(\tau))-\beta(\bar{u}(\tau)), u(\tau)-\bar{u}(\tau))_H\geqq\nu|u(\tau)-\bar{u}(\tau)|_H^2$ pour tout τ de $[0, T]$. D'où le résultat avec $\rho(t)=K_1(1+(1/4\nu))t$.

Appendice A

Nous donnons ici les conséquences essentielles de l'Hypothèse 1.1 utilisée dans cet article.

Rappelons que θ: $[0, T]\to\mathrm{Diff.}(\bar{\Omega})$ est un arc lipschitzien tel que $\theta(0)=I$ et $\Gamma(t)=\theta(t)(\Gamma(0))$ pour tout t de $[0, T]$.

On notera $\bar{\theta}$ le C^1-difféomorphisme inverse de θ, c'est-à-dire que $\bar{\theta}(t)(\Gamma(t))=\Gamma(0)$. On a donc par hypothèse avec une constante C positive

$$\left|\frac{\partial\theta}{\partial t}(t, x)\right|\leqq C,\quad \left|\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t}(t, x)\right|\leqq C,\quad \left|\frac{\partial}{\partial t}(J_\theta(t, x))\right|\leqq C,\quad \left|\frac{\partial}{\partial t}(J_{\bar{\theta}}(t, x))\right|\leqq C$$

pour presque tout t de $[0, T]$ et tout $x \in \bar{\Omega}$, où $J_\theta(t, \cdot)$ est la matrice jacobienne du difféomorphisme $\theta(t)$.

PROPOSITION A.1. *Il existe une constante K ayant la propriété suivante: pour tout s, t de* $[0, T]$ *et z de* $X(s)$ *il existe* $\tilde{z}$ *de* $X(t)$ *tel que*

$$|\tilde{z} - z|_H \leqq K|t - s|\,|z|_X$$

et

$$|\tilde{z}|_X^2 - |z|_X^2 \leqq K|t - s|\,|z|_X^2.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration consiste en la construction de trajectoires $z(t)$ à partir desquelles on obtiendra $\tilde{z}$ pour z, s et t donnés (cf. Yamada [17]).

Pour z_o dans $X(0)$ on note $z(t, x) = z_o(\bar{\theta}(t, x))$ qui appartient bien à $X(t)$.

$1^{ère}$ *estimation*: z est définie presque partout en x et pour tout t. On vérifie aisément (pour z_o régulière d'abord, puis dans le cas général) que

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, x) = \nabla z_o(\bar{\theta}(t, x)) \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}(t, x),$$

d'où avec l'hypothèse sur θ

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial z}{\partial t}(t, x)\right|^2 \mathrm{d}x \leqq C_\theta \int_\Omega |\nabla z_o(x)|^2 \mathrm{d}x$$

(la notation C_θ indiquera une constante générique ne dépendant que de θ), d'où par intégration

$$|z(t) - z(s)|_H \leqq C_\theta |t - s|\,|z_o|_X. \tag{a.1}$$

$2^{ème}$ *estimation*: Comme précédemment on a

$$\nabla z(t, x) = J_{\bar{\theta}}(t, x) \cdot \nabla z_o(\bar{\theta}(t, x)),$$

d'où

$$\begin{aligned}
&|\nabla z(t)|_H^2 - |\nabla z(s)|_H^2 \\
&= \int_\Omega |J_{\bar{\theta}}(t, x) \cdot \nabla z_o(\bar{\theta}(t, x))|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega |J_{\bar{\theta}}(s, x) \cdot \nabla z_o(\bar{\theta}(s, x))|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |J_{\bar{\theta}}(t, \theta(t, y)) \cdot \nabla z_o(y)|^2 |J_\theta(t, y)| \mathrm{d}y - \int_\Omega |J_{\bar{\theta}}(s, \theta(s, y)) \cdot \nabla z_o(y)|^2 |J_\theta(s, y)| \mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega |J_{\bar{\theta}}(t, \theta(t, y)) \cdot \nabla z_o(y)|^2 (|J_\theta(t, y)| - |J_\theta(s, y)|) \mathrm{d}y \\
&\quad + \int_\Omega \{|J_{\bar{\theta}}(t, \theta(t, y)) \cdot \nabla z_o(y)|^2 - |J_{\bar{\theta}}(s, \theta(s, y)) \cdot \nabla z_o(y)|^2\}\, |J_\theta(s, y)| \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Par hypothèse on peut majorer les deux derniers termes du membre de droite pour obtenir $|\nabla z(t)|_H^2 - |\nabla z(s)|_H^2 \leqq C_\theta |t-s|\, |\nabla z_o|_H^2$, et de même $|z(t)|_H^2 - |z(s)|_H^2 \leqq C_\theta |t-s|\, |z_o|_H^2$. On a donc

$$\text{(a.2)} \qquad |z(t)|_X^2 - |z(s)|_X^2 \leqq C_\theta |t-s|\, |z_o|_X^2.$$

Pour démontrer la Proposition A.1 pour z dans $X(s)$ donné, il suffit d'appliquer (a.1) et (a.2) à $z_o = z(\theta(s, \cdot))$ et de prendre $\tilde{z} = z_o(\bar{\theta}(t, \cdot))$, en remarquant que $|z(t)|_X$ reste uniformément équivalente à $|z_o|_X$. De plus sous l'hypothèse (5.1) le Lemme 5.1 peut aussi être démontré de la même manière.

Donnons enfin la démonstration de la Proposition 2.3.

PROPOSITION A.2. *Soient $u_o \in H$, $u \in \mathscr{X}$, $u^* \in L^2(0, T; X^*)$. On suppose que pour tout $w \in \mathscr{X}_o$ avec $w(T)=0$*

$$\text{(a.3)} \qquad -\langle\!\langle w', u \rangle\!\rangle = \langle\!\langle u^*, w \rangle\!\rangle + (u_o, w(0))_H.$$

Alors $u^* \in L_{u_o} u$.

DÉMONSTRATION. La démonstration est basée sur l'utilisation des difféomorphismes θ: on pose $\hat{u}(t, x) = u(t, \theta(t, x))$ et on a $\hat{u} \in L^2(0, T; X(0))$.

Soit ϕ dans $L^2(0, T; X(0))$ avec ϕ' dans $L^2(0, T; H)$ et $\phi(0) = \phi(T) = 0$. Posons $w(t, x) = \phi(t, \bar{\theta}(t, x))$. On voit alors par un calcul semblable aux précédents que w est un élément de $\mathscr{X}_o$ avec $w(0) = w(T) = 0$ et (a.3) s'écrit:

$$-\int_Q \hat{u}(t, x)\left\{\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + \nabla \phi(t, x) \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}(t, \theta(t, x))\right\} |J_\theta(t, x)| \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \langle\!\langle u^*, w \rangle\!\rangle.$$

Par suite

$$\left| \int_Q \hat{u} |J_\theta| \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right| \leqq \text{const.} |\phi|_{L^2(0,T;X(0))}$$

(puisque $\|w\|$ est majorée par $|\phi|_{L^2(0,T;X(0))}$). Par suite, $(d/dt)(\hat{u}|J_\theta|) \in L^2(0, T; X(0)^*)$ ainsi que $\hat{u}'$. On peut donc trouver une suite $\{\hat{u}_n\}$ de $L^2(0, T; X(0))$ convergente vers $\hat{u}$ dans cet espace, avec $\hat{u}_n' \in L^2(0, T; H)$, $\hat{u}_n' \to \hat{u}'$ dans $L^2(0, T; X(0)^*)$ et $\hat{u}_n(0) \to \hat{u}(0)$ dans H. Il ne reste plus qu'à transcrire ces convergences en termes de $u_n(t, x) = \hat{u}_n(t, \bar{\theta}(t, x))$ pour en déduire que

$$\begin{aligned} |\langle\!\langle u_n', w \rangle\!\rangle| &= \left| \int_Q \left(\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial t} + \nabla \hat{u}_n \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} \right) \phi |J_\theta| \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right| \\ \text{(a.4)} \qquad &\leqq \text{const.}\ |\phi|_{L^2(0,T;X(0))} \\ &\leqq \text{const.}\ \|w\|. \end{aligned}$$

Puisque tous les éléments de $\mathscr{X}$ sont approchés par telles fonctions w dans $\mathscr{X}$, (a.4) est vraie pour tout $w \in \mathscr{X}$, de sorte que u est dans $\mathscr{X}_1(u_o)$ et $u^* \in L_{u_o}u$.

Appendice B

Dans cet appendice nous donnons la démonstration de la Proposition 2.1. Nous utilisons les mêmes notations que dans le paragraphe 2.

On introduit d'abord une autre famille $\{M_{u_o}; u_o \in H\}$ d'opérateurs multivoques de $L^2(0, T; X)$ dans $L^2(0, T; X^*)$:

$$u^* \in M_{u_o}u \Longleftrightarrow \begin{cases} u \in \mathscr{X},\ u^* \in L^2(0, T; X^*) \quad \text{et} \\ \langle\!\langle v' - u^*, u - v \rangle\!\rangle - \dfrac{1}{2}|u_o - v(0)|_H^2 \leqq 0, \quad \forall v \in \mathscr{X}_o. \end{cases}$$

Grâce à l'Hypothèse 1.1 et ses conséquences (cf. Proposition A.1) on peut appliquer les résultats de Kenmochi-Nagai [13].

PROPOSITION B.1. *Avec les notations précédentes et sous l'Hypothèse* 1.1, *les opérateurs M_{u_o} vérifient*:

(1) *Soit $u_o \in H$. Alors M_{u_o} est maximal monotone de $L^2(0, T; X)$ dans $L^2(0, T; X^*)$. Si $u \in D(M_{u_o})$, alors u est continue à valeurs dans H et $u(0) = u_o$.*

(2) *Soient u_o dans H, $u^* \in M_{u_o}u$ et $\{u_{o,n}\}$ une suite dans $X(0)$ telle que $u_{o,n} \to u_o$ dans H. Alors il existe deux suites $\{u_n\}$ dans $\mathscr{X} \cap W^{1,2}(0, T; H)$ et $\{u_n^*\}$ dans $L^2(0, T; X^*)$ telles que*

$$u_n(0) = u_{o,n},$$
$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; X) \cap C([0, T]; H),$$
$$u_n^* \longrightarrow u^* \text{ dans } L^2(0, T; X^*)$$

et

$$\langle\!\langle u_n^*, w \rangle\!\rangle = \langle\!\langle u_n', w \rangle\!\rangle, \quad \forall w \in \mathscr{X}.$$

Montrons alors que $M_{u_o} = L_{u_o}$.

Soit en effet $u^* \in M_{u_o}u$ et $\{u_{o,n}\}$, $\{u_n\}$, $\{u_n^*\}$ comme dans (2) ci-dessus. On voit alors aisément que $u \in \mathscr{X}_1(u_o)$ et un simple passage à la limite montre que $u^* \in L_{u_o}u$.

Réciproquement, soit $u^* \in L_{u_o}u$ et $\{u_n\} \subset \mathscr{X}_o$ une suite dont l'existence est assurée par la définition de $u \in D(L_{u_o})$ telle que

$$u_n(0) \longrightarrow u_o \text{ dans } H,\ u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; X)$$

et

$$|\langle\!\langle u_n', w \rangle\!\rangle| \leqq C\|w\|, \quad \forall w \in \mathscr{X},$$

où C est une constante positive. Grâce au théorème de Hahn-Banach, il existe une suite $\{u_n^*\}$ dans $L^2(0, T; X^*)$ vérifiant:

$$\|u_n^*\|_* \leqq C \text{ et } ⟪u_n^*, w⟫ = ⟪u_n', w⟫, \quad {}^\forall w \in \mathscr{X}.$$

On peut alors supposer que u_n^* converge faiblement dans $L^2(0, T; X^*)$ vers une limite $\bar{u}^*$ (prendre éventuellement une sous-suite). Pour w dans $\mathscr{X}_o$ avec $w(T)=0$ on a

$$-⟪w', u_n⟫ = ⟪u_n', w⟫ + (u_n(0), w(0))_H = ⟪u_n^*, w⟫ + (u_n(0), w(0))_H$$

et en passant à la limite,

$$-⟪w', u⟫ = ⟪\bar{u}^*, w⟫ + (u_o, w(0))_H.$$

Comme $u^* \in L_{u_o}u$, on a aussi

$$-⟪w', u⟫ = ⟪u^*, w⟫ + (u_o, w(0))_H,$$

donc $⟪u^*, w⟫ = ⟪\bar{u}^*, w⟫$ pour w dans $\mathscr{X}_o$ avec $w(T)=0$; puis par densité de $\{w \in \mathscr{X}_o;\ w(T)=0\}$ dans $\mathscr{X}$,

(b.1) $$⟪u^*, w⟫ = ⟪\bar{u}^*, w⟫, \quad {}^\forall w \in \mathscr{X}.$$

Par ailleurs, pour v dans $\mathscr{X}_o$ on a

$$⟪v' - u_n', u_n - v⟫ - \frac{1}{2}|u_n(0) - v(0)|_H^2 = -\frac{1}{2}|u_n(T) - v(T)|_H^2,$$

d'où, puisque $u_n - v \in \mathscr{X}$,

$$⟪v' - u_n^*, u_n - v⟫ - \frac{1}{2}|u_n(0) - v(0)|_H^2 \leqq 0$$

et passant à la limite,

$$⟪v' - \bar{u}^*, u - v⟫ - \frac{1}{2}|u_o - v(0)|_H^2 \leqq 0.$$

Enfin comme $u - v$ est dans $\mathscr{X}$, par (b.1) on a

$$⟪v' - u^*, u - v⟫ - \frac{1}{2}|u_o - v(0)|_H^2 \leqq 0.$$

Donc $u^* \in M_{u_o}u$.

Ceci démontre donc les parties (i) et (iii) de la Proposition 2.1. La partie (ii) découle de (iii). En effet si $u^* \in L_{u_o}u$, $v^* \in L_{v_o}v$, on approche u et v par des suites comme dans (iii) et on a

$$\int_s^t (u_n^*, v_n)_X \mathrm{d}\tau + \int_s^t (v_n^*, u_n)_X \mathrm{d}\tau = \int_s^t (u_n', v_n)_X \mathrm{d}\tau + \int_s^t (v_n', u_n)_X \mathrm{d}\tau$$
$$= (u_n(t), v_n(t))_H - (u_n(s), v_n(s))_H,$$

d'où le résultat par passage à la limite. Les parties (iv) et (v) de la Proposition 2.1 sont facile à vérifier.

Appendice C

Nous donnons ici la démonstration du résultat de compacité énoncé dans le Lemme 4.1. Il s'agit d'une généralisation du lemme d'Aubin (cf. [2]), qui est aussi à rapprocher des résultats de compacité de Kenmochi [12].

On suppose que $\{X(t); 0 \leqq t \leqq T\}$ est une famille de sous-espaces fermés de X, H un espace de Hilbert, et que $X(t)$ est injecté de manière compacte et dense de H pour tout t. On suppose en outre (cf. Proposition A.1) que pour tout $0 \leqq s, t \leqq T$ et $z \in X(s)$ il existe $\tilde{z}$ de $X(t)$ tel que

$$|\tilde{z} - z|_H \leqq K|t-s|\,|z|_X,$$
$$|\tilde{z}|_X^2 - |z|_X^2 \leqq K|t-s|\,|z|_X^2.$$

Lemme C.1. *Pour tout $R>0$, il existe $R_1>0$, $\alpha \in L^2(0, T)$ non negative et une famille $\mathscr{F}_R$ dans $W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; X)$ tels que*

$$B_{X(t)}(0, R) \subset \mathscr{F}_R(t) \subset B_{X(t)}(0, R_1), \quad \forall t \in [0, T]$$

avec $\mathscr{F}_R(t) = \{v(t); v \in \mathscr{F}_R\}$ et

$$\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_H \leqq \alpha(t) \ p.p. \ t \in [0, T], \quad \forall v \in \mathscr{F}_R,$$

où $B_{X(t)}(0, R)$ est la boule de $X(t)$ de rayon R centrée à l'origine.

L'existence de cette famille vérifiant les propriétés indiquées est une conséquence des résultats de Attouch-Damlamian [1] ou Kenmochi [11] concernant les problèmes de Cauchy suivants dans l'espace de Hilbert H:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} + \partial\psi(\tau, u) \ni 0, \quad u(0) = u_o \qquad \text{(donné dans } H\text{)},$$

où $\psi(\tau, z) = |z|_X^2/2$ si $z \in X(t_o \pm \tau)$ et $= \infty$ sinon.

Remarquons que les familles $\mathscr{F}_R$ sont relativement compactes dans $L^2(0, T; H)$ grâce au Théorème d'Ascoli.

Proposition C.1. *Soit $\{(u_n, u_n^*)\} \subset \mathscr{X} \times L^2(0, T; X^*)$ une suite telle que*

$\{u_n\} \subset C([0, T]; H)$, $\{u_n^*\}$ *est bornée dans* $L^2(0, T; X^*)$ *et pour tout* $0 \leqq s \leqq t \leqq T$ *et* $v \in \mathscr{X}_o$

$$\text{(c.1)} \qquad \int_s^t (u_n^*, v)_X d\tau + \int_s^t (v', u_n)_X d\tau = (u_n(t), v(t))_H - (u_n(s), v(s))_H.$$

Si de plus u_n *converge vers* u *faiblement dans* $L^2(0, T; H)$, *alors*

$$|u_n(t) - u(t)|_{X(t)^*} \longrightarrow 0 \qquad \textit{uniformément en } t \in [0, T].$$

DÉMONSTRATION. On se ramène, pour simplifier, à $u \equiv 0$. Soit M un majorant commun à $|u_n|_{L^2(0,T;H)}$, $|u_n^*|_{L^2(0,T;X^*)}$ et $|v|_{L^\infty(0,T;X)}$ pour tout v dans $\mathscr{F}_1$.

Pour $0<\delta<1$, soit ρ_δ dans $C^1(\boldsymbol{R})$, $0 \leqq \rho_\delta \leqq 1$, $\rho_\delta(\tau)=1$ pour $\tau \leqq 0$, $\rho_\delta(\tau)=0$ pour $\tau \geqq \delta$, et $\Lambda_\delta = \{\rho_\delta(\cdot - t_o);\ t_o \in [0, T]\}$. Il est alors aisé de voir que pour δ fixé, l'ensemble $\{\rho' v;\ \rho \in \Lambda_\delta,\ v \in \mathscr{F}_1\}$ est relativement compact dans $L^2(0, T; H)$. Par convergence faible de $\{u_n\}$ vers 0 dans $L^2(0, T; H)$, étant donné $\varepsilon>0$, il existe $n(\varepsilon, \delta)$ tel que

$$\left|\int_0^T (\rho' v, u_n)_H d\tau\right| \leqq \varepsilon, \quad \forall n \geqq n(\varepsilon, \delta),\ \forall \rho \in \Lambda_\delta,\ \forall v \in \mathscr{F}_1.$$

D'après (c.1) on voit alors

$$(u_n(t), \rho(t)v(t))_H - (u_n(s), \rho(s)v(s))_H = \int_s^t ((\rho v)', u_n)_X d\tau + \int_s^t (u_n^*, \rho v)_X d\tau.$$

Choisissant alors $\rho(\tau) = \rho_\delta(\tau - s)$ et $t = s + \delta$, on a

$$\begin{aligned} -(u_n(s), v(s))_H &= \int_s^{s+\delta} (\rho_\delta'(\tau - s)v(\tau), u_n(\tau))_H d\tau \\ &\quad + \int_s^{s+\delta} (\rho_\delta(\tau - s)v'(\tau), u_n(\tau))_H d\tau + \int_s^{s+\delta} (u_n^*, \rho_\delta(\tau - s)v(\tau))_X d\tau. \end{aligned}$$

Pour $n \geqq n(\varepsilon, \delta)$ la première intégrale du membre de droite, qui est $\int_0^T (\rho_\delta'(\tau - s)v(\tau), u_n(\tau))_H d\tau$, est majorée par ε. Les deux dernières intégrales sont majorées respectivement par $M\left(\int_s^{s+\delta} \alpha(\tau)^2 d\tau\right)^{1/2}$ et par $M^2\delta^{1/2}$. On peut donc choisir $\delta(\varepsilon)$ tel que

$$|(u_n(s), v(s))_H| \leqq 2\varepsilon, \quad \forall n \geqq n(\varepsilon, \delta(\varepsilon)),\ \forall 0 \leqq s \leqq T - \delta(\varepsilon).$$

Cette majoration est indépendante de v dans $\mathscr{F}_1$. Comme $\mathscr{F}_1(s)$ contient la boule unité de $X(s)$ on en déduit que pour un petit $\delta_o > 0$,

$$|u_n(s)|_{X(s)^*} \longrightarrow 0 \qquad \text{uniformément en } s \text{ de } [0, T - \delta_o].$$

De même on obtient:

$$|u_n(s)|_{X(s)^*} \longrightarrow 0 \qquad \text{uniformément en } s \text{ de } [\delta_o, T],$$

ce qui achève la démonstration.

Appendice D

Soit α une fonction réelle de la variable réelle, croissante, nulle en zéro et bi-lipschitzienne. Soit p la même fonction sur Σ du paragraphe 1 et $g \in L^2(0, T; X)$. On définit alors P: $L^2(0, T; X) \to L^2(0, T; X^*)$ par

$$\langle\!\langle Pv, w \rangle\!\rangle = \int_Q \nabla(\alpha(v) - g) \cdot \nabla w \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Sigma p(\alpha(v) - g) w \mathrm{d}\Sigma$$

pour $v, w \in L^2(0, T; X)$.

On va montrer la:

Proposition D.1. (1) *P est borné.*

(2) *Si $u_n \to u$ dans $L^2(0, T; H)$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(0, T; X)$, alors $Pu_n \rightharpoonup Pu$ dans $L^2(0, T; X^*)$ et*

$$\liminf_{n\to\infty} \langle\!\langle Pu_n, u_n \rangle\!\rangle \geqq \langle\!\langle Pu, u \rangle\!\rangle .$$

(3) *P est coercif: $\langle\!\langle Pu, u \rangle\!\rangle / \|u\| \to \infty$ si $\|u\| \to \infty$.*

(1) est évident. (2) et (3) découlent immédiatement des lemmes suivants:

Lemme D.1. *Si $u_n \to u$ dans $L^2(0, T; H)$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(0, T; X)$, alors $\alpha(u_n) \rightharpoonup \alpha(u)$ dans $L^2(0, T; X)$ et*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_Q \nabla\alpha(u_n) \cdot \nabla u_n \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqq \int_Q \nabla\alpha(u) \cdot \nabla u \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{d.1}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Sigma p\alpha(u_n) u_n \mathrm{d}\Sigma \geqq \int_\Sigma p\alpha(u) u \mathrm{d}\Sigma. \tag{d.2}$$

Démonstration. La fonction σ sur $\boldsymbol{R}$ définie par

$$\sigma(t) = \int_0^t \sqrt{\alpha'(r)}\mathrm{d}r, \quad \forall t \in \boldsymbol{R},$$

est évidemment lipschitzienne et vérifie:

$$\int_\Omega \nabla\alpha(z) \cdot \nabla z \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla\sigma(z)|^2 \mathrm{d}x, \quad \forall z \in X.$$

Maintenant, si $u_n \to u$ dans $L^2(0, T; H)$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(0, T; X)$, alors $\alpha(u_n) \rightharpoonup \alpha(u)$ dans $L^2(0, T; X)$ ainsi que $\sigma(u_n) \rightharpoonup \sigma(u)$. On obtient donc

$$\liminf_{n\to\infty} \int_Q |\nabla \sigma(u_n)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqq \int_Q |\nabla \sigma(u)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

d'où (d.1). L'inégalité (d.2) est immédiatement découlée de

$$\int_\Sigma p(\alpha(u_n) - \alpha(u_m))(u_n - u_m)\mathrm{d}\Sigma \geqq 0.$$

LEMME D.2. *On a pour tout* $u \in L^2(0, T; X)$

$$\int_Q \nabla\alpha(u)\cdot \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqq c_o \int_Q |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

et

$$\int_\Sigma p\alpha(u)u\mathrm{d}\Sigma \geqq c_o \int_\Sigma p|u|^2 \mathrm{d}\Sigma,$$

où c_o *est la constante de Lipschitz de l'inverse de* α.

DÉMONSTRATION. Comme α est bi-lipschitzienne et $\alpha(0)=0$, on voit que

$$|\alpha(u)| \geqq c_o|u|, \quad |\nabla\alpha(u)| \geqq c_o|\nabla u|,$$

d'où le résultat.

Bibliographie

[1] H. Attouch et A. Damlamian, Strong solutions for parabolic variational inequalities, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications **2** (1978), 329–353.

[2] J. P. Aubin, Un théorème de compacité, C. R. Acad. Sci. Paris **256** (1963), 5042–5044.

[3] H. Brézis, Perturbations non linéaires d'opérateurs maximaux monotones, C. R. Acad. Sci. Paris **265** (1969), 566–569.

[4] H. Brézis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to non-linear partial differential equations, Contribution to non-linear functional analysis, ed. E. Zarantonello, Academic Press, New York-London, 1971.

[5] J. R. Cannon et M. Primicerio, A two phase Stefan problem, Ann. Mat. Pura Appl. **88** (1971), 177–206.

[6] A. Damlamian, Non-linear evolution equations with variable norms, Ph. D. Thesis, Harvard Univ., Cambridge, 1974.

[7] A. Damlamian, Problèmes aux limites non linéaires du type du problème de Stefan et inéquations variationnelles d'évolution, Thèse, Univ. Paris VI, Paris, 1976.

[8] A. Damlamian, Some results on the multi-phase Stefan problem, Comm. Partial Differential Equations **2** (1977), 1017–1044.

[9] A. Friedman, The Stefan problem in several space variables, Trans. Amer. Math. Soc. **133** (1968), 51–87.

[10] S. L. Kamenomostskaïa, On Stefan's problem, Mat. Sb. **53** (1965), 485–514.

[11] N. Kenmochi, The semi-discretization method and nonlinear time-dependent parabolic variational inequalities, Proc. Japan Acad. **50** (1975), 714–717.

[12] N. Kenmochi, Résultats de compacité dans des espaces de Banach dépendant du temps, (à paraître).

[13] N. Kenmochi et T. Nagai, Weak solutions for certain nonlinear time-dependent parabolic variational inequalities, Hiroshima Math. J. **5** (1975), 525–535.

[14] J. L. Lions et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications Vol. **1**, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[15] O. A. Oleinick, A method of solution of the general Stefan problem, Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 1350–1354.

[16] L. I. Rubinstein, The Stefan problem, Translations of Mathematical Monographs Vol. **27**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1971.

[17] Y. Yamada, On evolution equations generated by subdifferential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **23** (1976), 491–515.

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Université de Paris-Sud,
91-Orsay, France

et

Département de Mathématiques,
Faculté d'Education,
Université de Chiba