EINE BEMERKUNG ÜBER NEUMANNSCHE RANDWERTAUFGABE

Von Yûsaku KOMATU

1. Es sei D ein auf der ζ-Ebene gelegtes Gebiet mit einer glatten Begrenzung C, das der Einfachheit halber als beschränkt angenommen werden soll. Die Neumannsche Funktion $N(\zeta, z)$ von D mit der logarithmischen Singularität an z wird gewöhlich charakterisiert durch drei Bedingungen:

1°. $N(\zeta,z)+\lg|\zeta-z|$ ist regulär harmonisch für $\zeta \in D$;

2°. $\partial N(\zeta,z)/\partial\nu$ bleibt konstant für $\zeta \in C$, worin $\partial/\partial\nu \equiv \partial/\partial\nu_\zeta$ die Differentiation längs der nach Innen gerichteten Normale an ζ bedeutet; der konstante Wert ist dann notwendig gleich $2\pi/L$, wo L die Gesamtlänge von C bedeutet;

3°. $\int_C N(\zeta, z)ds$ verschwindet,

worin $ds \equiv ds_\zeta$ das Linienelement längs C an ζ bedeutet.

Das Neumannsche Randwertproblem in Potentialtheorie läßt sich nun formulieren wie folgt:

Vorgelegt sei eine auf C definierte stetige Funktion $\Phi(s)$. Gesucht wird eine Funktion $u(z)$, welche den Bedingungen genügt:

$$\Delta u(z) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(z)=0$$

für $z=x+iy \in D$,

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu}=\Phi(s)$$

für $\zeta=\zeta(s)\in C$.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit des Problems ist bekanntlich, daß die gegebene Randfunktion für die Normalableitung der gesuchten in D harmonischen Funktion das verschwindende Mittel besitzt:

$$\int_C \Phi(s)ds=0.$$

Die Lösung des Problems wird dann eindeutig bestimmt bis auf eine willkürliche additive Konstante, und sie läßt sich in der Tat mittels der Neumannschen Funktion darstellen durch die Formel:

$$u(z)=c-\frac{1}{2\pi}\int_C \Phi(s)N(\zeta(s), z)ds;$$

hierin bedeutet c eine beliebige Konstante.

Unter den obengenannten charakterisierenden Bedingungen von $N(\zeta, z)$, hängt die letzte Bedingung 3°. lediglich von einer Normierung ab. Falls man auf diese Bedingung verzichtet, so ergibt sich nur eine Unbestimmtheit von einer beliebigen additiven Größe, welche nur von z abhängen mag. Auf Grund der Erforderung, daß $\Phi(s)$ das verschwindende Mittel längs C besitzt, bleibt aber die Integralformel für $u(z)$ auch dann gültig.

Andererseits, in der letztgenannten Integralformel werden die Werte von $N(\zeta, z)$ lediglich für $\zeta\in C$ (und $z\in D$) benützt. Wenn $N(\zeta,z)$ um eine nur von ζ abhängige Größe abgeändert wird, dann ändert sich die durch diese Formel dargestellte Funktion $u(z)$ nur um eine additive Konstante.

Führt man folglich eine durch den Ausdruck

$$\mathfrak{N}(\zeta, z)=N(\zeta, z)+a(\zeta)+b(z)$$

für $\zeta\in C$ und $z\in D$

definierte Funktion ein, worin $a(\zeta)$ z. B. längs C meßbar angenommen wird, so läßt sich die Lösung des Neumannschen Problems mit der Randfunktion auch in der Form

$$u(z)=c-\frac{1}{2\pi}\int_C \Phi(s)\mathfrak{N}(\zeta(s), z)ds$$

darstellen, sofern das Mittel von $\Phi(s)$

auf C verschwindet.

2. Nun ist die durch drei Bedingungen charakterisierte Neumannsche Funktion selbst im allgemeinen keine konforme Invariante. Sie besitzt dennoch eine Art quasi-invariante Eigenschaft bezüglich konformer Abbildung des Bezugsgebiets. Es zeigt sich in der Tat, daß die Funktion $\mathfrak{N}(\zeta, z)$ als ganze Familie gewiß konform invariant ist. Nämlich gilt der folgende Satz.

Satz 1. Es sei $\zeta = f(\zeta')$ mit $z = f(z')$ irgendeine analytische Funktion von ζ', die die Abbildung zwischen dem Originalgebiet D und einem auf der ζ'-Ebene gelegten beschränkten Gebiet D' vermittelt, das auch eine glatte Begrenzung C' besitzen soll. Dann besteht eine Beziehung der Form

$$\mathfrak{N}(f(\zeta'), f(z')) = \mathfrak{N}'(\zeta', z')$$
$$\text{für } \zeta' \in C' \quad \text{und} \quad z' \in D',$$

worin die rechts stehende Funktion bezüglich des Gebiets D' definiert wird wie $\mathfrak{N}(\zeta, z)$ bezüglich des Gebiets D, i. e.

$$\mathfrak{N}'(\zeta', z') = N'(\zeta', z') + a'(\zeta') + b'(z')$$

mit der Neumannschen Funktion $N'(\zeta', z')$ von D' sowie mit geeigneten Zusatzgliedern $a'(\zeta')$ und $b(z')$.

Beweis. Aus der Annahme der Glattheit der beiden Ränder C und C' folgt bekanntlich eine eineindeutige und glatte Zuordnung zwischen den abgeschlossenen Bereichen $D + C$ und $D' + C'$. Durch die genannte Abbildung $\zeta = f(\zeta')$ transformiert sich jede in D harmonische und auf $D + C$ glatte Funktion $u(\zeta)$ in eine bezüglich D' und $D' + C'$ ebensolche Funktion $u'(\zeta') \equiv u(f(\zeta'))$. Die Normalableitung von $u'(\zeta')$ längs C' wird dann gegeben durch

$$\Phi'(s') \equiv \frac{\partial u'(\zeta')}{\partial \nu_{\zeta'}} = \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu_\zeta} |f'(\zeta')| \equiv \Phi(s) |f'(\zeta')|$$

für $\zeta = \zeta(s)$ und $\zeta' = \zeta'(s')$. Aus der Integralformel

$$u(z) = c - \frac{1}{2\pi} \int_C \Phi(s) \mathfrak{N}(\zeta(s), z)\, ds$$

ergibt sich daher nach Einsetzen von $z = f(z')$, $\zeta = f(\zeta')$ sowie $ds \equiv ds_\zeta = |f'(\zeta')| ds_{\zeta'} \equiv |f'(\zeta')| ds'$ die Beziehung

$$\begin{aligned} u'(z') &= c - \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \Phi'(s') |f'(\zeta')|^{-1} \mathfrak{N}(f(\zeta'), f(z')) |f'(\zeta')| ds' \\ &= c - \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \Phi'(s') \mathfrak{N}(f(\zeta'), f(z'))\, ds'. \end{aligned}$$

Andererseits läßt sich das Neumannsche Problem bezüglich D' mit der Randfunktion $\Phi'(s')$ unmittelbar durch die Formel

$$u'(z') = c' - \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \Phi'(s') N'(\zeta', z')\, ds'$$

auflösen, worin c' eine Konstante ist. Beide soeben genannten Darstellungen für dieselbe Funktion $u'(z')$ bleiben gültig, sofern die Randbelegung das verschwindende Mittel besitzt:

$$\int_{C'} \Phi'(s')\, ds' = 0.$$

Mithin ergibt sich aus einem ein wenig verallgemeinerten Fundamentalhilfssatz der Variationsrechnung, daß eine Beziehung der Form

$$\mathfrak{N}(f(\zeta'), f(z')) = N'(\zeta', z') + a'(\zeta') + b'(z')$$

für $\zeta' \in C'$ und $z' \in D'$ gelten muß, w. z. b. w.

Es ist oft sehr nützlich, daß die Neumannsche Funktion den Symmetriecharakter

$$N(\zeta, z) = N(z, \zeta)$$

besitzt, welcher insbesondere die Harmonizität von $N(\zeta, z)$ bezüglich z nach sich zieht. Eine mittels

$$\mathfrak{N}(\zeta, z) = N(\zeta, z) + a(\zeta) + b(z)$$
$$\text{für } \zeta \in D \quad \text{und} \quad z \in D$$

definierte Funktion ist jedoch im allgemeinen nicht symmetrisch in bezug auf beide Argumente. Um dies der Fall zu sein, ist es notwendig und hinreichend, daß $b(\zeta) - a(\zeta) = \text{const}$ ist.

Nun genügt eine Funktion $\mathfrak{N}(\zeta, z)$ der soeben genannten Form im allgemeinen keiner Bedingung unter 1°., 2°. und 3°. Die erste von denen wird dann und nur dann erfüllt, wenn $a(\zeta)$ harmonisch für $\zeta \in D$ ist. Die zweite wird dann und nur dann erfüllt, wenn $\partial a(\zeta)/\partial\nu_\zeta=0$ für $\zeta\in C$ ist. Die letzte wirt dann und nur dann erfüllt, wenn $b(z)$ sich auf eine Konstante b reduziert, welche einer Beziehung

$$\int_C a(\zeta)ds_\zeta+bL=0$$

genügt. Die gleichzeitige Gültigkeit dieser drei Bedingungen zieht insbesondere nach sich, daß $a(\zeta)$ und $b(z)$ beide verschwinden müssen, was gerade die eindeutige Bestimmtheit der Neumannschen Funktion bedeutet.

3. Die oben gezeigten Quasi-invarianz läßt sich in die Form

$$N'(\zeta',z')=N(f(\zeta'),f(z'))-A(\zeta')-B(z')$$

bringen, worin $A(\zeta')=a'(\zeta')-a(f(\zeta'))$ und $B(\zeta')=b'(\zeta')-b(f(\zeta'))$ gesetzt sind. Diese Beziehung erwähnt, wie die Neumannsche Funktion des Bildgebiets D' für $\zeta'\in C'$ und $z'\in D'$ mit derjenigen des Originalgebiets $D=f(D')$ verbunden wird. Aber in dieser Form zeigt sich darüber hinaus eine noch explizite Darstellung. Zum Zwecke soll eine Größe eingeführt werden, die der Robinschen Konstante bei der Greenschen Funktion entspricht. Es sei nämlich

$$\delta(z)=\lim_{\zeta\to z}(N(\zeta,z)+\lg|\zeta-z|)$$

und ebenso

$$\delta'(z')=\lim_{\zeta'\to z'}(N'(\zeta',z')+\lg|\zeta'-z'|)$$

gesetzt. Dann lautet der gewünschte Satz wie folgt.

Satz 2. Für jedes Punktepaar ζ', z' in D' gilt die Beziehung

$$N'(\zeta',z')=N(f(\zeta'),f(z'))-A(\zeta')-A(z'),$$

worin $A(\zeta')$ für $\zeta'\in D'$ harmonisch ist. Ferner läßt sich die Größe $A(z')$ für $z'\in D'$ in expliziter Weise durch

$$A(z')=\tfrac{1}{2}(\delta(f(z'))-\delta'(z')-\lg|f'(z')|)$$

oder auch durch

$$A(z')=k-\frac{1}{L}\int_C N'(\zeta',z')ds_\zeta$$
$$=k-\frac{1}{L}\int_{C'}|f'(\zeta')|N'(\zeta',z')ds_{\zeta'}$$

liefern, wo k eine Konstante bedeutet:

$$k=-\frac{1}{L}\int_C A(\zeta')ds_\zeta=-\frac{1}{L}\int_{C'}|f'(\zeta')|A(\zeta')ds_{\zeta'}.$$

Beweis. Da die Differenz $N'(\zeta',z')-N(f(\zeta'),f(z'))$ überall in D' harmonisch in bezug auf jedes Argument ist, so läßt sich die zuerst für $\zeta'\in C'$ und $z'\in D'$ bestätigte Beziehung $N'(\zeta',z')=N(f(\zeta'),f(z'))-A(\zeta')-B(z')$ ins ganze Gebiet, i. e. für $\zeta'\in D'$ und $z'\in D'$ fortsetzen. Der Symmetrieeigenschaft der Neumannschen Funktion gemäß muß ferner $B(z')-A(z')=\text{const}$ sein. Deshalb ist gezeigt, daß die im Satze erwähnte Beziehung gilt, indem eine unwesentliche additive Konstante geeignet in dem Ausdrck A zugefügt wird. Nachdem diese Beziehung gewonnen worden ist, läßt sich die erste Darstellung für $A(z')$ leicht einsehen. Beim Grenzübergang $\zeta'\to z'$ gilt nämlich

$$N(f(\zeta'),f(z'))-N'(\zeta',z')$$
$$=-\lg|f(\zeta')-f(z')|+\delta(f(z'))+o(1)$$
$$-(-\lg|\zeta'-z'|+\delta'(z')+o(1))$$
$$=-\lg|f'(z')|+\delta(f(z'))-\delta'(z')+o(1).$$

Die alternative Darstellung für $A(z')$ ergibt sich durch Integration der Beziehung über $\zeta=f(\zeta')\in C$. Dabei ist nur zu bemerken, daß

$$\int_C N(f(\zeta'),f(z'))ds_\zeta=\int_C N(\zeta,z)ds_\zeta=0.$$

Nebenbei bemerkt, daß die Normalableitung von $A(\zeta')$ der Gleichung

$$\frac{\partial A(\zeta')}{\partial\nu_{\zeta'}}=2\pi\left(\frac{|f'(\zeta')|}{L}-\frac{1}{L'}\right)$$
für $\zeta'\in C'$

genügt, wo L' die Gesamtlänge von C' bedeutet. Daraus ergibt sich wieder die zweite Darstellung für $A(z')$, indem diese Funktion als eine Lösung der Neumannschen Aufgabe mit der genannten Randfunktion bestimmt wird.

4. Der Umstand soll nun durch ein Beispiel erklärt werden. Es seien D und D' beide die Einheitskreise auf den respektiven Ebenen. Die allgemeinste Gestalt der Abbildungsfunktionen zwischen ihnen läßt sich dann in der Form

$$f(\zeta')=e^{i\lambda}\frac{\zeta'-\gamma}{1-\bar\gamma\zeta'}$$
$$\text{mit } |\gamma|<1 \text{ und } \Im\lambda=0$$

darstellen. Die Neumannsche Funktion von D wird durch den Ausdruck

$$N(\zeta, z)=\lg\frac{1}{|\zeta-z|}+\lg\frac{1}{|1-\bar z\zeta|}$$

geliefert. Sie wird nun tatsächlich in die erwartete Form transformiert, nämlich

$$N(f(\zeta'), f(z'))$$
$$=\lg\frac{1}{|\zeta'-z'|}+\lg\frac{1}{|1-\bar z'\zeta'|}+2\lg\frac{|1-\gamma\bar z'||1-\bar\gamma\zeta'|}{1-|\gamma|^2}$$
$$=N'(\zeta', z')+\lg\frac{|1-\bar\gamma\zeta'|^2}{1-|\gamma|^2}+\lg\frac{|1-\bar\gamma z'|^2}{1-|\gamma|^2}.$$

In diesem Falle ist folglich

$$A(\zeta')=\lg\frac{|1-\bar\gamma\zeta'|^2}{1-|\gamma|^2}.$$

Andererseits erhält man

$$\delta'(z')=\lg\frac{1}{1-|z'|^2},$$
$$\delta(f(z'))=\lg\frac{1}{1-|f(z')|^2}=\lg\frac{|1-\bar\gamma z'|^2}{(1-|z'|^2)(1-|\gamma|^2)},$$
$$f'(z')=e^{i\lambda}\frac{1-|\gamma|^2}{(1-\bar\gamma z')^2},$$

woraus die erste Formel für $A(z')$ im Satz 2 unmittelbar folgt. Die zweite Formel ergibt sich, indem man demselben Verfahren wie im Beweis des Satzes 2 nachtritt. Ferner ergibt sich für $|z'|=1$

$$\frac{\partial A(\zeta')}{\partial\nu_{\zeta'}}=\frac{\partial}{\partial\nu_{\zeta'}}\lg\frac{|1-\bar\gamma\zeta'|^2}{1-|\gamma|^2}$$
$$=-2\frac{\Re(\bar\gamma\zeta')-|\gamma|^2}{|1-\bar\gamma\zeta'|^2}=|f'(\zeta')|-1,$$

womit sich die allgemeine Aussage in diesem Spezialfall bestätigt wird, denn es ist $L=L'=2\pi$.

5. Es läßt sich nun leicht einsehen, wie sich die Normalableitung der durch einen Ausdruck

$$u(z)=c-\frac{1}{2\pi}\int_C\Phi(s)\mathfrak{N}(\zeta, z)ds$$

mit $\mathfrak{N}(\zeta,z)=N(\zeta,z)+a(\zeta)+b(z)$ definierten Funktion längs C verhält, wenn die Randbelegung $\Phi(s)$ nicht notwendigerweise das verschwindende Mittel besitzt.

Führt man nämlich der Einfachheit wegen die Funktion

$$\Psi(s)=\Phi(s)-\frac{1}{L}\int_C\Phi(t)dt$$

ein, so verschwidet ihr Mittel längs C. Unter Berücksichtigung der Bedingung 3° über $N(\zeta, z)$ läßt sich der Ausdruck für $u(z)$ in die Form

$$u(z)=c-\frac{1}{2\pi}\int_C\Psi(s)N(\zeta, z)ds$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_C\Phi(s)a(\zeta)ds-\frac{1}{2\pi}b(z)\int_C\Phi(s)ds$$

umformen. Mithin wird die Normalableitung an $\zeta=\zeta(s)\in C$ durch

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu_\zeta}=\Psi(s)-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial b(\zeta)}{\partial\nu_\zeta}\int_C\Phi(t)dt$$
$$=\Phi(s)-\left(1-\frac{L}{2\pi}\frac{\partial b(\zeta)}{\partial\nu_\zeta}\right)\frac{1}{L}\int_C\Phi(t)dt$$

geliefert, sofern $\partial b(\zeta)/\partial\nu_\zeta$ existiert.

Insbesondere wenn $b(z)$ sich auf eine Konstante reduziert, sieht man ein, daß die Normalableitung einer Funktion der Gestalt

$$u(z)=\text{const}-\frac{1}{2\pi}\int_C\Phi(s)N(\zeta, z)ds$$

am Randpunkt $\zeta=\zeta(s)$ durch

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\nu_\zeta}=\Phi(s)-\frac{1}{L}\int_C\Phi(t)dt$$

geleifert wird. Jede durch ein Integral des Neumannschen Typus dargestellte Funktion besitzt also als ihre Normalableitung gerade die vorgelegte Randbelegung nach Regulieren um ein konstantes Niveau.

6. Zum Schluß bemerke man, daß jede oben betrachtete Funktion $\mathfrak{N}(\zeta, z)$ sich von der Neumannschen Funktion $N(\zeta, z)$ selbst durch eine Summe der nur von ζ bzw. z abhängigen Größen unterscheidet. Deshalb gilt die Identitat

$$\frac{\partial^2\mathfrak{N}(\zeta, z)}{\partial\zeta\,\partial\bar z}=\frac{\partial^2N(\zeta, z)}{\partial\zeta\,\partial\bar z}.$$

Die recht Seite der letzten Gleichung stellt, wie bekanntlich die Kernfunktion $\tilde{K}(\zeta,\bar{z})$ bezüglich derjenigen in D analytischen Funktionen dar, welche zur $\mathcal{L}^2$-Klasse gehören und eindeutige Stammfunktionen besitzen. Es ist nämlich

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{N}(\zeta,z)}{\partial\zeta\,\partial\bar{z}} = \tilde{K}(\zeta,\bar{z}) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(\zeta)\overline{g_j(z)},$$

worin $\{g_j(\zeta)\}$ ein betreffendes vollständiges Orthonormalsystem ist.

Daher stellt der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{N}(\zeta,z)}{\partial\zeta\,\partial\bar{z}}\, d\zeta\, d\bar{z}$$

ein bilineare Hermitesche Differentialform dar, die konform invariant ist.

Zwar könnte man die ganzen Resultate der vorliegenden Note noch einfacher aus der soeben erwähnten Tatsache herleiten, während hier ein mehr elementarer Weg dazu gewählt worden ist.

Mathematisches Seminar,
Institut für Technologie zu Tokyo.

(*) Eingegangen am 27. Mai, 1954.