J. Math. Soc. Japan
Vol. 68, No. 1 (2016) pp. 245–293
doi: 10.2969/jmsj/06810245

Restriction de la représentation de Weil à un sous-groupe compact maximal

By Khemais Maktouf and Pierre Torasso

(Received Nov. 17, 2012)
(Revised Mar. 21, 2014)

Abstract. Weil's representation is a basic object in representation theory which plays a crucial role in many places: construction of unitary irreducible representations in the frame of the orbit method, Howe correspondence, Theta series, ... The decomposition in irreducibles of the restriction of Weil's representation to maximal compact subgroups or anisotropic tori of the metaplectic group is thus an important information in representation theory. Except for $SL(2)$, this was not known in the p-adic case. In this article, we prove that the restriction of the Weil representation over a p-adic field, $p \neq 2$, to maximal compact subgroups is multiplicity free and give an explicit description of the irreducibles occurring. In another paper, using our results, we describe the decomposition of the restriction of the Weil representation to maximal elliptic tori.

1. Introduction.

La représentation de Weil intervient dans de nombreux domaines de la théorie des représentations des groupes presque algébriques généraux ou des groupes réductifs sur un corps local. Citons la construction, dans le cadre de la méthode des orbites, des représentations unitaires irréductibles dans [**5**], la correspondance de Howe (voir [**13**], [**10**, Chapitre 2], [**16**]), les séries theta [**8**]. Il est donc important d'en comprendre la structure et notamment comment sa restriction à un sous-groupe compact maximal se décompose en irréductibles. C'est ce que nous faisons dans cet article. Dans un autre article (voir [**9**]), faisant suite à celui-ci et utilisant une partie de ses résultats, nous décrivons la décomposition de la restriction de la représentation de Weil à un tore maximal elliptique.

Soit k un corps local non archimédien de caractéristique nulle, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de k, $\mathfrak{p}$ son idéal maximal et ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}$. Le corps résiduel $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ (noté $\mathbb{F}_q$) est fini de cardinal q et de caractéristique p. Nous supposons que $p \neq 2$. Nous fixons un caractère unitaire ψ de conducteur λ_ψ de k.

On se donne un k-espace symplectique (W, β) de dimension $2r$. On note $Sp(W)$ le groupe symplectique associé à (W, β) et $Mp(W)$ le groupe métaplectique correspondant, revêtement à deux feuillets non trivial de $Sp(W)$. On a une suite exacte courte:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow Mp(W) \longrightarrow Sp(W) \longrightarrow 1. \tag{1.1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 22E50.
Key Words and Phrases. Weil representation, metaplectic group, maximal compact subgroup, elliptic maximal torus.

En fait, le groupe de Heisenberg $H(W)$ construit sur l'espace symplectique W admet une unique (à équivalence près) représentation unitaire irréductible $(\rho_\psi, \mathcal{H})$ de caractère central ψ; on l'appelle la représentation de Schrödinger de caractère central ψ de $H(W)$. Le groupe $Sp(W)$ opère dans $H(W)$ par authomorphismes agissant trivialement sur le centre. Soit $U(\mathcal{H})$ le groupe des transformations unitaires de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, muni de la topologie de la convergence forte. L'ensemble $\widehat{Sp(W)}_\psi$ des couples $(g, U) \in Sp(W) \times U(\mathcal{H})$ vérifiant:

$$U\rho_\psi(h)U^{-1} = \rho_\psi(g.h),\ g \in Sp(W),\ h \in H(W),$$

est un sous-groupe fermé localement compact de $Sp(W) \times U(\mathcal{H})$, extension centrale de $Sp(W)$ par le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. On a donc une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbb{U} \longrightarrow \widehat{Sp(W)}_\psi \longrightarrow Sp(W) \longrightarrow 1 \tag{1.2}$$

et l'application $S_\psi : (g, U) \mapsto U$ est une représentation de $\widehat{Sp(W)}_\psi$, appelée représentation métaplectique. Il existe un unique homomorphisme de groupes $Mp(W) \longrightarrow \widehat{Sp(W)}_\psi$ rendant commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
Mp(W) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \widehat{Sp(W)}_\psi \arrow[dl] \\
& Sp(W) &
\end{tikzcd}$$

Ce morphisme est injectif et permet d'identifier $Mp(W)$ à un sous-groupe de $\widehat{Sp(W)}_\psi$. Alors la restriction à $Mp(W)$ de la représentation métaplectique est une représentation fidèle encore notée S_ψ et appelée représentation de Weil de type ψ de $Mp(W)$.

Nous montrons que la suite exacte (1.1) est scindée au dessus de chaque sous-groupe compact maximal de $Sp(W)$. On sait qu'un sous-groupe compact maximal de $Sp(W)$ est le stabilisateur K_B d'un bon réseau B de W, i.e. B est un sous-$\mathcal{O}$-module ouvert et compact de W vérifiant

$$\varpi B^* \subset B \subset B^*,$$

où B^* est le réseau dual de B relativement à β et ψ. Dans [**16**, II.3], Waldspurger a associé à un tel réseau une réalisation $(\rho_\psi^B, \mathcal{H}_\psi^B)$ de la représentation de Schrödinger, appelée modèle latticiel généralisé, et une représentation S_ψ^B de K_B dans $\mathcal{H}_\psi^B$ telle que l'application $g \mapsto (g, S_\psi^B(g))$ soit une section de la suite exacte courte (1.2). Lorsque B est un réseau autodual, c'est-à-dire $B = B^*$, on parle de modèle latticiel: dans ce cas, Moeglin a montré que cette application est une section canonique, et unique lorsque $q \geq 4$, de la suite exacte (1.1) (voir [**10**, Chapitre 2, II 10, Lemme]). Nous montrons que ce résultat reste vrai dans le cas général (voir les Théorèmes 4.2.1 et 4.6.1). Pour ce faire, nous comparons le modèle latticiel généralisé associé au bon réseau B avec le modèle latticiel associé à un réseau autodual A tel que $B \subset A \subset B^*$ (voir le Théorème 4.5.1). Nous obtenons en particulier les formules explicites pour la réalisation, dans ce modèle latticiel, de la représentation S_ψ^B de Waldspurger pour les éléments d'un système de générateurs du groupe K_B constitué du sous-groupe «parabolique» P_B stabilisateur de A et d'un élément particulier $\varsigma_B \in K_B \backslash P_B$ (voir le Corollaire 4.5.1). Il est à remarquer que l'énoncé du Théorème 4.5.1 se trouve déjà dans [**12**, 4.3.e].

Dans la suite de cette introduction, nous noterons S_ψ^B la réalisation de la représentation de Weil dans le modèle latticiel associé au bon réseau B. On voit donc que la représentation S_ψ^B de Waldspurger est la restriction de la représentation de Weil S_ψ^B à l'image de K_B par sa section canonique dans le groupe métaplectique. De même, les formules que nous avons obtenues pour la réalisation de la représentation de Waldspurger de K_B dans le modèle latticiel décrivent la restriction à cette section de la représentation de Weil S_ψ^A.

Ces dernières formules nous permettent d'étudier la décomposition en irréductibles de la restriction de la représentation de Weil à P_B et à K_B. Dans les deux cas, nous montrons que cette décomposition est sans multiplicité; nous montrons également que les représentations de P_B qui apparaissent sont monomiales et en donnons une description explicite (voir le Lemme 5.1.2 et le Théorème 5.2.1). Lorsque le réseau B est autodual, les représentations de K_B qui apparaissent sont également monomiales; dans ce cas le résultat a été obtenu par Prasad (voir [**13**]).

Si n est un entier naturel, on désigne par O_n l'anneau $\mathcal{O}/\varpi^{n+1}\mathcal{O}$ et on pose $\mathrm{b}_n = B/\varpi^{n+1}B^*$ et $\mathrm{b}_n^* = B^*/\varpi^n B$. Alors, O_n est un anneau local fini et principal de caractéristique impaire, b_n (resp. b_n^*) est un O_n-module de type fini muni naturellement d'une structure symplectique et l'action de K_B dans B passe au quotient à b_n (resp. b_n^*), induisant un morphisme surjectif de K_B sur le groupe symplectique $Sp(\mathrm{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathrm{b}_n^*)$). On remarque que $O_0 = \mathbb{F}_q$ et que b_0 (resp. b_0^*), que nous notons plus simplement b (resp. b^*) est un espace symplectique sur $\mathbb{F}_q$; on note $2l$ la dimension de b^*. Alors le nombre $l = l(B)$, qui prend toutes les valeurs entières entre 0 et $(1/2)\dim W$, détermine la classe de conjugaison du bon réseau B et donc celle du sous-groupe compact maximal K_B. On montre que K_B est naturellement isomorphe à la limite projective des groupes $Sp(\mathrm{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathrm{b}_n^*)$) (voir la Proposition 2.7.1).

Dans [**3**] et [**4**], Cliff, McNeilly et Szechtman ont construit les représentations de Weil pour le groupe symplectique d'un module symplectique sur un anneau local fini de caractéristique impaire et décrit leur décomposition en irréductibles dans le cas où l'anneau est principal et le module symplectique libre (les différentes représentations de Weil associées à un même caractère primitif de l'anneau local diffèrent d'un caractère du groupe symplectique). Il s'avère que pour $n \geq 1$, le O_n-module b_n (resp. b_n^*) est libre si et seulement si le réseau B est autodual ($l(B) = 0$) ou vérifie $B = \varpi B^*$ ($l(B) = r$). Nous étendons les résultats de [**4**] au cas des groupes $Sp(\mathrm{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathrm{b}_n^*)$) avec B quelconque (voir le Théorème 3.8.1). En fait la restriction de la représentation de Weil S_ψ^B à K_B est la limite inductive de représentations de Weil des groupes $Sp(\mathrm{b}_{2n+1})$. En particulier la décomposition en irréductibles de la restriction de S_ψ^B à K_B se ramène à la décomposition en irréductibles des représentations de Weil des groupes $Sp(\mathrm{b}_{2n+1})$. Utilisant alors nos résultats, nous en déduisons une description des représentations irréductibles apparaissant dans la décomposition de la restriction de la représentation de Weil à K_B comme représentations induites à partir de stabilisateurs génériques de K_B dans les différents b_{2n+1} (voir le Théorème 5.3.1 et le Lemme 5.4.1). Dans [**4**] Cliff, McNeilly et Szechtman ont remarqué que leurs résultats permettaient d'obtenir la décomposition en irréductible de la restriction de la représentation de Weil à K_B lorsque B est autodual ou vérifie $B = \varpi B^*$.

D'autre part, dans [**6**] Dutta et Prasad ont démontré que la représentation de Weil du groupe symplectique construit sur un groupe abélien fini se décompose sans multiplicité. Ils ont décrit cette décomposition en terme de la combinatoire des orbites du groupe abélien sous l'action de son groupe d'automorphismes et remarqué que l'on peut en déduire les mêmes résultats pour la représentation du groupe symplectique d'un module symplectique de type fini sur un anneau fini local et principal. Leurs résultats contiennent ceux du Théorème 3.8.1, sauf que leur description des sous-modules irréductibles ne les fait pas explicitement apparaître comme modules induits.

Nous remercions Paul Broussous, François Courtès et Claude Quitté pour d'utiles conversations, ainsi que le *referee* dont les suggestions nous ont permis d'améliorer la rédaction de cet article.

2. Sous-groupes compacts maximaux du groupe symplectique.

2.1. Dans la suite, k désigne un corps local non archimédien de caractéristique nulle, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de k et $\mathfrak{p}$ son idéal maximal. Nous fixons ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}$, c'est-à-dire $\varpi \in \mathcal{O}$ tel que $\mathfrak{p} = \varpi\mathcal{O}$. Le corps résiduel $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ est fini de cardinal q et de caractéristique p, nous le notons $\mathbb{F}_q$. L'entier p est appelé la caractéristique résiduelle de k. Nous supposons que $p \neq 2$.

Nous fixons aussi un caractère unitaire ψ non trivial de k. Son conducteur λ_ψ est l'unique entier relatif vérifiant

$$\psi_{|\mathfrak{p}^{\lambda_\psi}} \equiv 1 \text{ et } \psi_{|\mathfrak{p}^{\lambda_\psi - 1}} \not\equiv 1.$$

Le caractère ψ induit un caractère $\overline{\psi}$ de $\mathbb{F}_q$ tel que

$$\overline{\psi}(p_{\mathbb{F}_q}(x)) = \psi(\varpi^{\lambda_\psi - 1}x),\ x \in \mathcal{O},$$

$p_{\mathbb{F}_q}$ désignant la projection naturelle de $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{F}_q$.

2.2. Dans la suite, F désigne soit un anneau local fini de caractéristique impaire, muni de la topologie discrète, soit un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2, muni de sa topologie localement compacte. On appelle F-espace symplectique tout couple (W, β) où W est un F-module de type fini et β une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur W.

Tout F-module de type fini est naturellement muni d'une topologie localement compacte : lorsque F est un anneau local fini, il s'agit de la topologie discrète et, lorsque F est un corps local, il s'agit de sa topologie d'espace vectoriel de dimension finie sur ce corps local. On munit alors $GL(W)$, le groupe linéaire de W, de la topologie induite par celle de $End_F(W)$, qui en fait un groupe topologique localement compact.

On désigne par J_r la matrice antisymétrique d'ordre $2r$:

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix},$$

I_r étant la matrice identité d'ordre r.

Si W est un F-module libre, on appelle base symplectique (resp. presque symplectique) de W, toute base $(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r)$ telle que la matrice de β dans cette base soit J_r (resp. tJ_r, où $t \in F$ est non nul). Dans ce cas, de telles bases existent (voir [**7**]).

On note $Sp(W, \beta)$ ou plus simplement $Sp(W)$ le groupe symplectique associé à (W, β):

$$Sp(W) = \{g \in GL(W) \,|\, \beta(gv, gw) = \beta(v, w), \text{ pour tout } v, w \in W\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $GL(W)$. Il contient, lorsque W est non nul, le groupe à deux éléments $\{\pm Id\}$ comme sous-groupe central; lorsque F est un corps, ce sous-groupe est le centre de $Sp(W)$. Lorsque W est nul, $Sp(W)$ est le groupe trivial.

Soit $g \in GL(W)$ dont la matrice dans une base presque symplectique s'écrit par blocs $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Alors, on a: $g \in Sp(W)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite:

$$\begin{aligned} &{}^t a\, c = {}^t c\, a, \ {}^t b\, d = {}^t d\, b \quad \text{et} \quad {}^t a\, d - {}^t c\, b = I_r, \\ &a\, {}^t b = b\, {}^t a, \ c\, {}^t d = d\, {}^t c \quad \text{et} \quad a\, {}^t d - b\, {}^t c = I_r. \end{aligned}$$

Si U est une partie de W, on note $U^\perp$ son orthogonal relativement à β. Un sous-module U de W est dit totalement isotrope, si $U \subset U^\perp$. Si $U = U^\perp$, on dit que c'est un sous-espace lagrangien ou un lagrangien de W.

Lorsque F est un corps, un sous-espace vectoriel totalement isotrope est de dimension maximale si et seulement si c'est un lagrangien de W. Dans cette situation, le groupe symplectique $Sp(W)$ opère transitivement sur les lagrangiens de (W, β).

2.3. Soit (W, β) un k-espace symplectique.

Définition 2.3.1. Une base $(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r)$ de W est dite autoduale relativement à β et ψ si elle vérifie les relations:

$$\beta(e_i, e_j) = \beta(f_i, f_j) = 0 \text{ et } \beta(e_i, f_j) = \varpi^{\lambda_\psi} \delta_{ij}, \ 1 \leq i, j \leq r \tag{2.1}$$

ou, de manière équivalente, si la matrice de β dans cette base est $\varpi^{\lambda_\psi} J_r$.

Un réseau B de W est un $\mathcal{O}$-module, compact et ouvert. On note

$$\begin{aligned} B^* &= \{v \in W, \quad \beta(v, b) \in \varpi^{\lambda_\psi} \mathcal{O}, \text{ pour tout } b \in B\} \\ &= \{v \in W, \quad \psi(\beta(v, b)) = 1, \text{ pour tout } b \in B\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Alors, B^* est aussi un réseau de W ; on l'appelle le réseau dual de B relativement à β et ψ.

Définition 2.3.2. On dit que B est un bon réseau si

$$\varpi B^* \subset B \subset B^*.$$

Il est dit autodual si $B = B^*$.

Soit $B \subset W$ un bon réseau. On note b^* le quotient B^*/B. Il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ et de la forme symplectique β_{b^*} définie par:

$$\beta_{\mathrm{b}^*}(p_{\mathrm{b}^*}(w), p_{\mathrm{b}^*}(w')) = p_{\mathbb{F}_q}(\varpi^{1-\lambda_\psi}\beta(w, w')), \tag{2.3}$$

où p_{b^*} désigne la projection naturelle de B^* sur b^*. On pose $l(B) = (1/2)\dim_{\mathbb{F}_q} b^*$. Alors $l(B)$ est un entier et deux bons réseaux B et B' sont conjugués sous l'action de $Sp(W)$ si et seulement si on a $l(B) = l(B')$.

Si B est un bon réseau, on désigne par K_B son stabilisateur dans $Sp(W)$. Alors, les K_B, pour B un bon réseau, forment l'ensemble des sous-groupes compacts maximaux de $Sp(W)$ et deux tels sous-groupes K_B et $K_{B'}$ sont conjugués dans $Sp(W)$ si et seulement si B et B' sont dans la même $Sp(W)$-orbite, autrement dit si et seulement si $l(B) = l(B')$.

Soit $B \subset W$ un bon réseau et $l = l(B)$. Alors, il existe une base autoduale $(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r)$ de W telle que

$$B = \varpi\mathcal{O}e_1 \oplus \cdots \oplus \varpi\mathcal{O}e_l \oplus \mathcal{O}e_{l+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}f_r. \tag{2.4}$$

De plus, les éléments de K_B sont les éléments g de $Sp(W)$ dont la matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_l, f_{l+1}, \ldots, f_r)$ s'écrit par blocs:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \varpi a_{12} & \varpi b_{11} & \varpi b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \varpi b_{21} & b_{22} \\ \varpi^{-1}c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & \varpi d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

les matrices $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ étant à coefficients dans $\mathcal{O}$, a_{11} et d_{11} (resp. a_{22} et d_{22}) étant carrées d'ordre l (resp. $r - l$).

2.4. On garde les notations du paragraphe précédent. Soit $B \subset W$ un bon réseau, $l = l(B)$ et $(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r)$ une base autoduale de W vérifiant la relation (2.4). Alors, le réseau dual de B est

$$B^* = \mathcal{O}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \varpi^{-1}\mathcal{O}f_1 \oplus \cdots \oplus \varpi^{-1}\mathcal{O}f_l \oplus \mathcal{O}f_{l+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}f_r$$

et l'on a

$$B \subset A \subset B^*,$$

où $A = \mathcal{O}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}f_r$ est un réseau autodual. On pose $K = K_A$. Les éléments de K sont les éléments de $Sp(W)$ dont la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ est à coefficients dans $\mathcal{O}$.

Nous avons vu que $\mathrm{b}^* = B^*/B$, muni de la forme β_{b^*} est un espace symplectique de dimension $2l$ sur $\mathbb{F}_q$. On vérifie que la famille de vecteurs

$$(p_{\mathrm{b}^*}(e_1), \dots, p_{\mathrm{b}^*}(e_l), p_{\mathrm{b}^*}(\varpi^{-1}f_1), \dots, p_{\mathrm{b}^*}(\varpi^{-1}f_l)) \tag{2.6}$$

est une base symplectique de $(\mathrm{b}^*, \beta_{\mathrm{b}^*})$.

De même, $\mathrm{b} = B/\varpi B^*$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel et de la forme symplectique β_{b} définie par

$$\beta_{\mathrm{b}}(p_{\mathrm{b}}(w), p_{\mathrm{b}}(w')) = p_{\mathbb{F}_q}(\varpi^{-\lambda_\psi}\beta(w, w')),\ w, w' \in B,$$

où p_{b} désigne la projection naturelle de B sur b. La famille de vecteurs

$$(p_{\mathrm{b}}(e_{l+1}), \dots, p_{\mathrm{b}}(e_r), p_{\mathrm{b}}(f_{l+1}), \dots, p_{\mathrm{b}}(f_r))$$

est une base symplectique de b de sorte que la dimension de b sur $\mathbb{F}_q$ est $2(r-l)$.

Le groupe K_B laissant invariant B, laisse invariant B^*. Il agit donc naturellement dans b^* (resp. b) et cette action induit un morphisme de K_B dans $Sp(\mathrm{b}^*)$ (resp. $Sp(\mathrm{b})$), le groupe symplectique associé à $(\mathrm{b}^*, \beta_{\mathrm{b}^*})$ (resp. $(\mathrm{b}, \beta_{\mathrm{b}})$); ce morphisme est noté $p_{Sp(\mathrm{b}^*)}$ (resp. $p_{Sp(\mathrm{b})}$). On a le résultat suivant:

Lemme 2.4.1. *Le morphisme $p_{Sp(\mathrm{b}^*)} \times p_{Sp(\mathrm{b})}$ est surjectif de K_B sur le groupe $Sp(\mathrm{b}^*) \times Sp(\mathrm{b})$.*

Démonstration. Rappelons que si (W', β') est un espace symplectique sur le corps F, le groupe symplectique $Sp(W')$ est engendré par les transvections symplectiques de (W', β') qui sont les transformations de W' de la forme $\tau_{a,v} : w \mapsto w + a\beta(v, w)v$, $a \in F$, $v \in W'$. Il est immédiat que les transvections $\tau_{a,v}$ telles que $a \in \varpi^{1-\lambda_\psi}\mathcal{O}$ et $v \in B^*$ (resp. $a \in \varpi^{-\lambda_\psi}\mathcal{O}$ et $v \in B$) sont dans K_B et que leur image par $p_{Sp(\mathrm{b}^*)} \times p_{Sp(\mathrm{b})}$ parcourt l'ensemble des éléments de la forme (τ, Id) (resp. (Id, τ)) où τ est une transvection symplectique de $(\mathrm{b}^*, \beta_{\mathrm{b}^*})$ (resp. $(\mathrm{b}, \beta_{\mathrm{b}})$). D'où le lemme. □

On désigne par K'_B le noyau du morphisme $p_{Sp(\mathrm{b}^*)} \times p_{Sp(\mathrm{b})}$. On a

$$K'_B = \{g \in K_B,\ (g-1)B \subset \varpi B^* \text{ et } (g-1)B^* \subset B\}.$$

Les éléments de K'_B sont les éléments de $Sp(W)$ dont la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_l, e_{l+1}, \dots, e_r, f_1, \dots, f_l, f_{l+1}, \dots, f_r)$ s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} I_l + \varpi a_{11} & \varpi a_{12} & \varpi^2 b_{11} & \varpi b_{12} \\ a_{21} & I_{r-l} + \varpi a_{22} & \varpi b_{21} & \varpi b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & I_l + \varpi d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & \varpi c_{22} & \varpi d_{21} & I_{r-l} + \varpi d_{22} \end{pmatrix}$$

les matrices a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij} étant des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}$, a_{11} et d_{11} (resp. a_{22} et d_{22}) étant carrées d'ordre l (resp. $r-l$).

2.5. On reprend les notations du paragraphe précédent. On note $\mathrm{x} = A/B$; c'est un sous-espace totalement isotrope maximal de b^*. On voit que x est le sous-espace vectoriel de b^* engendré par $(p_{\mathrm{b}^*}(e_1), \dots, p_{\mathrm{b}^*}(e_l))$. Inversement: si y est un lagrangien de b^*, alors $A = p_{\mathrm{b}^*}^{-1}(\mathrm{y})$ est un réseau autodual de W tel que $B \subset A \subset B^*$ et il existe une base autoduale $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ de W vérifiant la relation (2.4) et engendrant A comme $\mathcal{O}$-module.

D'autre part, désignons par J_{l,b^*} l'élément de $Sp(\mathrm{b}^*)$ dont la matrice dans la base symplectique (2.6) est J_l. Alors $Sp(\mathrm{b}^*)$ est engendré par J_{l,b^*} et le sous-groupe parabolique $P_{\mathrm{b}^*} = Sp(\mathrm{b}^*)(\mathrm{x})$, stabilisateur du lagrangien x dans $Sp(\mathrm{b}^*)$.

Si on note $P_B = p_{Sp(\mathrm{b}^*)}^{-1}(P_{\mathrm{b}^*})$, on a:

$$K'_B \subset K \text{ et } K \cap K_B = P_B.$$

On voit alors que P_B est l'ensemble des $g \in Sp(W)$ dont la matrice dans la base

$$(e_1, \dots, e_l, e_{l+1}, \dots, e_r, f_1, \dots, f_l, f_{l+1}, \dots, f_r)$$

s'écrit par blocs

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & \varpi a_{12} & \varpi b_{11} & \varpi b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \varpi b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & \varpi d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

les matrices a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij} étant à coefficients dans $\mathcal{O}$, a_{11} et d_{11} (resp. a_{22} et d_{22}) étant carrées d'ordre l (resp. $r-l$).

On désigne par ς_B l'élément de K_B dont la matrice dans cette même base est

$$\varsigma_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varpi I_l & 0 \\ 0 & I_{r-l} & 0 & 0 \\ -\varpi^{-1} I_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r-l} \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 2.5.1. *Avec les notations ci-dessus, K_B est engendré par P_B et ς_B.*

DÉMONSTRATION. On a:

- $\varsigma_B(e_i) = -\varpi^{-1} f_i, \quad 1 \le i \le l,$
- $\varsigma_B(\varpi^{-1} f_i) = e_i, \quad 1 \le i \le l.$

Il s'en suit que $p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(\varsigma_B) = J_{l,\mathrm{b}^*}$. Le résultat voulu s'en déduit facilement. □

On désigne par N_B (resp. $\overline{N}_B$) le sous-groupe de K_B constitué des éléments $x_B(a)$

(resp. $y_B(a)$), ayant dans la base $(e_1,\dots,e_l,e_{l+1},\dots,e_r,f_1,\dots,f_l,f_{l+1},\dots,f_r)$ une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_l & 0 & \varpi a & 0 \\ 0 & I_{r-l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r-l} \end{pmatrix} \qquad \Bigg(\text{resp.} \begin{pmatrix} I_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{r-l} & 0 & 0 \\ \varpi^{-1}a & 0 & I_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r-l} \end{pmatrix}\Bigg),$$

où a est une matrice symétrique d'ordre l à coefficients dans $\mathcal{O}$.

Proposition 2.5.2. *Le groupe K_B est engendré par P_B et $\overline{N}_B$.*

Démonstration. Cela résulte de la Proposition 2.5.1 et de ce que d'une part N_B est un sous-groupe de P_B et que d'autre part on a $\varsigma_B = x_B(I_l)y_B(-I_l)x_B(I_l)$. $\square$

Remarque. Il résulte de [**2**] que les sous-groupes K_B sont les stabilisateurs des sommets de l'immeuble du groupe $Sp(W)$. Pour être plus précis, si l'on choisit une base autoduale $(e_1,\dots,e_r,f_1,\dots,f_r)$ de W et si, pour $0 \le l \le r$, on pose $B_l = \mathcal{O}\varpi e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}\varpi e_l \oplus \mathcal{O}e_{l+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}f_r$, alors les K_{B_l}, $0 \le l \le r$, sont les stabilisateurs des sommets d'une chambre, les cas où $l = 0$ et $l = r$ correspondant aux deux sommets hyperspéciaux. De plus, parmi les sous-groupes K_{B_l}, $0 \le l \le r$, seuls K_{B_0} et K_{B_r} sont conjugués par un élément du groupe des similitudes symplectiques: si on désigne par d_r la similitude symplectique dont la matrice dans la base autoduale choisie est $\left(\begin{smallmatrix} \varpi I_r & 0 \\ 0 & I_r \end{smallmatrix}\right)$ on a $K_{B_r} = d_r K_{B_0} d_r^{-1}$.

2.6. On garde les notations du paragraphe précédent. Il est clair que $B^*\backslash\varpi B^*$ est une partie de W qui est invariante sous l'action de K_B.

Lemme 2.6.1. (i) *Pour tout $b \in B^*\backslash B$ (resp. $b \in B\backslash\varpi B^*$), on a $K'_B b = b + B$ (resp. $K'_B b = b + \varpi B^*$).*
(ii) *Les orbites de K_B dans $B^*\backslash\varpi B^*$ sont $B^*\backslash B$ et $B\backslash\varpi B^*$.*
(iii) *Les orbites de P_B dans $B^*\backslash\varpi B^*$ sont $B^*\backslash A$, $A\backslash B$ et $B\backslash\varpi B^*$.*

Démonstration. Il est clair que $B^*\backslash B$ et $B\backslash\varpi B^*$ (resp. $B^*\backslash A$, $A\backslash B$ et $B\backslash\varpi B^*$) sont invariants sous l'action de K_B (resp. P_B). Il reste à montrer (i) et le fait que chacun de ces ensembles est une K_B-orbite (resp. P_B-orbite).

On vérifie facilement que l'image de P_B par le morphisme $p_{Sp(\mathrm{b}^*)} \times p_{Sp(\mathrm{b})}$ est $P_{\mathrm{b}^*} \times Sp(\mathrm{b})$. Comme les orbites de P_{b^*} dans b^* sont $\{0\}$, $\mathrm{x}\backslash\{0\}$ et $\mathrm{b}^*\backslash\mathrm{x}$ et comme $Sp(\mathrm{b})$ (resp. $Sp(\mathrm{b}^*)$) agit transitivement dans $\mathrm{b}\backslash\{0\}$ (resp. $\mathrm{b}^*\backslash\{0\}$) il suffit de montrer que, pour un élément particulier b de $B^*\backslash B$ (resp. $B\backslash\varpi B^*$), on a $K'_B b = b + B$ (resp. $K'_B b = b + \varpi B^*$): on peut prendre $b = e_1$ (resp $b = e_{l+1}$).

Dans la suite de la démonstration, on identifie chaque élément de W (resp. $GL(W)$) avec le vecteur colonne de ses coordonnées (resp. sa matrice) dans la base $(e_1,\dots,e_l,$ $e_{l+1},\dots,e_r,f_1,\dots,f_l,f_{l+1},\dots,f_r)$.

Supposons que $b = e_1 \in B^*\backslash B$ et soit $u \in B$. Alors, on a $u = \left(\begin{smallmatrix} \varpi\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{smallmatrix}\right)$ avec $\lambda_1, \mu_1 \in \mathcal{O}^l$, $\lambda_2, \mu_2 \in \mathcal{O}^{r-l}$, et l'élément $k = \left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & {}^t a \end{smallmatrix}\right)$ où

$$a = \begin{pmatrix} I_l + \varpi\lambda_1{}^te_1 & 0 \\ \lambda_2{}^te_1 & I_{r-l} \end{pmatrix}$$

est dans K'_B et vérifie $k(e_1+u) = e_1+u'$ avec $u' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu'_1 \\ \mu'_2 \end{pmatrix}$, μ'_i, $i = 1, 2$, étant à coefficients dans $\mathcal{O}$. Mais alors l'élément $h = \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ c & I_r \end{smallmatrix}\right)$ avec

$$c = -\begin{pmatrix} \mu_1'{}^te_1 + e_1{}^t\mu'_1 - {}^t\mu'_1e_1E_{11} & e_1{}^t\mu'_2 \\ \mu_2'{}^te_1 & 0 \end{pmatrix}$$

est dans K'_B et vérifie $hk(e_1 + u) = e_1$.

Plaçons nous dans le cas où $b = e_{l+1} \in B\backslash\varpi B^*$ et soit $u \in \varpi B^*$. Alors, on peut écrire $b = \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} \varpi\lambda_1 \\ \varpi\lambda_2 \\ \mu_1 \\ \varpi\mu_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \mu_1 \in \mathcal{O}^l$, $\lambda_2, \mu_2 \in \mathcal{O}^{r-l}$, et l'élément $k = \left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & {}^ta \end{smallmatrix}\right)$ où

$$a = \begin{pmatrix} I_l & \varpi\lambda_1{}^te_1 \\ 0 & I_{r-l} + \varpi\lambda_2{}^te_1 \end{pmatrix}$$

est dans K'_B et vérifie $k(e_{l+1} + u) = e_{l+1} + u'$ avec $u' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu'_1 \\ \varpi\mu'_2 \end{pmatrix}$, μ'_i, $i = 1, 2$, étant à coefficients dans $\mathcal{O}$. Mais alors l'élément $h = \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ c & I_r \end{smallmatrix}\right)$ avec

$$c = -\begin{pmatrix} 0 & \mu_1'{}^te_1 \\ e_1{}^t\mu'{}_1 & \varpi(\mu_2'{}^te_1 + e_1{}^t\mu'{}_2) - \varpi{}^t\mu'{}_2e_1E_{11} \end{pmatrix}$$

est dans K'_B et vérifie $hk(e_{l+1} + u) = e_{l+1}$. □

2.7. On garde les notations du Paragraphe 2.4. Soit n un entier naturel. On désigne par O_n l'anneau $\mathcal{O}/\varpi^{n+1}\mathcal{O}$ et par p_{O_n} la projection canonique de $\mathcal{O}$ sur O_n. Alors, $O_0 = \mathbb{F}_q$ et si $n \geq 1$, O_n est un anneau local principal fini dont les idéaux propres sont les puissances k-ièmes de l'idéal maximal $\varpi\mathcal{O}/\varpi^{n+1}\mathcal{O}$, $1 \leq k \leq n$. De plus la projection p_{O_m} passe au quotient, pour tout entier $m > n$, en un morphisme d'anneau $p_{n,m} : O_m \longrightarrow O_n$; on note plus simplement $p_n = p_{n,n+1}$. La famille des O_n munie des morphismes $p_{n,m}$ constitue un système projectif d'anneaux dont il est bien connu que l'anneau $\mathcal{O}$, muni de sa topologie, est la limite projective: $\mathcal{O} = \varprojlim O_n$.

On pose $\mathrm{b}_n = B/\varpi^{n+1}B^*$ et $\mathrm{b}^*_n = B^*/\varpi^nB$. Ce sont des O_n-modules (et donc des O_m-modules, pour $m \geq n$) de type fini. On a $\mathrm{b}_0 = \mathrm{b}$ et $\mathrm{b}^*_0 = \mathrm{b}^*$. Lorsque $n \geq 1$, b_n et b^*_n admettent $2r$ générateurs et ils sont libres si et seulement si $l = 0$ ou $l = r$ (dans ce cas, on a $\mathrm{b}_n = \mathrm{b}^*_{n+1}$ ou $\mathrm{b}^*_n = \mathrm{b}_{n+1}$). On désigne par p_{b_n} (resp. $p_{\mathrm{b}^*_n}$) la projection canonique de B (resp. B^*) sur b_n (resp. b^*_n); elle induit une projection naturelle de b_{n+1} (resp. b^*_{n+1}) sur b_n (resp. b^*_n) notée p_n, laquelle est compatible avec les structures de O_{n+1}-modules.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que le groupe K_B est la limite projective des groupes $Sp(\mathrm{b}_n)$ ou $Sp(\mathrm{b}_n^*)$.

On désigne par $End_B(W)$ la sous-algèbre de $End_k(W)$ constituée des endomorphismes linéaires laissant invariant B et B^* et par $GL_B(W)$ le sous-groupe de $GL(W)$ constitué des éléments qui sont, ainsi que leur inverse, dans $End_B(W)$. Tout élément g de $End_B(W)$ définit un élément $\dot{g}_n$ (resp. $\dot{g}_n^*$) de $End_{O_n}(\mathrm{b}_n)$ (resp. $End_{O_n}(\mathrm{b}_n^*)$) en posant $\dot{g}_n p_{\mathrm{b}_n}(v) = p_{\mathrm{b}_n}(gv)$, $v \in B$ (resp. $\dot{g}_n^* p_{\mathrm{b}_n^*}(v) = p_{\mathrm{b}_n^*}(gv)$, $v \in B^*$). On vérifie que l'application $g \mapsto \dot{g}_n$ (resp. $g \mapsto \dot{g}_n^*$) est un morphisme surjectif d'algèbres de $End_B(W)$ sur $End_{O_n}(\mathrm{b}_n)$ (resp. $End_{O_n}(\mathrm{b}_n^*)$) de noyau $\mathcal{L}_n = \{g \in End_k(W) | gB \subset \varpi^{n+1}B^*\}$ (resp. $\mathcal{L}_n^* = \{g \in End_k(W) | gB^* \subset \varpi^n B\}$). De plus, pour tout entier $m > n$, le morphisme $g \mapsto \dot{g}_m$ (resp. $g \mapsto \dot{g}_m^*$) passe au quotient en un morphisme d'algèbres $r_{n,m} : End_{O_m}(\mathrm{b}_m) \longrightarrow End_{O_n}(\mathrm{b}_n)$ (resp. $r_{n,m}^* : End_{O_m}(\mathrm{b}_m^*) \longrightarrow End_{O_n}(\mathrm{b}_n^*)$); on note plus simplement $r_n = r_{n,n+1}$ (resp. $r_n^* = r_{n,n+1}^*$).

Lemme 2.7.1. *Soit n un entier naturel.*

(i) *L'application $g \mapsto \dot{g}_n$ (resp. $g \mapsto \dot{g}_n^*$) définit un morphisme surjectif de groupes de $GL_B(W)$ sur le groupe linéaire $GL_{O_n}(\mathrm{b}_n)$ (resp. $GL_{O_n}(\mathrm{b}_n^*)$), de noyau $Id + \mathcal{L}_n$ (resp. $Id + \mathcal{L}_n^*$).*

(ii) *Pour tout entier $m > n$, l'application $r_{n,m}$ (resp. $r_{n,m}^*$) induit un morphisme surjectif de groupes de $GL_{O_m}(\mathrm{b}_m)$ sur $GL_{O_n}(\mathrm{b}_n)$ (resp. $GL_{O_m}(\mathrm{b}_m^*)$ sur $GL_{O_n}(\mathrm{b}_n^*)$) de noyau $Id + \mathcal{L}_n/\mathcal{L}_m$ (resp. $Id + \mathcal{L}_n^*/\mathcal{L}_m^*$).*

Démonstration. L'assertion (ii) est une conséquente immédiate de l'assertion (i). Montrons l'assertion (i).

Il est clair que l'application $g \mapsto \dot{g}_n$ (resp. $g \mapsto \dot{g}_n^*$) est un morphisme de groupes de $GL_B(W)$ dans $GL_{O_n}(\mathrm{b}_n)$ (resp. $GL_{O_n}(\mathrm{b}_n^*)$), de noyau $Id + \mathcal{L}_n$ (resp. $Id + \mathcal{L}_n^*$). Il reste à montrer la surjectivité.

Supposons que $n = 0$. Soient $e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r$ une base autoduale de W telle que $B = \mathcal{O}\varpi e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}\varpi e_l \oplus \mathcal{O}e_{l+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}f_r$ et U (resp. V) le sous-espace vectoriel de W engendré par $e_1, \ldots, e_l, f_1, \ldots, f_l$ (resp. $e_{l+1}, \ldots, e_r, f_{l+1}, \ldots, f_r$). Alors $G = \{g \in GL(W) | g_{|U} = Id$ et $g(B \cap V) = B \cap V\}$ (resp. $G^* = \{g \in GL(W) | g(B^* \cap U) = B^* \cap U$ et $g_{|V} = Id\}$) est un sous-groupe de $GL_B(W)$ et son image par l'application $g \mapsto \dot{g}_0$ (resp. $g \mapsto \dot{g}_0^*$) est $GL_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{b})$ (resp. $GL_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{b}^*)$).

Supposons $n \geq 1$. Soit $g \in End_B(W)$. Dire que $\dot{g}_n \in GL_{O_n}(\mathrm{b}_n)$ (resp. $\dot{g}_n^* \in GL_{O_n}(\mathrm{b}_n^*)$) revient à dire qu'il existe $g' \in End_B(W)$ tel que $gg' \in Id + \mathcal{L}_n$ (resp. $gg' \in Id + \mathcal{L}_n^*$). Or, $Id + \mathcal{L}_n$ et $Id + \mathcal{L}_n^*$ sont des sous-groupes de $GL_B(W)$. Il est alors clair que $g \in GL_B(W)$. □

Le O_n-module b_n (resp. b_n^*) est naturellement muni d'une forme symplectique, β_{b_n} (resp. $\beta_{\mathrm{b}_n^*}$) définie par

$$\beta_{\mathrm{b}_n}(p_{\mathrm{b}_n}(v), p_{\mathrm{b}_n}(w)) = p_{O_n}(\varpi^{-\lambda_\psi}\beta(v, w)),\ v, w \in B \tag{2.8}$$

$$\beta_{\mathrm{b}_n^*}(p_{\mathrm{b}_n^*}(v), p_{\mathrm{b}_n^*}(w)) = p_{O_n}(\varpi^{1-\lambda_\psi}\beta(v, w)),\ v, w \in B^*. \tag{2.9}$$

On désigne par $Sp(\mathrm{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathrm{b}_n^*)$) le groupe symplectique correspondant. Il est clair que, si $g \in K_B$, $\dot{g}_n \in Sp(\mathrm{b}_n)$ (resp. $\dot{g}_n^* \in Sp(\mathrm{b}_n^*)$) et que, pour tout entier $m > n$, le morphisme $r_{n,m}$ (resp. $r_{n,m}^*$) envoie $Sp(\mathrm{b}_m)$ dans $Sp(\mathrm{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathrm{b}_m^*)$ dans $Sp(\mathrm{b}_n^*)$). La famille des $Sp(\mathrm{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathrm{b}_n^*)$), munie des morphismes $r_{n,m}$ (resp. $r_{n,m}^*$) constitue un système projectif de groupes.

LEMME 2.7.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme de groupes $r_n : Sp(\mathrm{b}_{n+1}) \longrightarrow Sp(\mathrm{b}_n)$ (resp. $r_n^* : Sp(\mathrm{b}_{n+1}^*) \longrightarrow Sp(\mathrm{b}_n^*)$) est surjectif.*

DÉMONSTRATION. On montre la surjectivité de r_n, la démonstration de celle de r_n^* étant identique.

Supposons dans un premier temps que $n \geq 1$. Soit $g \in Sp(\mathrm{b}_n)$. D'après le Lemme 2.7.1, il existe $\tilde{g} \in GL_{O_{n+1}}(\mathrm{b}_{n+1})$ tel que $r_n(\tilde{g}) = g$. Il suffit de montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}_n/\mathcal{L}_{n+1}$ tel que $(Id+h)\tilde{g} \in Sp(\mathrm{b}_{n+1})$. Définissons l'application $\gamma : b_{n+1} \times b_{n+1} \longrightarrow O_{n+1}$ en posant $\gamma(v,w) = \beta_{\mathrm{b}_{n+1}}(\tilde{g}^{-1}v, \tilde{g}^{-1}w) - \beta_{\mathrm{b}_{n+1}}(v,w)$; c'est une application bilinéaire alternée sur b_{n+1} à valeurs dans l'idéal minimal $\varpi^{n+1}\mathcal{O}/\varpi^{n+2}\mathcal{O}$. Soit $h \in \mathcal{L}_n/\mathcal{L}_{n+1}$. Dire que $(Id+h)\tilde{g} \in Sp(\mathrm{b}_{n+1})$ revient à dire que l'on a

$$\beta_{\mathrm{b}_{n+1}}((Id+h)v, (Id+h)w) - \beta_{\mathrm{b}_{n+1}}(v,w) = \gamma(v,w),\ v,w \in \mathrm{b}_{n+1}. \tag{2.10}$$

Mais, h étant un élément de $\mathcal{L}_n/\mathcal{L}_{n+1}$, on a $hb_{n+1} \subset \varpi^{n+1}B^*/\varpi^{n+2}B^*$. Comme $n \geq 1$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\beta_{\mathrm{b}_{n+1}}(hb_{n+1}, hb_{n+1}) &\subset p_{O_{n+1}}(\varpi^{2(n+1)-\lambda_\psi}\beta(B^*, B^*)) \\ &\subset p_{O_{n+1}}(\varpi^{2n+1}\mathcal{O}) \subset p_{O_{n+1}}(\varpi^{n+2}\mathcal{O}) = \{0\}.\end{aligned}$$

La relation (2.10) s'écrit alors

$$\beta_{\mathrm{b}_{n+1}}(hv,w) + \beta_{\mathrm{b}_{n+1}}(v,hw) = \gamma(v,w),\ v,w \in \mathrm{b}_{n+1}.$$

Or, la forme $\beta_{\mathrm{b}_{n+1}}$ étant symplectique, il existe $h' \in End_{O_{n+1}}(\mathrm{b}_{n+1})$ tel que

$$\gamma(v,w) = \beta_{\mathrm{b}_{n+1}}(h'v,w) = \beta_{\mathrm{b}_{n+1}}(v,h'w),\ v,w \in \mathrm{b}_{n+1}.$$

Il suffira de prendre $h = h'/2$, dès que l'on aura montré que $h' \in \mathcal{L}_n/\mathcal{L}_{n+1}$. Or, on a $\gamma(v,w) \in \varpi^{n+1}\mathcal{O}/\varpi^{n+2}\mathcal{O}$, $v,w \in b_{n+1}$. On en déduit que, pour tout $w \in \varpi B/\varpi^{n+2}B^*$, $\beta_{\mathrm{b}_{n+1}}(h'\mathrm{b}_{n+1}, w) = \{0\}$. Autrement dit, $h'\mathrm{b}_{n+1} \subset (\varpi B/\varpi^{n+1}B^*)^\perp = \varpi^{n+1}B^*/\varpi^{n+2}B^*$, i.e. $h' \in \mathcal{L}_n/\mathcal{L}_{n+1}$ comme voulu.

Il reste à examiner le cas $n = 0$. Mais, il suit du Lemme 2.4.1 que l'application $g \mapsto \dot{g}_0$ est un morphisme surjectif de K_B sur $Sp(\mathrm{b}) = Sp(\mathrm{b}_0)$. Il suffit alors de remarquer que $\dot{g}_0 = r_0(\dot{g}_1)$, $g \in K_B$. D'où le lemme. □

PROPOSITION 2.7.1. *L'application $g \longrightarrow (\dot{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $g \longrightarrow (\dot{g}_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$) induit un isomorphisme de groupes topologiques de K_B sur $\varprojlim Sp(\mathrm{b}_n)$ (resp. $\varprojlim Sp(\mathrm{b}_n^*)$).*

Démonstration. On donne la démonstration pour l'application $g \longrightarrow (\dot{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, celle pour l'autre application étant identique. Pour tout entier naturel n, la matrice d'un élément de $\mathcal{L}_n$ dans une base quelconque du $\mathcal{O}$-module B est à coefficients dans $\varpi^n\mathcal{O}$. On en déduit que $\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{L}_n = \{0\}$ et que la famille $(Id+\mathcal{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de voisinages de l'élément neutre dans $GL_B(W)$. Il est alors immédiat que l'application $g \longrightarrow (\dot{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un morphisme injectif de groupes topologiques de K_B dans $\varprojlim Sp(\mathrm{b}_n)$. Comme K_B est compact, il nous suffit de montrer que ce morphisme est surjectif.

Soit donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim Sp(\mathrm{b}_n)$. Pour tout entier naturel n, soit $\tilde{g}_n \in GL_B(W)$ tel que $\dot{\tilde{g}}_n = g_n$. Par construction, on a $\tilde{g}_{n+1} - \tilde{g}_n \in \mathcal{L}_n$. Il s'ensuit que la suite $(\tilde{g}_n)$ converge dans $End_B(W)$ vers un élément g appartenant à $GL_B(W)$ et vérifiant $\dot{g}_n = g_n$, $n \in \mathbb{N}$. Il reste à voir que $g \in Sp(W)$. Soit $v, w \in B$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{O_n}(\varpi^{-\lambda_\psi}(\beta(gv, gw) - \beta(v, w))) = \beta_{\mathrm{b}_n}(\dot{g}_n p_{\mathrm{b}_n}(v), \dot{g}_n p_{\mathrm{b}_n}(w)) - \beta_{\mathrm{b}_n}(p_{\mathrm{b}_n}(v), p_{\mathrm{b}_n}(w)) = 0$. On en déduit que $\beta(gv, gw) - \beta(v, w) \in \cap_{n\in\mathbb{N}}\varpi^{-\lambda_\psi+n}\mathcal{O} = \{0\}$. D'où la proposition. □

3. La représentation de Weil.

Dans cette section, nous rappelons certains résultats sur la représentation de Weil et le groupe métaplectique. On peut consulter [**17**], [**10**, Chapitre 2], [**14**], [**3**], [**12**] et [**4**].

Dans la suite, les représentations induites que nous considérons sont des représentations induites unitaires à droite. Plus précisément, si G est un groupe localement compact, H un de ses sous-groupes fermés, tous deux unimodulaires, et ρ une représentation unitaire de H dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathrm{Ind}_H^G\,\rho$ désigne la représentation de G agissant par translations à droite dans l'espace des fonctions $\varphi : G \longrightarrow \mathcal{H}$ qui sont mesurables et vérifiant

$$\varphi(hg) = \rho(h)\varphi(g),\ g \in G,\ h \in H,$$

$$\int_{H\backslash G} \|\varphi(g)\|^2 \,\mathrm{d}\,\dot{g} < +\infty$$

où $\mathrm{d}\,\dot{g}$ désigne une mesure de Radon G-invariante sur $H\backslash G$.

3.1. Dans ce paragraphe, F désigne de nouveau soit un anneau local fini de caractéristique impaire, soit un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2 et ψ un caractère unitaire non trivial de F. Si F est un anneau local fini, on suppose que ψ est primitif, en ce sens que son noyau ne contient pas d'autre idéal que $\{0\}$.

Soit (W, β) un F-espace symplectique; si F est un corps, on note $2r$ la dimension de W sur F. Le groupe de Heisenberg associé est l'ensemble $H(W) = W \times F$, muni de la multiplication

$$(w, t)(w', t') = \left(w + w', t + t' + \frac{1}{2}\beta(w, w')\right), w, w' \in W,\ t, t' \in F.$$

Muni de la topologie produit, $H(W)$ est un groupe localement compact.

Le centre de $H(W)$ est $\{0\} \times F$ que l'on identifie à F, via l'application:

$$F \ni t \longmapsto (0,t) \in H(W).$$

On identifie également W à un sous-ensemble de $H(W)$ au moyen de l'application:

$$W \ni w \longmapsto (w,0) \in H(W).$$

Dans ces conditions, on a $w^{-1} = -w$, pour tout $w \in W$.

Par le théorème de Stone Von-Neumann (voir [**3**, 2] pour le cas où F n'est pas un corps), nous savons qu'il existe une unique (à équivalence près) représentation unitaire irréductible $(\rho_\psi, \mathcal{H})$ de $H(W)$ de caractère central ψ. On l'appelle la représentation de Schrödinger de caractère central ψ de $H(W)$. On la note $\rho_{W,\psi}$ lorsque l'on souhaite faire apparaître qu'il s'agit d'une représentation du groupe de Heisenberg construit sur W.

Nous rappelons comment construire de telles représentations, selon [**10**, Chapitre 2] et [**3**]. Soit $A \subset W$ un sous-groupe fermé. On pose

$$A^* = \{v \in W, \quad \psi(\beta(v,a)) = 1, \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Alors A^* est un sous-groupe fermé de W, appelé sous-groupe dual: lorsque F est un corps local et A est un réseau, on retrouve la notion de réseau dual (voir (2.2)). On dit que A est autodual si $A = A^*$. Lorsque F est un corps local, les sous-espaces lagrangiens et les réseaux autoduaux sont des exemples de sous-groupes autoduaux.

3.2. Lorsque F est un anneau local fini, tout sous-espace lagrangien est un sous-groupe autodual. On sait que si F est un corps, il existe des lagrangiens. Dans ce paragraphe, nous allons montrer qu'il en existe pour tout anneau local fini.

Soit F un anneau local fini et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Son annulateur $\mathfrak{s}$ est l'unique idéal non nul minimal de F. Fixons un élément non nul $s_0 \in \mathfrak{s}$. Alors l'application $a \longmapsto as_0$ passe au quotient en un isomorphisme de F-modules du corps résiduel $\overline{F} = F/\mathfrak{m}$ sur $\mathfrak{s}$. On désigne par μ un tel isomorphisme.

On rappelle que si (W,β) est un F-espace symplectique et si A est une partie de W, on note $A^\perp$ son orthogonal pour β.

LEMME 3.2.1. *Soit F un anneau local fini et (W,β) un F-espace symplectique. Soit $A \subset W$ un sous-module.*

(i) *On a $A^{\perp\perp} = A$.*
(ii) *On suppose que l'on a les inclusions $\mathfrak{m}A \subset A^\perp \subset A$. Alors, $A/A^\perp$ est naturellement muni d'une structure de $\overline{F}$-espace vectoriel, la restriction $\beta_{|A}$ de β à A prend ses valeurs dans $\mathfrak{s}$ et l'application $\mu^{-1} \circ \beta_{|A}$ passe au quotient à $A/A^\perp$ en une forme symplectique.*

DÉMONSTRATION. Soit $s_0 \in \mathfrak{s}$. Alors, il existe un caractère additif de F non trivial sur s_0 et un tel caractère est primitif. Le point (i) est alors conséquence de [**4**, Lemma 2.1].

Soit A un sous-module de W vérifiant les hypothèses du (ii). L'unique chose à vérifier est que $\beta_{|A}$ est à valeurs dans $\mathfrak{s}$. Or ceci résulte de ce que, compte tenu des hypothèses, $\mathfrak{m}\beta(A,A) = \beta(\mathfrak{m}A, A) \subset \beta(A^\perp, A) = \{0\}$. □

LEMME 3.2.2. *Soit F un anneau local fini et W un F-espace symplectique. Alors W admet des sous-espaces lagrangiens.*

DÉMONSTRATION. Soit $A \subset W$ un sous-F-module totalement isotrope et maximal. Il suffit de montrer que $A = A^\perp$. Or, il suit de [**4**, Lemma 10.1] que $\mathfrak{m}A^\perp \subset A$ (le résultat cité est énoncé sous l'hypothèse que A est isotrope, $Sp(W)$-invariant et maximal, mais il est clair que la démonstration reste valable si l'on y remplace $Sp(W)$ par n'importe lequel de ses sous-groupes). Comme $A^{\perp\perp} = A$, on voit alors que $A^\perp$ vérifie les hypothèses du (ii) du Lemme 3.2.1. Par suite, $\mu^{-1} \circ \beta_{|A^\perp}$ passe au quotient en une forme symplectique sur le $\overline{F}$-espace vectoriel $A^\perp/A$ et l'image réciproque dans $A^\perp$ d'un lagrangien de cet espace symplectique est un sous-groupe autodual de W contenant A. On a donc $A = A^\perp$. □

3.3. Dans ce paragraphe, F désigne de nouveau soit un anneau local fini de caractéristique impaire, soit un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2, ψ un caractère unitaire non trivial de F, primitif si F est un anneau local fini, et (W,β) un F-espace symplectique. Soit A un sous-groupe autodual de W. Alors, $A \times F$ est un sous-groupe fermé de $H(W)$ et la formule

$$\psi_A(w,t) = \psi(t),\ (w,t) \in A \times F,$$

définit un caractère de $A \times F$. On note alors $\rho_\psi^A = \operatorname{Ind}_{A\times F}^{H(W)} \psi_A$ la représentation induite du caractère ψ_A de $A \times F$ à $H(W)$. La représentation ρ_ψ^A se réalise dans l'espace $\mathcal{H}_\psi^A$ des fonctions $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient

$$\varphi(a+w) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(w,a)\right)\varphi(w),\ a \in A,\ w \in W,$$
$$\int_{W/A} |\varphi(w)|^2 \,\mathrm{d}\,\dot{w} < +\infty,$$

où $\mathrm{d}\,\dot{w}$ désigne une mesure de Haar sur le groupe additif W/A, par la formule

$$\rho_\psi^A(w,t)\varphi(w') = \psi\left(t + \frac{1}{2}\beta(w',w)\right)\varphi(w'+w),\ w, w' \in W,\ t \in F. \tag{3.1}$$

THÉORÈME 3.3.1. (i) *Soit A un sous-groupe autodual de W. Alors la représentation ρ_ψ^A est irréductible et appartient à la classe de ρ_ψ.*

(ii) *Soit A et B deux sous-groupes autoduaux de W et $\mathrm{d}\,\dot{b}$ une mesure de Haar sur le groupe additif quotient $B/A\cap B$. Pour $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^A$ continue à support compact modulo A, on pose*

$$\mathcal{I}_{B,A}\varphi(w) = \int_{B/A\cap B} \varphi(w+b)\psi\left(\frac{1}{2}\beta(b,w)\right)\mathrm{d}\,\dot{b},\ w \in W. \tag{3.2}$$

Alors l'intégrale (3.2) *converge pour tout* w*, la fonction* $\mathcal{I}_{B,A}\varphi$ *est un élément de* $\mathcal{H}_\psi^B$ *et* $\mathcal{I}_{B,A} : \mathcal{H}_\psi^A \longrightarrow \mathcal{H}_\psi^B$ *se prolonge de manière unique en un opérateur continu et bijectif, encore noté* $\mathcal{I}_{B,A}$*, entrelaçant les représentations* ρ_ψ^A *et* ρ_ψ^B*.*

Démonstration. (i) Supposons que F est un corps local. Désignons par $\mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$ le sous-espace de $\mathcal{H}_\psi^A$ constitué des vecteurs lisses, i.e. qui sont laissés invariants par un sous-groupe ouvert compact de $H(W)$. Alors, $\mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$ est un sous-espace invariant de $\mathcal{H}_\psi^A$ et l'application $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \cap \mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces fermés et invariants de $\mathcal{H}_\psi^A$ sur l'ensemble des sous-epaces invariants de $\mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$. Or, d'après [**10**, I.3] l'action de $H(W)$ dans $\mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$ est irréductible. D'où l'irréductibilité de ρ_ψ^A dans ce cas.

Lorsque F est un anneau local fini, on convient que $\mathcal{H}_\psi^{A,\infty} = \mathcal{H}_\psi^A$. D'autre part, dans ce cas, l'irréductibilité de ρ_ψ^A est démontrée dans [**3**, 2]. Enfin, il est clair dans tous les cas que ψ est le caractère central de ρ_ψ^A.

(ii) Il est clair que si $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^A$ est à support compact modulo A, l'intégrale (3.2) converge, $\mathcal{I}_{B,A}\varphi$ est un élément de $\mathcal{H}_\psi^B$ et $\rho_\psi^B(h) \circ \mathcal{I}_{B,A}\varphi = \mathcal{I}_{B,A} \circ \rho_\psi^A(h)\varphi$, $h \in H(W)$. Compte tenu de la définition des vecteurs lisses et du fait que d'après [**10**, I.4] les éléments de $\mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$ sont à support compact modulo A, on en déduit que $\mathcal{I}_{B,A}(\mathcal{H}_\psi^{A,\infty}) \subset \mathcal{H}_\psi^{B,\infty}$.

Maintenant, soit $L \subset W$ un sous-groupe compact ouvert tel que $\psi(\beta(v,w)/2) = 1$, $v, w \in L$. Lorsque F est un anneau local fini, on peut prendre pour L le sous-groupe trivial. Lorsque F est un corps local, il est immédiat qu'un tel sous-groupe existe. Dans tous les cas, on désigne par δ_L l'élément de $\mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$ à support dans $L + A$ et tel que $\delta_L(l) = 1$, $l \in L$. Alors on a

$$\mathcal{I}_{B,A}(\delta_L)(0) = \int_{B\cap(L+A)/A\cap B} \mathrm{d}\,\dot{b}$$

montrant que $\mathcal{I}_{B,A}(\delta_L)$ n'est pas nul. Les représentations ρ_ψ^A et ρ_ψ^B dans respectivement $\mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$ et $\mathcal{H}_\psi^{B,\infty}$ étant irréductibles, on en déduit que $\mathcal{I}_{B,A}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$ sur $\mathcal{H}_\psi^{B,\infty}$. En particulier, il existe un scalaire non nul λ tel que

$$\mathcal{I}_{A,B} \circ \mathcal{I}_{B,A}(\varphi) = \lambda\varphi,\ \varphi \in \mathcal{H}_\psi^{A,\infty}. \tag{3.3}$$

Le résultat cherché est alors clair dans le cas où F est un anneau local fini.

Lorsque F est un corps local, il nous reste à montrer que $\mathcal{I}_{B,A}$ se prolonge en un opérateur continu de $\mathcal{H}_\psi^A$ dans $\mathcal{H}_\psi^B$. Soit $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$ et $\theta \in \mathcal{H}_\psi^{B,\infty}$. Alors, $\overline{\varphi}\theta$ est une fonction localement constante et à support compact sur $W/A \cap B$. En effet, si K (resp. L) est une partie compacte de W telle que le support de φ (resp. θ) soit $K + A$ (resp. $L + B$), il est clair que $\overline{\varphi}\theta$ est nulle en dehors de l'ensemble $(L + A) \cap (L + B)/A \cap B$. Or, si $\dot{K}$ (resp. $\dot{L}$) désigne l'image de K (resp. L) par la projection naturelle de W sur W/A (resp. W/B) et si ι est l'application de $W/A \cap B$ dans $W/A \times W/B$ définie par $\iota(x + A \cap B) = (x + A, x + B)$, on a $(L + A) \cap (L + B)/A \cap B = \iota^{-1}(\dot{K} \times \dot{L})$. Par ailleurs, soit $\gamma : W/A \times W/B \to W/(A + B)$ le morphisme de groupes localement compacts tel que $\gamma(x+A, y+B) = x - y + A + B$. Alors, ι est un morphisme injectif de groupes localement compacts dont l'image est le sous-groupe fermé $\gamma^{-1}(0)$. Il est alors clair que $(K+A) \cap (L+B)/A \cap B$ est une partie compacte de $W/A \cap B$.

Maintenant, pour un choix adapté des mesures de Haar sur W/A, W/B, $A/A \cap B$ et $B/A \cap B$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{I}_{B,A}(\varphi), \theta \rangle &= \int_{W/B} \left(\int_{B/A\cap B} \theta(w)\overline{\varphi}(w+b)\psi\Big(-\frac{1}{2}\beta(b,w)\Big)\,\mathrm{d}\,\dot{b} \right) \mathrm{d}\,\dot{w} \\
&= \int_{W/B} \left(\int_{B/A\cap B} \theta(w+b)\overline{\varphi}(w+b)\,\mathrm{d}\,\dot{b} \right) \mathrm{d}\,\dot{w} \\
&= \int_{W/A\cap B} \theta(w)\overline{\varphi}(w)\,\mathrm{d}\,\dot{w} \\
&= \langle \varphi, \mathcal{I}_{A,B}(\theta) \rangle.
\end{aligned}$$

Mais alors, compte tenu de la relation (3.3), on obtient pour $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^{A,\infty}$

$$\lambda\langle \varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{I}_{A,B} \circ \mathcal{I}_{B,A}(\varphi) \rangle = \langle \mathcal{I}_{B,A}\varphi, \mathcal{I}_{B,A}\varphi \rangle$$

d'où le résultat. □

3.4. Supposons que F soit un corps. Soit X et Y deux lagrangiens de W tels que $W = X \oplus Y$. Alors, pour un bon choix de la mesure de Haar $\mathrm{d}\,x$ sur X, l'application $\varphi \longmapsto \varphi_{|X}$ est une isométrie de $\mathcal{H}_\psi^Y$ sur $L^2(X, \mathrm{d}\,x)$ permettant d'identifier ces deux espaces. La représentation ρ_ψ^Y réalisée dans $L^2(X, \mathrm{d}\,x)$ est alors donnée par les formules suivantes:

$$\rho_\psi^Y(x,0)\varphi(x') = \varphi(x'+x),\ x, x' \in X \tag{3.4}$$

$$\rho_\psi^Y(y,0)\varphi(x') = \psi(\beta(x',y))\varphi(x'),\ y \in Y,\ x' \in X. \tag{3.5}$$

Lorsque F est un corps local et A est un lagrangien (resp. un réseau) de W, on dit que ρ_ψ^A est un modèle de Schrödinger (resp. latticiel) de la représentation ρ_ψ.

3.5. Comme dans le Paragraphe 3.3 dont on reprend les notations, F désigne soit un anneau local fini de caractéristique impaire, soit un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2. Le groupe symplectique $Sp(W)$ opère par automorphismes dans $H(W)$ par la formule

$$x.(w,t) = (xw, t),\ \text{ pour tout } w \in W,\ t \in F.$$

Cette action fixe F point par point.

Soit $(\rho_\psi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire irréductible de $H(W)$ de caractère central ψ et désignons par $U(\mathcal{H})$ le groupe des transformations unitaires de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\widehat{Sp(W)}_\psi$ le sous-groupe topologique de $Sp(W) \times U(\mathcal{H})$ formé des couples

$(g, M(g))$ vérifiant:

$$M(g)\rho_\psi(h)M(g)^{-1} = \rho_\psi(g.h),\ h \in H(W). \tag{3.6}$$

On voit que si $(g, M(g)) \in \widehat{Sp(W)}_\psi$ alors $(g, zM(g)) \in \widehat{Sp(W)}_\psi$ pour tout $z \in \mathbb{U}$, le groupe des nombres complexes de module 1. Il suit du théorème de Stone Von-Neumann que $\widehat{Sp(W)}_\psi$ est une extension centrale de $Sp(W)$ par les opérateurs scalaires de norme 1; on a une suite exacte courte:

$$1 \longrightarrow \mathbb{U} \xrightarrow{\alpha_1} \widehat{Sp(W)}_\psi \xrightarrow{\alpha_2} Sp(W) \longrightarrow 1, \tag{3.7}$$

où $\alpha_1 : z \longmapsto (1, z\mathrm{Id})$ et $\alpha_2 : (g, M(g)) \longmapsto g$. La représentation métaplectique S_ψ de $\widehat{Sp(W)}_\psi$ agissant dans $\mathcal{H}$ est donnée par

$$S_\psi(g, M(g)) = M(g). \tag{3.8}$$

On la note $S_{W,\psi}$ si l'on souhaite faire apparaître qu'il s'agit de la représentation métaplectique associée au groupe symplectique $Sp(W)$.

En fait, on peut se restreindre à un revêtement d'ordre au plus 2 de $Sp(W)$ grâce au résultat suivant:

Théorème 3.5.1. (i) *Si F est un anneau local fini, il existe un morphisme de groupes de $Sp(W)$ dans $\widehat{Sp(W)}_\psi$ qui scinde la suite exacte* (3.7). *Lorsque F est le corps fini $\mathbb{F}_q$, à l'exception du cas où $q = 3$ et $\dim W = 2$, cet homomorphisme est unique.*

(ii) *Si F est un corps local non archimédien et W est non nul, la suite exacte* (3.7) *ne se scinde pas, mais il existe un unique sous-groupe $Mp(W)_\psi$ de $\widehat{Sp(W)}_\psi$ tel que la restriction de α_2 à ce sous-groupe soit surjective et ait un noyau d'ordre* 2. *Ce sous-groupe est fermé et la restriction α_2 à $Mp(W)_\psi$ en fait un revêtement d'ordre 2 de $Sp(W)$.*

Voir [**15**] et [**3**] pour le point (i) et [**17**] pour le point (ii).

Lorsque F est un corps local non archimédien, on sait qu'à isomorphisme canonique près, il n'existe qu'un revêtement d'ordre 2 de $Sp(W)$, non trivial. Ce revêtement s'identifie donc de manière canonique au sous-groupe $Mp(W)_\psi$ de $\widehat{Sp(W)}_\psi$: désormais on le note $Mp(W)$ et on l'appelle le groupe métaplectique de l'espace symplectique W ou le revêtement métaplectique du groupe $Sp(W)$. Dans la suite, on appelle représentation de Weil de type ψ et on note S_ψ ou $S_{W,\psi}$ si l'on tient à préciser, la restriction de la représentation S_ψ à $Mp(W)$.

Si A est un sous-groupe autodual de W, on note $\widehat{Sp(W)}_\psi^A$, $Mp(W)_\psi^A$ et S_ψ^A ou $S_{W,\psi}^A$ les objets précédents construits en utilisant la réalisation ρ_ψ^A dans l'espace $\mathcal{H}_\psi^A$ de la représentation ρ_ψ. On parle alors de modèle de Schrödinger ou de modèle latticiel de la représentation de Weil, suivant que A est un lagrangien ou bien un réseau.

Lorsque F est un anneau local fini, on appelle représentation de Weil de type ψ

et on note S_ψ ou $S_{W,\psi}$, la représentation composée de S_ψ avec un homomorphisme de $Sp(W)$ dans $\widehat{Sp(W)}_\psi$ scindant la suite exacte (3.7). Étant donnée une représentation de Weil, toutes les autres s'écrivent comme produit de celle-ci par un caractère unitaire de $Sp(W)$. Si A est un sous-groupe autodual de W, on désignera par S_ψ^A ou $S_{W,\psi}^A$ une représentation de Weil construite en utilisant la réalisation ρ_ψ^A dans l'espace $\mathcal{H}_\psi^A$ de la représentation ρ_ψ.

Plus généralement, F étant toujours un anneau local fini, si G est un groupe fini et si $\gamma : G \longrightarrow Sp(W)$ est un morphisme de groupes, on appelle représentation de Weil de type ψ de G relative au morphisme γ, toute représentation S de G dans l'espace de la représentation ρ_ψ vérifiant la relation

$$S(g)\rho_\psi(h)S(g)^{-1} = \rho_\psi(\gamma(g).h),\ g \in G,\ h \in H(W).$$

Ici encore, étant donnée une représentation de Weil, toutes les autres s'écrivent comme produit de celle-ci par un caractère unitaire de G.

3.6. Si $F = \mathbb{F}_q$, $Sp(W)$ admet une unique représentation de Weil, sauf dans le cas $q = 3$ et $\dim W = 2$ (à l'exception de ce cas, le groupe $Sp(W)$ est parfait). Cela dit, il existe dans tous les cas un choix canonique, que nous décrivons dans ce paragraphe: dans la suite, on convient que la représentation de Weil S_ψ est celle correspondant à ce choix.

Nous supposons donc que F est un corps fini et nous gardons les notations du paragraphe précédent. On rappelle que si η est un caractère additif non trivial de F, l'indice de Weil relatif à η est l'application $\omega_\eta : F^\times \longrightarrow \mathbb{U}$ définie par

$$\omega_\eta(a) = [F]^{-1/2} \sum_{t \in F} \eta(at^2). \tag{3.9}$$

Si $a \in F^\times$, on désigne par $a\eta$ le caractère additif $t \mapsto \eta(at)$ de F. On pose alors

$$\omega = \omega_{\psi/2}. \tag{3.10}$$

Soit X un sous-espace lagrangien de W et soit $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ une base symplectique de W telle que $(e_1, \dots, e_r)$ soit une base de X.

Si $g \in Sp(W)$, on pose

$$j(g) = r - \dim X \cap gX. \tag{3.11}$$

Pour $0 \leq j \leq r$, soit

$$\Omega_j = \{g \in Sp(W) | j(g) = j\}.$$

Alors, Ω_0 n'est autre que P, le sous-groupe parabolique de $Sp(W)$ stabilisateur de X, chaque Ω_j est une double classe sous P et $Sp(W)$ est la réunion disjointe des Ω_j, $0 \leq j \leq r$. Pour $S \subset \{1, \dots, r\}$, on désigne par τ_S l'élément de $Sp(W)$ tel que

$$\tau_S.e_i = \begin{cases} f_i & \text{si } i \in S \\ e_i & \text{si } i \notin S, \end{cases} \qquad \tau_S.f_i = \begin{cases} -e_i & \text{si } i \in S \\ f_i & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Alors, si $\operatorname{card} S = j$, on a: $\Omega_j = P\tau_S P$.

D'après [**14**, Lemma 5.1], il existe une application $\theta : Sp(W) \longrightarrow F^\times/(F^\times)^2$ telle que

- $\theta(p_1 g p_2) = \theta(p_1)\theta(g)\theta(p_2)$, $p_1, p_2 \in P$, $g \in Sp(W)$;
- $\theta(\tau_S) = 1$, $S \subset \{1, \dots, r\}$;
- $\theta(p) = \det_X(p) \mod (F^\times)^2$, $p \in P$.

Si $g \in Sp(W)$, on pose

$$m(g) = \omega(\theta(g))^{-1}\omega(1)^{1-j(g)}, \tag{3.12}$$

où ω est l'indice de Weil relatif au caractère $\psi/2$ (voir les formules (3.9) et (3.10)).

Soit μ_X la mesure de Haar sur X de masse totale 1. Si $g \in Sp(W)$, on pose

$$S_\psi^X(g) = m(g) q^{j(g)/2} M_X(g), \tag{3.13}$$

où $M_X(g)$ est l'opérateur de l'espace $\mathcal{H}_\psi^X$ défini par

$$M_X(g)\varphi(w) = \int_X \psi\Big(\frac{1}{2}\beta(x, w)\Big)\varphi(g^{-1}(w + x))\, d\,\mu_X(x),\ \varphi \in \mathcal{H}_\psi^X,\ w \in W. \tag{3.14}$$

Le résultat suivant est alors conséquence de [**12**, 4.2, Lemma]:

LEMME 3.6.1. *L'application*

$$g \longmapsto \big(g, S_\psi^X(g)\big)$$

est un homomorphisme de groupes de $Sp(W)$ dans $\widehat{Sp(W)}_\psi^X$ scindant la suite exacte (3.7).

3.7. Dans ce paragraphe, on suppose que F est un anneau local fini et on se donne un sous-groupe G de $Sp(W)$. Nous rappelons un certain nombre des résultats de [**3**] et [**4**] concernant la décomposition des représentations de Weil sur F.

On désigne par $\mathcal{F}(W)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes sur W. On munit $\mathcal{F}(W)$ de la structure de $Sp(W)$-module définie par $g.\varphi(w) = \varphi(g^{-1}w)$, $w \in W$.

Soit $(\rho_\psi, \mathcal{H})$ une représentation de Schrödinger de $H(W)$ et soit S une représentation de Weil de type ψ de $Sp(W)$. La représentation S induit une structure de $Sp(W)$-module dans $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ définie par $g.A = S(g)AS(g^{-1})$. On a alors le résultat suivant (voir [**3**, Theorem 4.5]):

THÉORÈME 3.7.1. *L'application $\varphi \mapsto \sum_{w\in W} \varphi(w)\rho_\psi(w, 0)$ de $\mathcal{F}(W)$ dans $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ est un isomorphisme de $Sp(W)$-modules.*

On munit le sous-groupe G de $Sp(W)$ de la mesure de Haar normalisée. Le théorème précédent a pour conséquence le résultat suivant (voir [**3**, Corollary 4.6]):

COROLLAIRE 3.7.1. *Le carré de la norme, comme élément de $L^2(G)$, du caractère de la restriction à G d'une représentation de Weil de $Sp(W)$ est égal au nombre d'orbites du groupe G dans W.*

Les résultats présentés dans la suite sont ceux de [**4**, Paragraphe 4]. Soit $U \subset W$ un sous-module isotrope, non nul et $Sp(W)$-invariant. Alors, $\overline{U^\perp} = U^\perp/U$ est un F-espace symplectique pour la forme symplectique $\overline{\beta}$ définie par $\overline{\beta}(v+U, w+U) = \beta(v, w)$. On pose $H(U^\perp) = U^\perp \times F$: c'est un sous-groupe du groupe de Heisenberg $H(W)$ et l'application $p_U : (v,t) \mapsto (v+U, t)$ est un morphisme surjectif de $H(U^\perp)$ sur $H(\overline{U^\perp})$. De plus l'action du groupe $Sp(W)$ dans $U^\perp$ passe au quotient en une action dans $\overline{U^\perp}$ par automorphismes symplectiques, fournissant ainsi un morphisme de groupes $r_U : Sp(W) \longrightarrow Sp(\overline{U^\perp})$. Soit $\rho_{U^\perp,\psi}$ l'inflation de la représentation de Schrödinger de $H(\overline{U^\perp})$ via p_U à $H(U^\perp)$ et soit σ une représentation de Weil de type ψ de $Sp(W)$ relative à r_U, que l'on réalise dans le même espace $\mathcal{H}_\sigma$: σ est le produit tensoriel de l'inflation d'une représentation de Weil de $Sp(\overline{U^\perp})$ via r_U à $Sp(W)$ par un caractère de $Sp(W)$. Comme nous l'avons vu, le groupe $Sp(W)$ agit par automorphismes dans le groupe $H(W)$ et il laisse stable le sous-groupe $H(U^\perp)$. Nous pouvons donc considérer le groupe produit semi-direct $Sp(W) \ltimes H(W)$ et son sous-groupe $Sp(W) \ltimes H(U^\perp)$. On définit alors la représentation $\sigma\rho_{U^\perp,\psi}$ de $Sp(W) \ltimes H(U^\perp)$ dans l'espace $\mathcal{H}_\sigma$ en posant $\sigma\rho_{U^\perp,\psi}(gh) = \sigma(g)\rho_{U^\perp,\psi}(h)$, $g \in Sp(W)$ et $h \in H(U^\perp)$. Soit $R^{U,\sigma}$ la représentation de $Sp(W) \ltimes H(W)$ définie par

$$R^{U,\sigma} = \mathrm{Ind}_{Sp(W)\ltimes H(U^\perp)}^{Sp(W)\ltimes H(W)} \sigma\rho_{U^\perp,\psi}.$$

On note $S^{U,\sigma}$ la restriction de la représentation $R^{U,\sigma}$ à $Sp(W)$. Si χ est un caractère de $Sp(W)$, on a $S^{U,\chi\otimes\sigma} = \chi \otimes S^{U,\sigma}$.

On vérifie que l'espace de la représentation $R^{U,\sigma}$ s'identifie, via l'application de restriction au sous-ensemble W du sous-groupe $H(W)$ du produit semi-direct $Sp(W) \ltimes H(W)$, à l'espace $\mathcal{H}^U$ des fonctions φ définies sur W, à valeurs dans $\mathcal{H}_\sigma$, qui vérifient la relation

$$\varphi(x+u) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(x,u)\right)\rho_{U^\perp,\psi}(u)\varphi(x),\ x \in W,\ u \in U^\perp. \tag{3.15}$$

Si $x \in W$, on note $\hat{x}$ (resp. $\dot{x}$) sa classe dans le module quotient $W/U^\perp$ (resp. W/U). Le groupe $Sp(W)$ agit naturellement dans $W/U^\perp$ et si $x \in W$, on désigne par $G(\hat{x})$ le stabilisateur de $\hat{x} = x + U^\perp$ dans G. Rappelons que l'on identifie x à l'élément $(x, 0)$ du groupe de Heisenberg $H(W)$. Alors $xG(\hat{x})x^{-1}$ est un sous-groupe de $G \ltimes H(U^\perp)$. Plus précisément, si $g \in G(\hat{x})$, on a

$$xgx^{-1} = g\left(g^{-1}x - x, \frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x)\right).$$

On définit une représentation, que nous noterons $\sigma_{G,\dot{x}}$, de $G(\hat{x})$ dans $\mathcal{H}_\sigma$ en posant pour $g \in G(\hat{x})$,

$$\begin{aligned}\sigma_{G,\dot{x}}(g) &= \sigma\rho_{U^\perp,\psi}(xgx^{-1})\\ &= \sigma(g)\rho_{U^\perp,\psi}\left(g^{-1}x - x, \frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x)\right)\end{aligned}$$

(on vérifie que la représentation $\sigma_{G,\dot{x}}$ ne dépend que de la classe $\dot{x}$ de x dans W/U) et on considère la représentation $S_{G,\dot{x}}$ de G définie par

$$S_{G,\dot{x}} = \mathrm{Ind}_{G(\hat{x})}^{G}\, \sigma_{G,\dot{x}}.$$

On désigne par $\mathcal{H}_{G,\dot{x}}$ l'espace de la représentation $S_{G,\dot{x}}$. Il est constitué des fonctions $\varphi : G \mapsto \mathcal{H}_\sigma$ qui vérifient

$$\varphi(hg) = \sigma_{G,\dot{x}}(h)\varphi(g),\ g \in G,\ h \in G(\hat{x}).$$

Si $\varphi \in \mathcal{H}_{G,\dot{x}}$, $\mathcal{I}_{G,\dot{x}}\varphi$ désigne la fonction élément de $\mathcal{H}^U$ à support dans l'orbite de x modulo $U^\perp$ sous l'action de G telle que

$$\mathcal{I}_{G,\dot{x}}\varphi(g.x) = \sigma(g)\varphi(g^{-1}),\ g \in G.$$

Si $x = 0$, on a $S_{G,0} = \sigma_{|G}$. Lorsque $G = Sp(W)$, on note simplement $\sigma_{\dot{x}}$ (resp. $S_{\dot{x}}$) au lieu de $\sigma_{G,\dot{x}}$ (resp. $S_{G,\dot{x}}$).

Si $\mathcal{H}$ est l'espace d'une représentation π de $Sp(W)$, on désigne par $\mathcal{H}^\pm$ le sous-espace propre de $-Id$ dans $\mathcal{H}$ pour la valeur propre ± 1. Comme $\{\pm Id\}$ est un sous-groupe central de $Sp(W)$, le sous-espace $\mathcal{H}^\pm$ est invariant sous la représentation π et on désigne par $\pi^\pm$ la représentation de $Sp(W)$ dans ce sous-espace qui en résulte, lorsque celui-ci est non nul. On a clairement $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ et donc $\pi = \pi^\pm$ ou $\pi = \pi^+ \oplus \pi^-$, suivant que l'un des espaces $\mathcal{H}^\pm$ est nul ou non.

Dans ce qui suit, on suppose que $G = Sp(W)$. Soit $x \in W$. Si $x \in U^\perp$, on a $G(\hat{x}) = Sp(W)$ et deux cas se présentent alors: si $\overline{U^\perp} = \{0\}$, $S_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{x}}$ est de dimension 1 et irréductible; dans le cas contraire, $S_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{x}}$ est somme directe des sous-représentations $S_{\dot{x}}^\pm$. Par contre, si $x \notin U^\perp$, $-Id$ n'est pas un élément de $G(\hat{x})$ et la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ s'étend au sous-groupe $\widetilde{G(\hat{x})} = \{\pm Id\}G(\hat{x})$ de $Sp(W)$ en la représentation $\sigma_{\dot{x}}^\pm$ en décidant que $\sigma_{\dot{x}}^\pm(-Id) = \pm Id$. Alors, on a

$$S_{\dot{x}}^\pm = \mathrm{Ind}_{\widetilde{G(\hat{x})}}^{Sp(W)}\, \sigma_{\dot{x}}^\pm$$

et donc

$$S_{\dot{x}} = S_{\dot{x}}^+ \oplus S_{\dot{x}}^-.$$

Lemme 3.7.1. (i) *La restriction à $H(W)$ de la représentation $R^{U,\sigma}$ est* *équivalente à la représentation de Schrödinger ρ_ψ.*

(ii) *La représentation $S^{U,\sigma}$ est une représentation de Weil de type ψ de $Sp(W)$ et toute représentation de Weil de type ψ de $Sp(W)$ est obtenue ainsi.*

(iii) *Soit G un sous-groupe de $Sp(W)$. Si $x \in W$, le sous-espace $\mathcal{H}^U_{G,\hat{x}}$ de $\mathcal{H}^U$ constitué des fonctions à support dans l'orbite de x modulo $U^\perp$ sous l'action de G est $(S^{U,\sigma})_{|G}$-invariant. De plus, l'application $\mathcal{I}_{G,\dot{x}}$ est un isomorphisme de G-modules de l'espace $\mathcal{H}_{G,\dot{x}}$ de la représentation $S_{G,\dot{x}}$ sur $\mathcal{H}^U_{G,\hat{x}}$. Ainsi, la représentation de G induite par $S^{U,\sigma}$ dans $\mathcal{H}^U_{G,\hat{x}}$ est équivalente à la représentation $S_{G,\dot{x}}$.*

(iv) *Si $X \subset W$ est un ensemble de représentants des G-orbites dans $W/U^\perp\backslash\{0\}$, on a:*

$$(S^{U,\sigma})_{|G} = \sigma_{|G} \oplus \left(\bigoplus_{x\in X} S_{G,\dot{x}}\right). \tag{3.16}$$

(v) *Si $X \subset W$ est un ensemble de représentants des $Sp(W)$-orbites dans $W/U^\perp\backslash\{0\}$, on a:*

$$S^{U,\sigma} = \begin{cases} \sigma \oplus \left(\bigoplus_{x\in X} S^+_{\dot{x}} \oplus S^-_{\dot{x}}\right) & \text{si } \overline{U^\perp} = \{0\} \\ (\sigma^+ \oplus \sigma^-) \oplus \left(\bigoplus_{x\in X} S^+_{\dot{x}} \oplus S^-_{\dot{x}}\right) & \text{si } \overline{U^\perp} \neq \{0\}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Démonstration. Lorsque $G = Sp(W)$, les assertions du lemme sont celles de [**4**, Theorem 4.1 et Proposition 4.2]; on vérifie que la démonstration qui en est donnée s'applique également dans le cas où G est un sous-groupe quelconque de $Sp(W)$. □

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on suppose que l'anneau local fini F n'est pas un corps. Soit $U \subset W$ un sous-module isotrope, $Sp(W)$-invariant et maximal pour cette propriété. Rappelons que $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de F, $\mathfrak{s}$ son idéal minimal et $\overline{F}$ le corps résiduel de F. D'après [**4**, Lemma 10.1], on a $\mathfrak{m}U^\perp \subset U$. Alors, il suit du Lemme 3.2.1 que $\overline{U^\perp}$ est naturellement muni d'une structure de $\overline{F}$-espace vectoriel, que la forme symplectique $\overline{\beta}$ prend ses valeurs dans $\mathfrak{s}$ et que, si μ est un isomorphisme de F-module de $\overline{F} = F/\mathfrak{m}$ sur $\mathfrak{s}$, l'application $\mu^{-1} \circ \overline{\beta}$ en fait un $\overline{F}$-espace vectoriel symplectique. De plus, les groupes symplectiques pour $\overline{\beta}$ et $\mu^{-1} \circ \overline{\beta}$ sont identiques et notés $Sp(\overline{U^\perp})$.

Désignons par $H_F(\overline{U^\perp})$ (resp. $H_{\overline{F}}(\overline{U^\perp})$) le groupe de Heisenberg construit sur $\overline{U^\perp}$ considéré comme un F-module (resp. $\overline{F}$-espace vectoriel) symplectique. Alors l'isomorphisme μ induit un plongement

$$\begin{aligned} \mu_* : H_{\overline{F}}(\overline{U^\perp}) &\longrightarrow H_F(\overline{U^\perp}) \\ (u,t) &\longmapsto (u,\mu(t)). \end{aligned}$$

L'application μ_* commute avec l'action de $Sp(\overline{U^\perp})$ par automorphismes dans les deux groupes de Heisenberg.

La composée de la représentation de Schrödinger de $H_F(\overline{U^\perp})$ de caractère central

ψ avec le morphisme μ_* est clairement la représentation de Schrödinger de $H_{\overline{F}}(\overline{U^\perp})$ de caractère central $\psi\circ\mu$: comme ψ est un caractère primitif, $\psi\circ\mu$ est un caractère non trivial de $\overline{F}$. Il est alors immédiat qu'une représentation de Weil de type ψ de $Sp(\overline{U^\perp})$ est également une représentation de Weil de type $\psi\circ\mu$ et réciproquement.

Il suit de ces considérations que les représentations de Weil pour $Sp(W)$ peuvent être construites à partir des représentations de Weil pour un groupe symplectique sur le corps résiduel de F, de même que les composantes d'une telle représentation qui apparaissent dans le Lemme 3.7.1.

3.8. Dans ce paragraphe et le suivant, on suppose que F est un corps local k de caractéristique résiduelle différente de 2 et que (W,β) est un k-espace symplectique.

On se donne n un entier naturel ainsi que $B\subset W$ un bon réseau, et on reprend les notations du Paragraphe 2.7. Nous allons appliquer les résultats du paragraphe précédent pour déterminer la décomposition en irréductibles des représentations de Weil des groupes $Sp(\mathrm{b}_n)$ et $Sp(\mathrm{b}_n^*)$.

Rappelons que b_n et b_n^* sont des modules sur $O_n=\mathcal{O}/\varpi^{n+1}\mathcal{O}$. L'annulateur dans O_n de b_n (resp. b_n^*) est trivial si et seulement si $\varpi B^*\subsetneq B$ (resp. $B\subsetneq B^*$), tandis que $\mathrm{b}_n=\mathrm{b}_{n-1}^*$ (resp. $\mathrm{b}_n^*=\mathrm{b}_{n-1}$) dans le cas contraire. Nous pouvons donc nous placer dans la situation suivante: ψ est un caractère primitif de O_n et on considère les représentations de Weil de type ψ pour $Sp(\mathrm{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathrm{b}_n^*)$) lorsque $\varpi B^*\subsetneq B$ (resp. $B\subsetneq B^*$).

Lemme 3.8.1. (i) *L'espace symplectique* b_n *admet un unique sous-module isotrope invariant sous l'action de* $Sp(\mathrm{b}_n)$ *et maximal, noté* u. *On a*

$$\mathrm{u}=\varpi^{m+1}B^*/\varpi^{n+1}B^*,\ \mathrm{u}^\perp=\varpi^m B/\varpi^{n+1}B^*\quad \textit{et}\ \overline{\mathrm{u}^\perp}=\mathrm{b},\quad \textit{si}\ n=2m,$$

$$\mathrm{u}=\varpi^{m+1}B/\varpi^{n+1}B^*,\quad \mathrm{u}^\perp=\varpi^{m+1}B^*/\varpi^{n+1}B^*\ \textit{et}\ \overline{\mathrm{u}^\perp}=\mathrm{b}^*,\ \textit{si}\ n=2m+1.$$

(ii) *L'espace symplectique* b_n^* *admet un unique sous-module isotrope invariant sous l'action de* $Sp(\mathrm{b}_n^*)$ *et maximal, noté* u^*. *On a*

$$\mathrm{u}^*=\varpi^m B/\varpi^n B,\qquad \mathrm{u}^{*\perp}=\varpi^m B^*/\varpi^n B\ \textit{et}\ \overline{\mathrm{u}^{*\perp}}=\mathrm{b}^*,\ \textit{si}\ n=2m,$$

$$\mathrm{u}^*=\varpi^{m+1}B^*/\varpi^n B,\ \mathrm{u}^{*\perp}=\varpi^m B/\varpi^n B\quad \textit{et}\ \overline{\mathrm{u}^{*\perp}}=\mathrm{b},\quad \textit{si}\ n=2m+1.$$

Démonstration. Comme le morphisme naturel de K_B dans les groupes symplectiques $Sp(\mathrm{b}_n)$ et $Sp(\mathrm{b}_n^*)$ est surjectif et comme les seuls réseaux de W qui sont K_B-invariants sont ceux proportionnels à B ou B^*, on voit que les sous-modules de b_n ou b_n^* invariants par le groupe symplectique sont image de $\varpi^s B$ ou $\varpi^s B^*$, $s\geq 0$ par la projection naturelle de B (resp. B^*) sur b_n ou b_n^*. On en déduit facilement le lemme. □

Théorème 3.8.1. *Soit* $n\in\mathbb{N}$ *et* ψ *un caractère primitif de* O_n. *On reprend les notations du Lemme* 3.8.1.

(i) *Soit* S *une représentation de Weil de type* ψ *de* $Sp(\mathrm{b}_n)$. *Alors, il existe une unique représentation de Weil,* σ, *de type* ψ *de* $Sp(\mathrm{b}_n)$ *relative au morphisme naturel de* $Sp(\mathrm{b}_n)$ *dans* $Sp(\mathrm{b})$ (*resp.* $Sp(\mathrm{b}^*)$) *si* n *est pair* (*resp. impair*) *telle que* $S=S^{\mathrm{u},\sigma}$.

Dans tous les cas, les représentations apparaissant dans la formule (3.17) *du Lemme* 3.7.1 *sont irréductibles et deux à deux inéquivalentes. Lorsque* $B \subsetneq B^*$, *il y en a* $2n+2$; *lorsque* $B = B^*$, *il y en a* $n+2$. *Elles sont monomiales si* $B = B^*$ *et* n *est impair.*

(ii) *Soit* S *une représentation de Weil de type* ψ *de* $Sp(\mathrm{b}_n^*)$. *Alors, il existe une unique représentation de Weil,* σ, *de type* ψ *de* $Sp(\mathrm{b}_n^*)$ *relative au morphisme naturel de* $Sp(\mathrm{b}_n^*)$ *dans* $Sp(\mathrm{b}^*)$ (*resp.* $Sp(\mathrm{b})$) *si* n *est pair* (*resp. impair*) *telle que* $S = S^{\mathrm{u}^*,\sigma}$. *Dans tous les cas, les représentations apparaissant dans la formule* (3.17) *du Lemme* 3.7.1 *sont irréductibles et deux à deux inéquivalentes. Lorsque* $\varpi B^* \subsetneq B$, *il y en a* $2n+2$; *lorsque* $\varpi B^* = B$, *il y en a* $n+2$. *Elles sont monomiales si* $\varpi B^* = B$ *et* n *est impair.*

Démonstration. Nous faisons la démonstration dans le cas (i), la démonstration dans l'autre cas étant similaire. La première assertion est claire, compte tenu des résultats du paragraphe précédent et de ceux du Lemme 3.8.1. Soit c (resp. d) le nombre de $Sp(\mathrm{b}_n)$-orbites dans b_n (resp. $\mathrm{b}_n/\mathrm{u}^\perp$). Compte tenu du Corollaire 3.7.1 et du Lemme 3.7.1, il suffit de montrer que $c = 2d$, si $B \subsetneq B^*$ ou n est pair, et $c = 2d-1$ dans le cas contraire. Cependant, comme le morphisme naturel de K_B dans $Sp(\mathrm{b}_n)$ est surjectif, on voit que $c-1$ est le nombre des K_B-orbites dans $B\backslash\varpi^{n+1}B^*$, tandis que $d-1$ est celui des K_B-orbites dans $B\backslash\varpi^m B$ (resp. $B\backslash\varpi^{m+1}B^*$), si $n = 2m$ (resp. $n = 2m+1$). Or, d'après le Lemme 2.6.1, l'ensemble des K_B-orbites dans $B\backslash\varpi^m B$ est $\{\varpi^t B\backslash\varpi^{t+1}B^* | 0 \leq t \leq m-1\} \sqcup \{\varpi^t B^*\backslash\varpi^t B | 1 \leq t \leq m\}$, de cardinal $2m$ (resp. $\{\varpi^t B\backslash\varpi^{t+1}B | 0 \leq t \leq m-1\}$, de cardinal m) si $B \subsetneq B^*$ (resp. $B = B^*$). Pour la même raison, l'ensemble des K_B-orbites dans $B\backslash\varpi^{m+1}B^*$ est $\{\varpi^t B\backslash\varpi^{t+1}B^* | 0 \leq t \leq m\} \sqcup \{\varpi^t B^*\backslash\varpi^t B | 1 \leq t \leq m\}$, de cardinal $2m+1$ (resp. $\{\varpi^t B\backslash\varpi^{t+1}B | 0 \leq t \leq m\}$, de cardinal $m+1$) si $B \subsetneq B^*$ (resp. $B = B^*$). Le théorème en découle. □

Remarque. Dans [**4**] G. Cliff, D. McNeilly et F. Szechtman établissent que la formule (3.17) du Lemme 3.7.1 donne la décomposition en irréductibles de la représentation de Weil de $Sp(W)$ considérée, lorsque R est un anneau local fini et principal et W est un R-module libre. Notre théorème en est une conséquence, uniquement lorsque $B = B^*$ ou $B = \varpi B^*$.

Par ailleurs, dans [**6**] Dutta et Prasad démontrent que les représentations de Weil du groupe symplectique d'un module symplectique de type fini sur un anneau local fini et principal se décompose en irréductibles avec multiplicité 1 et donnent une description de ces derniers en terme de la combinatoire des orbites du groupe symplectique dans le module symplectique. Cependant, leur description ne fait pas apparaître explicitement ces irréductibles comme modules induits.

3.9. Soit $X \subset W$ un sous-espace lagrangien, P_X le sous-groupe parabolique de $Sp(W)$ stabilisateur de X, N_X son radical unipotent et $Y \subset W$ un lagrangien supplémentaire de X.

Un élément g de $Sp(W)$ s'identifie à une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ dans laquelle $a \in End(X)$, $b \in Hom(Y,X)$, $c \in Hom(X,Y)$ et $d \in End(Y)$. Remarquons que la forme symplectique β induit une dualité entre X et Y, permettant d'identifier de manière naturelle Y avec l'espace dual de X: on a donc une notion d'opérateur symétrique $b : Y \longrightarrow X$. Le sous-groupe N_X est alors le sous-groupe des matrices de la forme $x(b) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec $b \in Hom(Y, X)$ symétrique.

Il résulte de [**5**, Chapitre II, 11, Lemme] que la restriction du revêtement métaplectique à N_X admet un scindage unique. On peut donc considérer le groupe N_X comme un sous-groupe du groupe métaplectique $Mp(W)$.

Rappelons que nous avons réalisé la représentation ρ_ψ^X de $H(W)$ dans l'espace $L^2(Y, \mathrm{d}\, y)$, où $\mathrm{d}\, y$ est une mesure de Haar sur Y: on en déduit une réalisation S_ψ^X de la représentation métaplectique dans ce même espace.

Le résultat suivant est alors conséquence de [**10**, Chapitre 2, II.6 et II.9, Lemme]:

Lemme 3.9.1. *La restriction de la représentation métaplectique S_ψ^X à N_X est donnée par*

$$S_\psi^X(x(b))\varphi(y) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(by, y)\right)\varphi(y),\ y \in Y,\ \varphi \in L^2(Y, \mathrm{d}\, y),$$

où b parcourt l'ensemble des homomorphismes symétriques de Y dans X.

4. Étude du revêtement métaplectique au dessus d'un sous-groupe compact maximal.

Dans cette section, on suppose que k est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2 et on se donne (W, β) un k-espace symplectique. Nous montrons que le revêtement métaplectique $Mp(W)$ est scindé au dessus de tout sous-groupe compact maximal et nous donnons une description de la restriction de la représentation métaplectique à un tel sous-groupe. Pour ce faire, nous présentons le modèle latticiel généralisé de la représentation métaplectique introduit par Shu Yen Pan dans [**12**, numéro 2.3]. Désormais, nous reprenons les notations de la Section 2.

4.1. Soit $B \subset W$ un bon réseau. On a vu que $\mathrm{b}^* = B^*/B$ est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel symplectique de dimension $2l$, où $l = l(B)$. On peut donc considérer la représentation $(\rho_{\overline{\psi}}, \mathcal{H}_{\overline{\psi}})$ du groupe de Heisenberg $H(\mathrm{b}^*)$ de caractère central $\overline{\psi}$. Il suit de ce que B est un bon réseau que $H(B^*) = B^* \times \varpi^{\lambda_\psi - 1}\mathcal{O}$ est un sous-groupe de $H(W)$. Alors, l'application $p_{H(\mathrm{b}^*)} : H(B^*) \longrightarrow H(\mathrm{b}^*)$ définie par

$$p_{H(\mathrm{b}^*)}(w, t) = (p_{\mathrm{b}^*}(w), p_{\mathbb{F}_q}(\varpi^{1-\lambda_\psi} t))$$

est un homomorphisme surjectif de groupes localement compacts. On désigne par $\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}$ la représentation de $H(B^*)$ relevant la représentation $\rho_{\overline{\psi}}$ via le morphisme $p_{H(\mathrm{b}^*)}$. On note de même le prolongement de $\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}$ à $\overline{H}(B^*) = B^* \times k$ dont la restriction à k est un multiple du caractère ψ.

On considère alors la représentation $\rho_\psi^B = \mathrm{Ind}_{\overline{H}(B^*)}^{H(W)} \widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}$ que l'on réalise dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\psi^B$ des fonctions $\varphi : W \longrightarrow \mathcal{H}_{\overline{\psi}}$ qui vérifient

$$\varphi(b+w)=\psi\left(\frac{1}{2}\beta(w,b)\right)\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}(b)(\varphi(w)),\ b\in B^*,\ w\in W, \tag{4.1}$$

$$\int_{W/B^*}\|\varphi(w)\|^2\,\mathrm{d}\,\dot{w}<+\infty, \tag{4.2}$$

dans lequel $H(W)$ agit comme suit:

$$(\rho_\psi^B(w,t)\varphi)(w')=\psi\left(t+\frac{1}{2}\beta(w',w)\right)\varphi(w'+w),\ w,w'\in W,\ t\in k.$$

Proposition 4.1.1. *La représentation ρ_ψ^B est unitaire irréductible, équivalente à ρ_ψ.*

Démonstration. Soit A un réseau autodual tel que $B\subset A\subset B^*$ et soit $\mathrm{x}=A/B$ dont on a vu que c'est un lagrangien de b^*. Comme $p_{H(\mathrm{b}^*)}^{-1}(\mathrm{x}\times\mathbb{F}_q)=A\times\varpi^{\lambda_\psi-1}\mathcal{O}$, il est clair que la représentation $\mathrm{Ind}_{A\times k}^{\overline{H}(B^*)}\psi_A$ est équivalente à la représentation $\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}$. Notre résultat est alors conséquence du théorème d'induction par étage. □

On dit que ρ_ψ^B est le modèle latticiel généralisé de la représentation ρ_ψ associé au réseau B. On note $\widehat{Sp(W)}_\psi^B$, $Mp(W)_\psi^B$ et S_ψ^B les objets $\widehat{Sp(W)}_\psi$, $Mp(W)_\psi$ et S_ψ obtenus en utilisant la réalisation ρ_ψ^B de la représentation ρ_ψ; on dit que S_ψ^B est le modèle latticiel généralisé de la représentation métaplectique associé au réseau B.

Soit A un réseau autodual tel que $B\subset A\subset B^*$, $\mathrm{x}=A/B$ le lagrangien correspondant de b^* et $\rho_{\overline{\psi}}^{\mathrm{x}}$ la représentation d'espace $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}^{\mathrm{x}}$ équivalente à la représentation $\rho_{\overline{\psi}}$ de $H(\mathrm{b}^*)$. On réalise alors l'espace $\mathcal{H}_\psi^B$ comme l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}^{\mathrm{x}}$ vérifiant les conditions (4.1) et (4.2). Il suit facilement de la démonstration de la Proposition 4.1.1 que l'on a alors le résultat suivant (voir aussi [**12**, 4.3, Lemma])

Corollaire 4.1.1. *Soit B un bon réseau de W et A un réseau autodual tel que $B\subset A\subset B^*$. Alors, pour tout $\varphi\in\mathcal{H}_\psi^B$ la fonction $\mathcal{I}_{A,B}(\varphi)$ définie sur W par*

$$\mathcal{I}_{A,B}(\varphi)(w)=\varphi(w)(0),\ w\in W,$$

est un élément de $\mathcal{H}_\psi^A$ et l'application $\mathcal{I}_{A,B}:\mathcal{H}_\psi^B\longrightarrow\mathcal{H}_\psi^A$ est un opérateur entrelaçant les représentations ρ_ψ^B et ρ_ψ^A.

4.2. On garde les notations du paragraphe précédent et on reprend celles du Paragraphe 2.4. On note $\widetilde{S}_{\overline{\psi}}$ la représentation de K_B relevant la représentation $S_{\overline{\psi}}$ de $Sp(\mathrm{b}^*)$ via le morphisme $p_{Sp(\mathrm{b}^*)}$.

Considérons le produit semi-direct $K_B\ltimes H(W)$. Il contient comme sous-groupe $K_B\ltimes\overline{H}(B^*)$. On définit une représentation $\widetilde{S}_{\overline{\psi}}\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}$ de $K_B\ltimes\overline{H}(B^*)$ en décidant que

$$\widetilde{S}_{\overline{\psi}}\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}(gh)=\widetilde{S}_{\overline{\psi}}(g)\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}(h),\ g\in K_B,\ h\in\overline{H}(B^*). \tag{4.3}$$

On considère la représentation R_ψ^B de $K_B \ltimes H(W)$ définie par

$$R_\psi^B = \mathrm{Ind}_{K_B \ltimes \overline{H}(B^*)}^{K_B \ltimes H(W)} \widetilde{S}_{\overline{\psi}} \widetilde{\rho}_{\overline{\psi}} \tag{4.4}$$

dont l'espace est clairement $\mathcal{H}_\psi^B$ et on note S_ψ^B sa restriction à K_B.

Lemme 4.2.1. (i) *Si $g \in K_B$, l'opérateur $S_\psi^B(g)$ de $\mathcal{H}_\psi^B$ est donné par*

$$S_\psi^B(g)\varphi(w) = \widetilde{S}_{\overline{\psi}}(g)(\varphi(g^{-1}w)),\ \varphi \in \mathcal{H}_\psi^B,\ w \in W. \tag{4.5}$$

(ii) *L'application*

$$g \longmapsto (g, S_\psi^B(g)) \tag{4.6}$$

est un homomorphisme de groupes de K_B dans $\widehat{Sp(W)}_\psi^B$ scindant la suite exacte (3.7).

Démonstration. Le point (i) est conséquence immédiate de la définition de la représentation R_ψ^B comme représentation induite.

Le point (ii) résulte de ce que la restriction de R_ψ^B à $H(W)$ est la représentation de Schrödinger ρ_ψ^B. □

En fait, on a le résultat plus précis suivant:

Théorème 4.2.1. *Le scindage au dessus de K_B défini par* (4.6) *est à valeurs dans le groupe métaplectique de W.*

Ce théorème sera démontré au Paragraphe 4.6.

4.3. On garde les notations du paragraphe précédent. Soit A un réseau autodual tel que $B \subset A \subset B^*$. Pour démontrer le Théorème 4.2.1, nous devons relier la réalisation S_ψ^B de la représentation métaplectique à la réalisation S_ψ^A. Commençons par donner une description de cette dernière.

Soit $\mathrm{d}\,w$ une mesure de Haar sur W et soit $\mathcal{P}$ le projecteur orthogonal de $L^2(W, \mathrm{d}\,w)$ sur $\mathcal{H}_\psi^A$; en fait, on a

$$\mathcal{P}\varphi(w) = \int_A \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,w)\right)\varphi(w+a)\,\mathrm{d}\,a,\ w \in W,$$

où $\mathrm{d}\,a$ est la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact A. On note L la représentation unitaire naturelle de $Sp(W)$ dans $L^2(W, \mathrm{d}\,w)$ définie par $L(g)\varphi(w) = \varphi(g^{-1}w)$. Si $g \in Sp(W)$, on pose $M_A(g) = \mathcal{P} \circ \mathcal{L}(\})_{|\mathcal{H}_\psi^A}$. On vérifie immédiatement que, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^A$, on a

$$(M_A(g)\varphi)(w) = [A/A\cap gA]^{-1} \sum_{a\in A/A\cap gA} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,w)\right)\varphi(g^{-1}(a+w)). \tag{4.7}$$

On pose $K = K_A$. La proposition suivante rassemble les résultats de [**10**, Chapitre 2, II.8 et II.10, Lemme]:

PROPOSITION 4.3.1. (i) *Pour tout $g \in Sp(W)$, il existe un nombre strictement positif $\nu_A(g)$ tel que $(g, \nu_A(g)M_A(g))$ soit un élément de $\widehat{Sp(W)}^A_\psi$.*

(ii) *Si $g \in K$, on a $\nu_A(g) = 1$ et*

$$M_A(g)\varphi(w) = \varphi(g^{-1}w),\ \varphi \in \mathcal{H}^A_\psi,\ w \in W.$$

(iii) *L'application $g \longmapsto (g, M_A(g))$ est un homomorphisme de groupes de K dans le groupe métaplectique de W. En particulier, il existe un relèvement du groupe K dans le groupe métaplectique pour lequel la restriction de la représentation métaplectique S^A_ψ à K soit donnée par*

$$S^A_\psi(g) = M_A(g),\ g \in K.$$

REMARQUES. (i) Lorsque le réseau B est autodual, l'affirmation du Théorème 4.2.1 n'est autre que l'assertion (iii) de la Proposition 4.3.1.

(ii) Lorsque le corps résiduel est de cardinal au moins 4, le groupe K admet un unique relèvement dans le groupe métaplectique (voir [**10**, Chapitre 2, II 10, Remarque]).

4.4. On garde les notations du paragraphe précédent. Dans celui-ci, nous allons donner une description plus concrète des opérateurs $M_A(g)$. Tout d'abord, si $v \in W$, on note δ_v la fonction sur W telle que

$$\delta_v(w) = \begin{cases} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(v, w-v)\right) & \text{si } w \in v + A \\ 0 & \text{si } w \notin v + A. \end{cases} \tag{4.8}$$

Remarquons que, si $v \in W$ et $a \in A$, on a

$$\delta_{v+a} = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,v)\right)\delta_v. \tag{4.9}$$

De plus, si $v \in W$ et $g \in K$, on a

$$M_A(g)\delta_v = \delta_{g.v}. \tag{4.10}$$

D'autre part, il est clair que si $\Sigma \subset W$ est un système de représentants des éléments de W/A, la famille $(\delta_v)_{v\in\Sigma}$ est une base hilbertienne de l'espace $\mathcal{H}^A_\psi$.

On a le résultat suivant:

Lemme 4.4.1. *Soit $g \in Sp(W)$ et $v \in W$. Alors, on a*

$$M_A(g)\delta_v = [A/A \cap gA]^{-1} \sum_{a \in gA/A\cap gA} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(v, g^{-1}a)\right)\delta_{gv+a}. \tag{4.11}$$

Démonstration. Utilisant la formule (4.7), on voit que $M_A(g)\delta_v(w)$ est non nul seulement si $w \in gv + A + gA$. Par suite, il existe des nombres complexes $c(a)$, pour a parcourant un système de représentants dans gA des éléments de $(A + gA)/A = gA/A \cap gA$, tels que

$$M_A(g)\delta_v = \sum_{a \in gA/A\cap gA} c(a)\delta_{gv+a}. \tag{4.12}$$

Or, il suit des relations (4.12) et (4.7) que pour $a \in gA/A \cap gA$, on a

$$\begin{aligned} c(a) &= M_A(g)\delta_v(gv + a) \\ &= [A/A \cap gA]^{-1} \sum_{b \in A/A\cap gA} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b, gv + a)\right)\delta_v(v + g^{-1}(a + b)). \end{aligned}$$

Or $\delta_v(v+g^{-1}(a+b))$ est non nul si et seulement si $g^{-1}(a+b) \in A$, soit encore $a+b \in gA$, soit finalement $b \in A \cap gA$. On en déduit que

$$c(a) = [A/A \cap gA]^{-1}\psi\left(\frac{1}{2}\beta(v, g^{-1}a)\right)$$

comme voulu. □

On déduit facilement du Lemme 4.4.1 le résultat suivant:

Corollaire 4.4.1. *Pour tout $g \in Sp(W)$, on a*

$$\nu_A(g) = [gA/A \cap gA]^{-1/2}[A/A \cap gA].$$

4.5. On garde les notations des paragraphes précédents. On rappelle l'opérateur d'entrelacement $\mathcal{I}_{A,B}$ défini au Paragraphe 4.1, Corollaire 4.1.1, ainsi que les fonctions j et m sur le groupe $Sp(\mathrm{b}^*)$ relative au lagrangien x et au caractère $\overline{\psi}$ définies au Paragraphe 3.6, équations (3.11) et (3.12). En particulier, l'espace $\mathcal{H}^B_\psi$ est l'espace des fonctions sur W à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}^{\mathrm{x}}_{\overline{\psi}}$ de la représentation $\rho^{\mathrm{x}}_{\overline{\psi}}$ vérifiant les conditions (4.1) et (4.2).

En fait, on peut réaliser l'espace $\mathcal{H}^{\mathrm{x}}_{\overline{\psi}}$ comme l'espace des fonctions φ sur B^* telles que

$$\varphi(b + a) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b, a)\right)\varphi(b),\ b \in B^*,\ a \in A.$$

Dans ces conditions, on déduit facilement du Lemme 3.6.1 et des formules (3.13) et (3.14) que, pour $g \in K_B$ et $\varphi \in \mathcal{H}_{\overline{\psi}}^{\mathrm{x}}$, on a

$$\widetilde{S}_{\overline{\psi}}(g)\varphi(b) = m(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(g))q^{j(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(g))/2}[A/gA \cap A]^{-1} \\ \times \sum_{a \in A/gA \cap A} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,b)\right)\varphi(g^{-1}(b+a)),\ b \in B^*. \tag{4.13}$$

On a alors le résultat suivant (comparer avec [**12**, 4.3.e]):

Théorème 4.5.1. *Pour tout $g \in K_B$, on a*

$$\mathcal{I}_{A,B} \circ S_{\psi}^{B}(g) = m(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(g))q^{j(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(g))/2} M_A(g) \circ \mathcal{I}_{A,B}.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que $\mathcal{H}_{\psi}^{B}$ est l'espace des fonctions φ définies sur W, à valeurs dans l'espace des fonctions numériques sur B^*, qui vérifient les relations

$$\varphi(w)(a+b) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b,a)\right)\varphi(w)(b),\ w \in W,\ b \in B^*,\ a \in A \tag{4.14}$$

$$\varphi(w)(b) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b,w)\right)\varphi(w+b)(0),\ w \in W,\ b \in B^* \tag{4.15}$$

$$\int_W \sum_{B^*/A} |\varphi(w)(b)|^2 \,\mathrm{d}\, w < +\infty. \tag{4.16}$$

En effet, la relation (4.14) dit simplement que φ est à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}^{\mathrm{x}}$. Notons $\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}^{\mathrm{x}}$ la représentation de $H(B^*)$ relevant la représentation $\rho_{\overline{\psi}}^{\mathrm{x}}$ de $H(\mathrm{b}^*)$ via le morphisme $p_{H(\mathrm{b}^*)}$ et soit $\varphi \in \mathcal{H}_{\psi}^{B}$. Alors, il suit de la relation (4.1) satisfaite par φ que l'on a pour $b \in B^*$ et $w \in W$

$$\varphi(w+b)(0) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(w,b)\right)(\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}^{\mathrm{x}}(b)\varphi(w))(0) \\ = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(w,b)\right)\varphi(w)(b),$$

qui est la relation (4.15). Enfin, la relation (4.16) dit simplement que la fonction $w \longmapsto \|\varphi(w)\|^2$ est de carré sommable sur W.

Réciproquement, supposons les relations (4.15) et (4.16) vérifiées par la fonction φ définie sur W et à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}^{\mathrm{x}}$. Alors, pour $w \in W$ et $b, b' \in B^*$, on a

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho}^{\mathrm{x}}_{\overline{\psi}}(b)\varphi(w))(b') &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b',b)\right)\varphi(w)(b+b')\\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b',b)\right)\psi\left(\frac{1}{2}\beta(b+b',w)\right)\varphi(w+b+b')(0)\\ &= \psi\left(\frac{1}{2}(\beta(b',b)+\beta(b+b',w)+\beta(w+b,b'))\right)\varphi(w+b)(b')\\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b,w)\right)\varphi(w+b)(b')\end{aligned}$$

qui est exactement la relation (4.1). On a alors $\sum_{B^*/A}|\varphi(w)(b)|^2 = \|\varphi(w)\|^2$, $w \in W$, si bien qu'il suit de la relation (4.16) que la fonction $w \longmapsto \|\varphi(w)\|^2$ est de carré sommable sur W et que φ est bien un élément de $\mathcal{H}^B_\psi$.

Maintenant, montrons qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{H}^B_\psi$ telle que $\varphi(0) \neq 0$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{H}^B_\psi$ un élément non nul : il existe $w \in W$ tel que $\varphi(w) \neq 0$. Appliquant à φ l'opérateur $\rho^B_\psi(-w)$ on se ramène au cas où $w = 0$, i.e. $\varphi(0) \neq 0$.

Soit $g \in K_B$. Comme $(g, S^B_\psi(g))$ (resp. $(g, \nu_A(g)M_A(g))$) est un élément de $\widehat{Sp(W)}^B_\psi$ (resp. $\widehat{Sp(W)}^A_\psi$), il existe un nombre complexe $\mu(g)$ tel que

$$\mathcal{I}_{A,B} \circ S^B_\psi(g) = \mu(g)M_A(g) \circ \mathcal{I}_{A,B}.$$

D'après ce qu'on a vu plus haut et compte tenu de la relation (4.5), il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{H}^B_\psi$ telle que $S^B_\psi(g)\varphi(0) \neq 0$. Alors, compte tenu de la définition de l'opérateur $\mathcal{I}_{A,B}$ (voir le Corollaire 4.1.1) et des relations (4.15), (4.5) et (4.13), on a, pour tout $b \in B^*$,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A,B} \circ S^B_\psi(g)\varphi(b) &= S^B_\psi(g)\varphi(b)(0)\\ &= S^B_\psi(g)\varphi(0)(b)\\ &= \widetilde{S}_{\overline{\psi}}(g)(\varphi(0))(b)\\ &= m(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(g))q^{j(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(g))/2}[A/gA\cap A]^{-1}\\ &\quad\times \sum_{a\in A/gA\cap A}\psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,b)\right)\varphi(0)(g^{-1}(b+a))\\ &= m(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(g))q^{j(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(g))/2}[A/gA\cap A]^{-1}\\ &\quad\times \sum_{a\in A/gA\cap A}\psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,b)\right)\varphi(g^{-1}(b+a))(0).\end{aligned}$$

D'autre part, il suit de la formule (4.7) donnant l'expression de l'opérateur $M_A(g)$, $g \in Sp(W)$, que, pour tout $b \in B^*$,

$$M_A(g)\circ I_{A,B}\varphi(b) = [A/gA\cap A]^{-1}\sum_{a\in A/gA\cap A}\psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,b)\right)\mathcal{I}_{A,B}\varphi(g^{-1}(b+a))$$
$$= [A/gA\cap A]^{-1}\sum_{a\in A/gA\cap A}\psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,b)\right)\varphi(g^{-1}(b+a))(0),$$

d'où le théorème. □

Pour $g\in K_B$, on définit l'opérateur $S_\psi^A(g)$ dans l'espace $\mathcal{H}_\psi^A$ en posant

$$S_\psi^A(g) = m(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(g))q^{j(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(g))/2}M_A(g). \tag{4.17}$$

Il est clair d'après le Théorème 4.5.1 et le Lemme 4.2.1 que l'application $g\longmapsto (g, S_\psi^A(g))$ est un homomorphisme de groupes de K_B dans $\widehat{Sp(W)}_\psi^A$, scindant la suite exacte (3.7).

Rappelons que P_B est le stabilisateur du lagrangien x pour l'action de K_B dans le $\mathbb{F}_q$-espace symplectique b^*. On désigne par ζ le caractère de P_B tel que

$$\zeta(p) = \left(\frac{\det_{\mathrm{x}} p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(p)}{q}\right), \tag{4.18}$$

où $(\frac{\div}{q})$ désigne le symbole de Legendre relatif au corps $\mathbb{F}_q$: pour tout $a\in\mathbb{F}_q^\times$

$$\left(\frac{a}{q}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a\in(\mathbb{F}_q^\times)^2\\ -1 & \text{si } a\notin(\mathbb{F}_q^\times)^2. \end{cases} \tag{4.19}$$

On se donne une base autoduale $(e_1,\dots,e_r,f_1,\dots,f_r)$ de W telle que $B=\varpi\mathcal{O}e_1\oplus\cdots\oplus\varpi\mathcal{O}e_l\oplus\mathcal{O}e_{l+1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}e_r\oplus\mathcal{O}f_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}f_r$ et $A=\mathcal{O}e_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}e_r\oplus\mathcal{O}f_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}f_r$ et on reprend les notations des Paragraphes 2.5 et 3.6. En particulier, à partir d'ici ω désigne l'indice de Weil relatif au caractère $\overline{\psi}/2$ du corps $\mathbb{F}_q$. On a alors le résultat suivant:

Corollaire 4.5.1. *La représentation S_ψ^A de K_B vérifie les relations suivantes qui la déterminent entièrement*:

$$S_\psi^A(p) = \zeta(p)M_A(p),\ p\in P_B \tag{4.20}$$

$$S_\psi^A(\varsigma_B) = \left(\frac{-1}{q}\right)^l\omega(1)^{-l}q^{l/2}M_A(\varsigma_B). \tag{4.21}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $j(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(p)) = 0$, $p\in P_B$, tandis que, avec les notations du Paragraphe 3.6, $p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(\varsigma_B) = J_{l,\mathrm{b}^*} = -\tau_{\{1,\dots,l\}}$ et $j(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(\varsigma_B)) = j(J_{l,\mathrm{b}^*}) = l$. Il suit alors de la définition de la représentation S_ψ^A de K_B et des propriétés de la fonction θ énoncées au Paragraphe 3.6 que

$$S_\psi^A(p) = \omega(\det_{\mathrm{x}}(p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(p))^{-1}\omega(1)M_A(p),\ p \in P_B$$

$$S_\psi^A(\varsigma_B) = \left(\frac{-1}{q}\right)^l \omega(1)^{-l} q^{l/2} M_A(\varsigma_B).$$

Or, d'après [**14**, Proposition A.9 (1)], on a $\omega(a)^{-1}\omega(1) = (\frac{a}{q})$, pour $a \in \mathbb{F}_q$. Les formules (4.20) et (4.21) résultent de ces considérations. La Proposition 2.5.1 entraîne que ces formules déterminent entièrement la représentation S_ψ^A de K_B. □

4.6. On garde les notations du paragraphe précédent. Il suit du Théorème 4.5.1 que démontrer le Théorème 4.2.1 revient à démontrer le

Théorème 4.6.1. *L'application $s_B : g \longmapsto (g, S_\psi^A(g))$ est un homomorphisme de groupes de K_B dans le groupe métaplectique de W.*

Démonstration. Selon la Proposition 2.5.2, le groupe K_B est engendré par P_B et $\overline{N}_B$. Or, il suit de la Proposition 4.3.1 et du Corollaire 4.5.1 que, pour tout $p \in P_B$, $s_B(p)$ est un élément de $Mp(W)$. Il nous reste à démontrer que, pour tout $n \in \overline{N}_B$, $s_B(n) \in Mp(W)$.

On a $W = X \oplus Y$ où X (resp. Y) désigne le sous-espace lagrangien de W engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ (resp. $f_1, \ldots, f_r$). Par suite, l'application $\varphi \longmapsto \varphi_{|X}$ permet d'identifier l'espace $\mathcal{H}_\psi^Y$ de la représentation ρ_ψ^Y avec $L^2(X, \mathrm{d}\,x)$ et l'opérateur $\mathcal{I}_{Y,A}$: $\mathcal{H}_\psi^A \longrightarrow \mathcal{H}_\psi^Y = L^2(X, \mathrm{d}\,x)$ entrelaçant les représentations ρ_ψ^A et ρ_ψ^Y est donné par

$$\mathcal{I}_{Y,A}\varphi(x) = \int_{Y/A\cap Y} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(y,x)\right)\varphi(x+y)\,\mathrm{d}\,\dot{y},\ \varphi \in \mathcal{H}_\psi^A,\ x \in X. \tag{4.22}$$

Il est immédiat que 1_A, la fonction caractéristique du réseau A, est un élément de $\mathcal{H}_\psi^A$. De plus, comme $A = A \cap X \oplus A \cap Y$, on a $\mathcal{I}_{Y,A}1_A = 1_{A\cap X}$, où $1_{A\cap X}$ est la fonction caractéristique du réseau $A \cap X$ de X.

Comme $\overline{N}_B$ est un sous-groupe du radical unipotent N_Y du stabilisateur de Y dans $Sp(W)$, lequel se relève de manière unique en un sous-groupe du groupe métaplectique (voir le Paragraphe 3.9), pour établir notre résultat, il suffit de montrer que pour tout $n \in \overline{N}_B$, on a

$$\mathcal{I}_{Y,A} \circ S_\psi^A(n) = S_\psi^Y(n) \circ \mathcal{I}_{Y,A}. \tag{4.23}$$

Or, il est clair que les deux membres de l'équation (4.23) diffèrent d'un facteur scalaire. Il suffit donc de montrer que pour tout $n \in \overline{N}_B$, on a

$$\mathcal{I}_{Y,A} \circ S_\psi^A(n)1_A = S_\psi^Y(n)1_{A\cap X}. \tag{4.24}$$

Mais, tout élément de $\overline{N}_B$ est de la forme $y_B(a)$ avec $a \in \mathcal{M}_l(\mathcal{O})$ une matrice symétrique. Soit donc a une telle matrice. Pour ce qui est du membre de droite de (4.24), il résulte du Lemme 3.9.1 que l'on a

$$S_\psi^Y(y_B(a))1_{A\cap X}(x) = \psi\Big(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2}{}^t xax\Big)1_{A\cap X}(x),\ x\in X. \tag{4.25}$$

Explicitons le membre de gauche de (4.24). Remarquons tout d'abord que $y_B(a) = \varsigma_B x_B(-a)\varsigma_B^{-1}$ de sorte que

$$S_\psi^A(y_B(a)) = S_\psi^A(\varsigma_B)S_\psi^A(x_B(-a))S_\psi^A(\varsigma_B^{-1}).$$

Or $\varsigma_B^4 = Id$, $\varsigma_B^2 \in P_B$ et $\zeta(\varsigma_B^2) = (\frac{-1}{q})^l$. On en déduit que

$$S_\psi^A(y_B(a))1_A = \left(\frac{-1}{q}\right)^l S_\psi^A(\varsigma_B)S_\psi^A(x_B(-a))S_\psi^A(\varsigma_B)1_A. \tag{4.26}$$

D'autre part

$$\varsigma_B A = \varpi\mathcal{O}e_1 \oplus\cdots\oplus \varpi\mathcal{O}e_l \oplus \mathcal{O}e_{l+1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}e_r$$
$$\oplus\, \varpi^{-1}\mathcal{O}f_1\oplus\cdots\oplus\varpi^{-1}\mathcal{O}f_l\oplus\mathcal{O}f_{l+1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}f_r$$

de sorte que,

$$\varsigma_B A/A\cap\varsigma_B A = \mathbb{F}_q^l.$$

Si $u\in\mathcal{O}^l$, on désigne par $\dot u$ son image dans $\mathbb{F}_q^l$ et on pose $u.e = u_1e_1+\cdots+u_le_l$ et $u.f = u_1f_1+\cdots+u_lf_l$.

Comme $1_A = \delta_0$, il suit du Corollaire 4.5.1 et du Lemme 4.4.1 que l'on a

$$S_\psi^A(\varsigma_B)1_A = q^{-l/2}\left(\frac{-1}{q}\right)^l\omega(1)^{-l}\sum_{\dot u\in\mathbb{F}_q^l}\delta_{\varpi^{-1}u.f}. \tag{4.27}$$

Or, si $u\in\mathcal{O}^l$, il résulte du Corollaire 4.5.1, de la Proposition 4.3.1, du Lemme 4.4.1 et de la relation (4.9) que l'on a

$$\begin{aligned}S_\psi^A(x_B(-a))\delta_{\varpi^{-1}u.f} &= \delta_{x_B(-a)\varpi^{-1}u.f}\\ &= \delta_{-au.e+\varpi^{-1}u.f}\\ &= \psi\Big(-\frac{1}{2}\beta(au.e,\varpi^{-1}u.f)\Big)\delta_{\varpi^{-1}u.f}\\ &= \psi\Big(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2}{}^t uau\Big)\delta_{\varpi^{-1}u.f}.\end{aligned}$$

Compte tenu de (4.27), il vient

$$S_\psi^A(x_B(-a))S_\psi^A(\varsigma_B)1_A = q^{-l/2}\left(\frac{-1}{q}\right)^l \omega(1)^{-l} \sum_{\dot{u}\in\mathbb{F}_q^l} \psi\left(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2}{}^t uau\right)\delta_{\varpi^{-1}u.f}.$$

Utilisant à nouveau le Corollaire 4.5.1, le Lemme 4.4.1, la formule (4.9), et compte tenu de (4.26) et de la relation $(\frac{-1}{q}) = \omega(1)^2$ (voir [**14**, Proposition A.9 (1) et Theorem A.2 (2)]), on obtient

$$\begin{aligned} S_\psi^A(y_B(a))1_A &= \left(\frac{-1}{q}\right)^l \omega(1)^{-2l} q^{-l} \sum_{\dot{u},\dot{v}\in\mathbb{F}_q^l} \psi\left(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2}{}^t uau\right) \\ &\quad \times \psi\left(\frac{1}{2}\beta(\varpi^{-1}u.f,-v.e)\right)\delta_{u.e+\varpi^{-1}v.f} \\ &= q^{-l}\sum_{\dot{v}\in\mathbb{F}_q^l}\left(\sum_{\dot{u}\in\mathbb{F}_q^l}\left(\psi\left(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2}{}^t uau\right)\psi(\varpi^{\lambda_\psi-1}{}^t uv)\right)\delta_{\varpi^{-1}v.f}.\right. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Maintenant, nous allons calculer l'action de l'opérateur d'entrelacement $\mathcal{I}_{Y,A}$ sur les fonctions δ_v, $v \in W$. Soit $v \in W$. Écrivons $v = v_X + v_Y$ avec $v_X \in X$ et $v_Y \in Y$. Utilisant la formule (4.22) on voit que, si $x \notin v_X + A\cap X$, on a

$$\mathcal{I}_{Y,A}\delta_v(x) = 0$$

et, si $x \in v_X + A\cap X$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{Y,A}\delta_v(x) &= \delta_v(x+v_Y)\psi\left(\frac{1}{2}\beta(v_Y,x)\right) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(v,x-v_X)\right)\psi\left(\frac{1}{2}\beta(v_Y,x)\right) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(v_X,v_Y)\right)\psi(\beta(v_Y,x)). \end{aligned}$$

On voit donc que, si $v \in \mathcal{O}^l$, on a

$$\mathcal{I}_{Y,A}\delta_{\varpi^{-1}v.f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A\cap X \\ \psi(-\varpi^{\lambda_\psi-1}{}^t vx) & \text{si } x\in A\cap X. \end{cases} \tag{4.29}$$

Compte tenu de la relation (4.28), il vient, pour $x \notin A\cap X$,

$$\mathcal{I}_{Y,A}S_\psi^A(y_B(a))1_A(x) = 0$$

et, pour $x \in A\cap X$,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{Y,A} S_\psi^A(y_B(a)) 1_A(x) &= q^{-l} \sum_{\dot u \in \mathbb{F}_q^l} \psi\Big(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi - 1}}{2}\, {}^t u a u\Big) \sum_{\dot v \in \mathbb{F}_q^l} \psi(\varpi^{\lambda_\psi - 1}\, {}^t v(u-x)) \\ &= \psi\Big(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2}\, {}^t x a x\Big).\end{aligned}$$

Comparant avec (4.25), on voit que la relation (4.24) est vraie. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarque. (i) En utilisant les résultats de [**1**] et [**2**] et en raisonnant comme dans la démonstration de [**11**, Lemma 11.1], on peut montrer que, si $q \geq 4$, le groupe K_B est parfait, i.e. égal à son sous-groupe des commutateurs. Il s'ensuit que, dans ce cas, la suite exacte (3.7) admet un unique scindage au dessus de K_B, lequel est à valeurs dans $Mp(W)$.

(ii) Désormais, nous utilisons la section s_B pour identifier K_B avec un sous-groupe de $Mp(W)$. Elle est caractérisée par le fait que la représentation $S_\psi^A \circ s_B$ de K_B est donnée par la formule (4.17). Avec cette convention, la restriction de la représentation métaplectique S_ψ^A à K_B est entièrement déterminée par les formules (4.20) et (4.21).

5. Restriction de la représentation de Weil à un sous-groupe compact maximal.

Soit B un bon réseau et $l = l(B)$. Dans cette section, nous déterminons la décomposition en composantes irréductibles de la restriction de la représentation métaplectique à K_B. On reprend les notations de la section précédente.

5.1. Soit A un réseau autodual tel que $\varpi B^* \subset B \subset A \subset B^*$. On réalise la restriction de la représentation métaplectique, notée S_ψ^A, à K_B dans l'espace $\mathcal{H}_\psi^A$ par les formules (4.20) et (4.21) du Corollaire 4.5.1.

Si $\mathcal{E}$ est un sous-espace de $\mathcal{H}_\psi^A$, on désigne par $\mathcal{E}^+$ (resp. $\mathcal{E}^-$) le sous-espace de $\mathcal{E}$ constitué des fonctions paires (resp. impaires). On sait que les sous-espaces $\mathcal{H}_\psi^{A,\pm}$ sont invariants et irréductibles sous l'action de la représentation S_ψ^A de $Mp(W)$.

On considère les sous-espaces suivants de $\mathcal{H}_\psi^A$:

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_{0,0}^B = \mathbb{C}\delta_0\\ &\mathcal{E}_{n,0}^B = \{f \in \mathcal{H}_\psi^A \,|\, \operatorname{Supp} f \subset \varpi^{-n} A \backslash \varpi^{-n} B\},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\\ &\mathcal{E}_{n,2}^B = \{f \in \mathcal{H}_\psi^A \,|\, \operatorname{Supp} f \subset \varpi^{-n} B^* \backslash \varpi^{-n} A\},\ n \in \mathbb{N}\\ &\mathcal{E}_{n,1}^B = \{f \in \mathcal{H}_\psi^A \,|\, \operatorname{Supp} f \subset \varpi^{-(n+1)} B \backslash \varpi^{-n} B^*\},\ n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit K_n le sous-groupe des éléments $g \in K = K_A$ tels que $(g-1)A \subset \varpi^n A$. Alors, on a $K_0 = K$ et, pour $n \geq 1$, $K_n \subset P_B$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Le groupe quotient $\varpi^{-n} A / A$ est naturellement muni d'une structure de O_{n-1}-module symplectique pour la forme bilinéaire alternée β_n définie par

$$\beta_n(v+A,w+A)=\varpi^{-\lambda_\psi+2n}\beta(v,w)+\varpi^n\mathcal{O},\ v,w\in\varpi^{-n}A.$$

Il est isomorphe, via l'application $v+A\longmapsto p_{\mathrm{a}_n}(\varpi^n v)$, au O_{n-1}-module symplectique $\mathrm{a}_n=A/\varpi^nA$, défini au Paragraphe 2.7. Le groupe K agit naturellement dans $\varpi^{-n}A/A=\mathrm{a}_n$ et cette action induit un morphisme surjectif de groupes de K sur le groupe symplectique $Sp(\mathrm{a}_n)$ dont le noyau est K_n.

Soit $v\in\varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n+1}A$. On désigne par $P_{B,v}$ le stabilisateur dans le groupe P_B de $v+A\in\varpi^{-n}A/A$ et par $\tilde{P}_{B,v}$ le sous-groupe $\{\pm Id\}P_{B,v}$ de P_B. Il est clair que K_n est un sous-groupe de $P_{B,v}$. Il résulte de (4.9) et (4.10) que la fonction $\chi_{B,v}$ définie sur $P_{B,v}$ en posant

$$\chi_{B,v}(g)=\psi\left(\frac{1}{2}\beta(gv,v)\right),\ g\in P_{B,v},$$

est un caractère et que l'on a

$$M_A(g)\delta_v=\chi_{B,v}(g)\delta_v,\ g\in P_{B,v}.$$

Le caractère $\chi_{B,v}$ de $P_{B,v}$ s'étend en les deux seuls caractères $\chi^{\pm}_{B,v}$ de $\tilde{P}_{B,v}$ tels que $\chi^{\pm}_{B,v}(-Id)=\pm1$. Enfin, on désigne par χ_v la restriction du caractère $\chi_{B,v}$ à K_n.

LEMME 5.1.1. *Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq1$.*

(i) *Soit $v,v'\in\varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n+1}A$. Alors, on a $\chi_v=\chi_{v'}$ si et seulement si $v'\in\pm v+A$.*
(ii) *On a*

$$K_{2n}\subset\bigcap_{v\in C}\ker\chi_v\subsetneq K_{2n-2}$$

où C désigne $\varpi^{-n+1}B^*\backslash\varpi^{-n+1}A$, $\varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n}B$ ou $\varpi^{-n}B\backslash\varpi^{-n+1}B^*$.

DÉMONSTRATION. On se donne une base autoduale $(e_1,\ldots,e_r,f_1,\ldots,f_r)$ de W telle que $A=\mathcal{O}e_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}e_r\oplus\mathcal{O}f_1\cdots\oplus\mathcal{O}f_r$ et $B=\varpi\mathcal{O}e_1\oplus\cdots\oplus\varpi\mathcal{O}e_l\oplus\mathcal{O}e_{l+1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}e_r\oplus\mathcal{O}f_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}f_r$. On identifie les éléments (resp. les endomorphismes) de W avec le vecteur colonne de leurs coordonnées (resp. leur matrice) dans cette base. Si λ est un élément de k^r, on pose $\|\lambda\|_p=\max\{|\lambda_i|_p\,|\,1\leq i\leq r\}$, où $|\ |_p$ désigne la valeur absolue normalisée sur le corps k.

Alors, les éléments de K_n sont ceux de $Sp(W)$ s'écrivant $\left(\begin{smallmatrix}Id+\varpi^nu & \varpi^nx\\ \varpi^ny & Id+\varpi^nz\end{smallmatrix}\right)$ avec u,x,y,z des matrices d'ordre r à coefficients dans $\mathcal{O}$ et vérifiant

$$\begin{aligned}{}^tx-x+\varpi^n({}^txz-{}^tzx)&=0\\ y-{}^ty+\varpi^n({}^tuy-{}^tyu)&=0\\ z+{}^tu+\varpi^n({}^tuz-{}^tyx)&=0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

De même, les éléments de $\varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n+1}A$ sont ceux de W s'écrivant $\varpi^{-n}\left(\begin{smallmatrix}\lambda\\ \mu\end{smallmatrix}\right)$ avec

$\lambda, \mu \in k^r$ tels que $\max\{\|\lambda\|_p, \|\mu\|_p\} = 1$.

(i) Un calcul immédiat montre que si $v = \varpi^{-n}\left(\begin{smallmatrix}\lambda\\ \mu\end{smallmatrix}\right)$ est un élément de $\varpi^{-n}A \backslash \varpi^{-n+1}A$ et $g = \left(\begin{smallmatrix}Id+\varpi^n u & \varpi^n x\\ \varpi^n y & Id+\varpi^n z\end{smallmatrix}\right)$ est un élément de K_n, on a

$$\chi_v(g) = \psi\left(\frac{1}{2}\varpi^{\lambda_\psi - n}({}^t\lambda{}^ty\lambda + {}^t\lambda({}^tu - z)\mu + {}^t\mu x\mu)\right). \tag{5.2}$$

On en déduit facilement que si $v = \varpi^{-n}\left(\begin{smallmatrix}\lambda\\ \mu\end{smallmatrix}\right)$ et $v' = \varpi^{-n}\left(\begin{smallmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{smallmatrix}\right)$ sont deux éléments de $\varpi^{-n}A \backslash \varpi^{-n+1}A$, on a $\chi_v = \chi_{v'}$, si et seulement si pour toute paire (x, z) de matrices à coefficients dans $\mathcal{O}$ avec x symétrique, on a

$$\begin{gathered}{}^t\lambda{}^tx\lambda - {}^t\lambda'{}^tx\lambda' \in \varpi^n\mathcal{O}\\ {}^t\mu x\mu - {}^t\mu' x\mu' \in \varpi^n\mathcal{O}\\ {}^t\lambda z\mu - {}^t\lambda' z\mu' \in \varpi^n\mathcal{O}.\end{gathered}$$

L'assertion (i) du lemme en découle.

(ii) Il est immédiat que si $v \in \varpi^{-n}A \backslash \varpi^{-n+1}A$, $K_{2n} \subset \ker \chi_v$. Ceci montre la première inclusion de l'assertion (ii).

Soit $m \le s$ deux entiers naturels. Dans la suite, on écrit les vecteurs colonnes $\lambda \in k^s$ (resp. les matrices $a \in \mathcal{M}_s(k)$) sous la forme $\lambda = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$ (resp. $a = \left(\begin{smallmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right)$) avec $\lambda_1 \in k^m$ et $\lambda_2 \in k^{s-m}$ (resp. $a_{11} \in \mathcal{M}_m(k)$, $a_{12} \in \mathcal{M}_{m,s-m}(k)$, $a_{21} \in \mathcal{M}_{s-m,m}(k)$ et $a_{22} \in \mathcal{M}_{s-m}(k)$). L'assertion suivante est immédiate: on suppose que la matrice $a \in \mathcal{M}_s(\mathcal{O})$ est telle que

$${}^ta - a \in \varpi^n\mathcal{M}_s(\mathcal{O}) \tag{5.3}$$

et que la forme quadratique $Q_a(\lambda) = {}^t\lambda a\lambda$ vérifie

$$Q_a(\lambda) \in \varpi^n\mathcal{O}, \text{ pour tout } \lambda \in \mathcal{O}^s \text{ tel que } \|\lambda_1\|_p = 1 \text{ et } \|\lambda_2\|_p < 1. \tag{5.4}$$

Alors, on a $a \in \varpi^{n-2}\mathcal{M}_s(\mathcal{O})$ et $a_{11} \in \varpi^n\mathcal{M}_m(\mathcal{O})$.

Soit $g = \left(\begin{smallmatrix}Id+\varpi^n u & \varpi^n x\\ \varpi^n y & Id+\varpi^n z\end{smallmatrix}\right) \in K_n$. D'après (5.2), si $v = \varpi^{-n}\lambda \in \varpi^{-n}A \backslash \varpi^{-n+1}A$, on a

$$\chi_v(g) = \psi\left(\frac{1}{2}\varpi^{\lambda_\psi - n}Q_a(\lambda)\right)$$

avec $a = \left(\begin{smallmatrix}{}^ty & -z\\ u & x\end{smallmatrix}\right)$. Il suit des relations (5.1) que a est telle que ${}^ta - a \in \varpi^n\mathcal{M}_{2r}(\mathcal{O})$.

D'autre part, si C est comme dans l'assertion (ii) du lemme, on a $\varpi^nC = \varpi B^* \backslash \varpi A$, $A \backslash B$ ou $B \backslash \varpi B^*$. Si $\lambda \in k^r$ est un vecteur colonne, on écrit $\lambda = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$ où $\lambda_1 \in k^l$ et $\lambda_2 \in k^{r-l}$. Avec ces notations, on a $A \backslash B = \{v = \left(\begin{smallmatrix}\lambda\\ \mu\end{smallmatrix}\right) \in A \mid \lambda, \mu \in k^r, \|\lambda_1\|_p = 1\}$, $B \backslash \varpi B^* = \{v = \left(\begin{smallmatrix}\lambda\\ \mu\end{smallmatrix}\right) \in A \mid \lambda, \mu \in k^r, \|\left(\begin{smallmatrix}\lambda_2\\ \mu_2\end{smallmatrix}\right)\|_p = 1, \|\lambda_1\|_p < 1\}$ et $B^* \backslash A = \varpi^{-1}\{v = \left(\begin{smallmatrix}\lambda\\ \mu\end{smallmatrix}\right) \in W \mid \lambda, \mu \in k^r, \|v\|_p = 1, \|\left(\begin{smallmatrix}\lambda_2\\ \mu_2\end{smallmatrix}\right)\|_p < 1, \|\lambda_1\|_p < 1\}$.

Alors, si C est comme dans l'assertion (ii) du lemme, quitte à effectuer une permutation sur les coordonnées dans k^{2r} et pour un bon choix de l'entier $m \leq 2r$, la condition $g \in \cap_{v\in C} \ker \chi_v$ implique la condition (5.4). Il résulte alors de notre assertion, que $a \in \varpi^{n-2}\mathcal{M}_{2r}(\mathcal{O})$ et a_{11} est à coefficients dans $\varpi^n\mathcal{O}$. On en déduit que $\cap_{v\in C} \ker \chi_v \subsetneq K_{2n-2}$. □

Soit donc $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $v \in \varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n+1}A$. Il suit du Lemme 5.1.1 (i) que $\tilde{P}_{B,v}$ est le stabilisateur dans P_B du caractère χ_v du sous-groupe distingué K_n. La méthode des petits groupes de Mackey montre alors que la représentation $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^{\pm}$ est irréductible. On en désigne par $\mathcal{E}_{v,\pm}$ l'espace.

On rappelle le caractère ζ de P_B défini par les formules (4.18) et (4.19). Pour $v \in W$, on désigne par $\zeta\chi_{B,v}^{\pm}$ le caractère de $\tilde{P}_{B,v}$ produit de $\chi_{B,v}^{\pm}$ par $\zeta_{|\tilde{P}_{B,v}}$.

LEMME 5.1.2. (i) *L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\psi^A$ est somme hilbertienne des sous-espaces $\mathcal{E}_{n,j}^B$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0,1,2$. Le sous-espace $\mathcal{E}_{0,0}^B$ est non nul. Les sous-espaces $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, et $\mathcal{E}_{n,2}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, sont non nuls si et seulement si $l > 0$. Les espaces $\mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$ sont non nuls si et seulement si $l < r$.*

(ii) *Lorsqu'ils sont non nuls, les sous-espaces $\mathcal{E}_{0,0}^B$, $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, et $\mathcal{E}_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1,2$ sont invariants et irréductibles sous la restriction de la représentation M_A de K à P_B. On note $M_{0,0}^B$, $M_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $M_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1,2$ les représentations de P_B ainsi obtenues. Elles sont deux à deux non équivalentes et monomiales. De plus, $M_{0,0}^B$ est la représentation triviale et l'on a:*

$$M_{n,0}^{B,\pm} = \mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^{\pm},\ v \in \varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n}B,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

$$M_{n,2}^{B,\pm} = \mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^{\pm},\ v \in \varpi^{-n}B^*\backslash\varpi^{-n}A,\ n \in \mathbb{N}$$

$$M_{n,1}^{B,\pm} = \mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^{\pm},\ v \in \varpi^{-(n+1)}B\backslash\varpi^{-n}B^*,\ n \in \mathbb{N}.$$

(iii) *Lorsqu'ils sont non nuls, les sous-espaces $\mathcal{E}_{0,0}^B$, $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, et $\mathcal{E}_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1,2$ sont invariants et irréductibles sous la restriction de la représentation métaplectique S_ψ^A à P_B. On note $S_{0,0}^B$, $S_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $S_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1,2$ les représentations de P_B ainsi obtenues. Elles sont deux à deux non équivalentes et l'on a:*

$$S_{0,0}^B = \zeta$$

$$S_{n,0}^{B,\pm} = \mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \zeta\chi_{B,v}^{\pm},\ v \in \varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n}B,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

$$S_{n,2}^{B,\pm} = \mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \zeta\chi_{B,v}^{\pm},\ v \in \varpi^{-n}B^*\backslash\varpi^{-n}A,\ n \in \mathbb{N}$$

$$S_{n,1}^{B,\pm} = \mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \zeta\chi_{B,v}^{\pm},\ v \in \varpi^{-(n+1)}B\backslash\varpi^{-n}B^*,\ n \in \mathbb{N}.$$

DÉMONSTRATION. (i) Compte tenu des inclusions $\varpi B^* \subset B \subset A \subset B^*$, il est clair que $\mathcal{H}_\psi^A$ est somme hilbertienne des sous-espaces $\mathcal{E}_{n,j}^B$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0,1,2$. De plus, ces inclusions sont strictes si $0 < l < r$ tandis que $\varpi B^* \subsetneq B = A = B^*$, si $l = 0$, et $\varpi B^* = B \subsetneq A \subsetneq B^*$, si $l = r$.

(ii) Le fait que les sous-espaces $\mathcal{E}_{0,0}^{B}$, $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, et $\mathcal{E}_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$, sont invariants résulte simplement de l'invariance des réseaux A, B et B^* sous l'action de P_B.

Il est clair que l'action de P_B dans $\mathcal{E}_{0,0}^{B}$ est triviale. D'autre part, d'après le Lemme 2.6.1, les orbites de P_B dans $B^*\backslash\varpi B^*$ sont $B^*\backslash A$, $A\backslash B$ et $B\backslash\varpi B^*$. On déduit de ceci que, pour $v \in \varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n}B$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, (resp. $v \in \varpi^{-n}B^*\backslash\varpi^{-n}A$ et $n \in \mathbb{N}$, $v \in \varpi^{-(n+1)}B\backslash\varpi^{-n}B^*$ et $n \in \mathbb{N}$), l'application $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ définie par $\tilde{\varphi}(p) = \varphi(p^{-1}v)$ induit une bijection de l'espace $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$ (resp. $\mathcal{E}_{n,2}^{B,\pm}$, $\mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm}$) sur l'espace $\mathcal{E}_{v,\pm}$ qui entrelace la restriction de M_A à P_B et la représentation $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B}\, \chi_{B,v}^{\pm}$.

Soit $n \geq 1$ et $v \in \varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n+1}A$. Il suit de l'assertion (ii) du Lemme 5.1.1 que le noyau de la représentation $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B}\, \chi_{B,v}^{\pm}$ contient K_{2n} et est strictement contenu dans K_{2n-2}. Par suite, si $n \neq m$ sont deux entiers non nuls et si $v \in \varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n+1}A$, $w \in \varpi^{-m}A\backslash\varpi^{-m+1}A$, les représentations $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B}\, \chi_{B,v}^{\pm}$ et $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,w}}^{P_B}\, \chi_{B,w}^{\pm}$ ne sont pas équivalentes et distinctes de la représentation triviale. D'autre part, si n est un entier non nul, $v, w \in \varpi^{-n}A\backslash\varpi^{-n+1}A$ et $\epsilon, \epsilon' \in \{\pm\}$, il suit de la méthode des petits groupes de Mackey appliquée au sous-groupe invariant K_n que les représentations $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B}\, \chi_{B,v}^{\epsilon}$ et $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}_{B,w}}^{P_B}\, \chi_{B,w}^{\epsilon'}$ ne peuvent être équivalentes que si v et w sont dans la même P_B-orbite et $\epsilon' = \epsilon$. Il en résulte que les représentations $M_{0,0}^{B}$, $M_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $M_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$, sont deux à deux non équivalentes.

(iii) Cette assertion est conséquence immédiate de l'assertion (ii) et du fait que, d'après le Corollaire 4.5.1, la restriction de la représentation métaplectique S_{ψ}^{A} à P_B est égale à $\zeta \otimes M_{A|P_B}$. $\square$

5.2. On garde les notations du paragraphe précédent. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{E}_{n}^{B} = \mathcal{E}_{n,0}^{B} \oplus \mathcal{E}_{n,2}^{B}.$$

On a

$$\mathcal{E}_{0}^{B} = \{f \in \mathcal{H}_{\psi}^{A} |\, \mathrm{Supp}\, f \subset B^*\},$$
$$\mathcal{E}_{n}^{B} = \{f \in \mathcal{H}_{\psi}^{A} |\, \mathrm{Supp}\, f \subset \varpi^{-n}(B^*\backslash B)\},\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

THÉORÈME 5.2.1. (i) *Le sous-espace $\mathcal{E}_{0}^{B}$ est non nul. Les sous-espaces $\mathcal{E}_{0}^{B,-}$ et $\mathcal{E}_{n}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, sont non nuls si et seulement si $l > 0$. Les sous-espaces $\mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, sont non nuls si et seulement si $l < r$.*

(ii) *Lorsqu'ils sont non nuls, les sous-espaces $\mathcal{E}_{n}^{B,\pm}$ et $\mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$ sont invariants et irréductibles sous la restriction de la représentation métaplectique S_{ψ}^{A} à K_B. Les représentations de K_B ainsi obtenues sont deux à deux non équivalentes. La restriction de la représentation métaplectique à K_B est sans multiplicité et somme directe de ces représentations.*

(iii) *On a:*

$$\dim \mathcal{E}_0^{B,+} = 1 + \frac{1}{2}(q^l - 1)$$

$$\dim \mathcal{E}_0^{B,-} = \frac{1}{2}(q^l - 1)$$

$$\dim \mathcal{E}_n^{B,\pm} = \frac{1}{2}q^{2rn-l}(q^{2l} - 1),\ n \geq 1$$

$$\dim \mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm} = \frac{1}{2}q^{2rn+l}(q^{2(r-l)} - 1),\ n \geq 0.$$

Démonstration. (i) C'est une conséquence immédiate de l'assertion (i) du Lemme 5.1.2.

(ii) Compte tenu du fait que K_B est engendré par P_B et ς_B, de la formule (4.21) du Corollaire 4.5.1 et du Lemme 5.1.2, il suffit de montrer que pour tout entier naturel n, les espaces $\mathcal{E}_n^B$ et $\mathcal{E}_{n,1}^B$ sont invariants sous l'opérateur $M_A(\varsigma_B)$ et qu'aucun des espaces $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$ ne l'est.

Commençons par remarquer qu'il suit du Lemme 4.4.1 que si $v \in W$, $\varsigma_B\delta_v$ est combinaison linéaire de δ_w avec $w \in \varsigma_B(v + A)$. Soit n un entier naturel. L'espace $\mathcal{E}_{n,1}^B$ est engendré par les vecteurs δ_v, $v \in \varpi^{-n}(\varpi^{-1}B\backslash B^*)$. L'ensemble $\varpi^{-1}B\backslash B^*$ est à la fois K_B-invariant et réunion de classes modulo A. Notre remarque montre alors que $\mathcal{E}_{n,1}^B$ est invariant sous l'action de $M_A(\varsigma_B)$, comme voulu.

L'espace $\mathcal{E}_{n,0}^B$ (resp. $\mathcal{E}_{n,2}^B$) est engendré par les vecteurs δ_v, $v \in \varpi^{-n}(A\backslash B)$ (resp. $v \in \varpi^{-n}(B^*\backslash A)$). Or, il est clair que K_B laisse stable $B^*\backslash B$ et on vérifie facilement que $\varsigma_B(A\backslash B) \subset B^*\backslash A$. Ceci montre que l'espace $\mathcal{E}_n^B$ est invariant sous l'action de $M_A(\varsigma_B)$ et qu'aucun des espaces $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$ ne l'est. Ceci achève la démonstration de l'assertion (ii).

(iii) La multiplication des scalaires induit une action du groupe $\{\pm 1\}$ dans W/A et on considère l'espace quotient de cette action $\{\pm 1\}\backslash W/A$.

On a $\mathcal{E}_0^{B,+} = \mathbb{C}\delta_0 \oplus \mathcal{E}_{0,2}^{B,+}$ et $\mathcal{E}_0^{B,-} = \mathcal{E}_{0,2}^{B,-}$, tandis qu'une base de $\mathcal{E}_{0,2}^{B,\pm}$ est constituée des $\delta_v \pm \delta_{-v}$, pour v parcourant un système de représentants des classes de $\{\pm 1\}\backslash W/A$ contenues dans $B^*\backslash A$. On a donc $\dim \mathcal{E}_{0,2}^{B,\pm} = ([B^*/A] - 1)/2$. Mais la suite exacte $0 \longrightarrow A/B \longrightarrow B^*/B \longrightarrow B^*/A \longrightarrow 0$ montre que $q^{2l} = [B^*/B] = [A/B][B^*/A]$. Or, A/B étant un lagrangien du $\mathbb{F}_q$-espace symplectique b^* de dimension $2l$, on a $[A/B] = q^l$ et donc $[B^*/A] = q^l$. D'où la formule pour les dimensions des espaces $\mathcal{E}_0^{B,\pm}$.

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Comme $\varpi^{-n}(B^*\backslash B)$ (resp. $\varpi^{-n}(\varpi^{-1}B\backslash B^*)$) ne rencontre pas A, on voit que $\dim \mathcal{E}_n^{B,\pm} = ([\varpi^{-n}B^*/A] - [\varpi^{-n}B/A])/2$ (resp. $\dim \mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm} = ([\varpi^{-(n+1)}B/A] - [\varpi^{-n}B^*/A])/2$). Or, on a $[\varpi^{-n}B^*/A] = q^{2rn+l}$ et $[\varpi^{-n}B/A] = q^{2rn-l}$. D'où le résultat cherché. □

5.3. On reprend les notations du paragraphe précédent et on désigne par $S_n^{B,\pm}$ (resp. $S_{n,1}^{B,\pm}$) la représentation de K_B induite par la représentation S_ψ^A dans le sous-espace $\mathcal{E}_n^{B,\pm}$ (resp. $\mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm}$) lorsque celui-ci est non nul. Nous allons utiliser les résultats de [**4**] rappelés dans le Paragraphe 3.7 pour donner une description des représentations $S_n^{B,\pm}$ et $S_{n,1}^{B,\pm}$ comme représentations induites.

Étant donné $x \in W$, on désigne par $\hat{x}$ (resp. $\dot{x}$) la classe de x dans le $\mathcal{O}$-module quotient W/B^* (resp. W/B) et on rappelle que x s'identifie à l'élément $(x, 0)$ de $H(W)$.

Lemme 5.3.1. *Soit $x \in W$ et soit n le plus petit entier naturel tel que $x \in \varpi^{-(n+1)}B$.*

(i) *Pour tout $g \in K_B(\hat{x})$, le commutateur $g^{-1}xgx^{-1}$ est contenu dans le sous-groupe $B^* \times \varpi^{\lambda_\psi - n-1}\mathcal{O}$ de $H(W)$.*
(ii) *Si $x \notin B^*$, on a $K_B(\hat{x}) = K_B(x)K'_B(\hat{x})$.*
(iii) *Si $x \in \varpi^{-(n+1)}B \backslash \varpi^{-n}B^*$, on a*

$$p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(K_B(x)) = Sp(\mathrm{b}^*).$$

(iv) *Si $x \in \varpi^{-n}B^* \backslash \varpi^{-n}B$, on a*

$$p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(K_B(x)) = Sp(\mathrm{b}^*)(p_{\mathrm{b}^*}(\varpi^n x)).$$

Démonstration. (i) Si $g \in K_B(\hat{x})$, on a

$$g^{-1}xgx^{-1} = \left(g^{-1}x - x, \frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x)\right) \tag{5.5}$$

avec $g^{-1}x - x \in B^*$ et

$$\frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x) = \frac{1}{2}\beta(x - g^{-1}x, g^{-1}x) \in \beta(B^*, \varpi^{-(n+1)}B) \subset \varpi^{\lambda_\psi - n - 1}\mathcal{O}.$$

(ii) L'inclusion $K_B(x)K'_B(\hat{x}) \subset K_B(\hat{x})$ est claire. Soit donc $g \in K_B(\hat{x})$. Par définition, on a $gx \in x + B^*$. D'autre part, $\varpi^{n+1}x \in B$ et $g\varpi^{n+1}x \in \varpi^{n+1}x + \varpi^{n+1}B^*$. Si $\varpi^{n+1}x \notin \varpi B^*$, l'assertion (i) du Lemme 2.6.1 montre qu'il existe $h \in K'_B$ tel que $hg\varpi^{n+1}x = \varpi^{n+1}x$. Si $\varpi^{n+1}x \in \varpi B^*$, on a $n \geq 1$, $\varpi^n x \in B^* \backslash B$ et $g\varpi^n x \in \varpi^n x + \varpi^n B^* \subset \varpi^n x + B$, de sorte que le même argument montre qu'il existe $h \in K'_B$ tel que $hg\varpi^n x = \varpi^n x$. Dans tous les cas, on a trouvé $h \in K'_B$ tel que $hgx = x$ et il est alors évident que $h \in K'_B(\hat{x})$.

(iii) Soit $g \in Sp(\mathrm{b}^*)$. Désignons par K''_B le noyau du morphisme $p_{Sp(\mathrm{b})}$ de K_B sur $Sp(\mathrm{b})$. Il suit du Lemme 2.4.1 que $p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(K''_B) = Sp(\mathrm{b}^*)$. Il existe donc $\tilde{g} \in K''_B$ tel que $p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(\tilde{g}) = g$. Mais, par définition de K''_B, on a $\tilde{g}(\varpi^{n+1}x) \in \varpi^{n+1}x + \varpi B^*$. D'après l'assertion (i) du Lemme 2.6.1, il existe $h \in K'_B$ tel que $h\tilde{g}\varpi^{n+1}x = \varpi^{n+1}x$. On a alors $h\tilde{g} \in K_B(x)$ et $p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(h\tilde{g}) = p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(\tilde{g}) = g$. D'où l'assertion (iii).

(iv) L'inclusion $p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(K_B(x)) \subset Sp(\mathrm{b}^*)(p_{\mathrm{b}^*}(\varpi^n x))$ est claire. Soit donc g et $\tilde{g}$ des éléments respectifs de $Sp(\mathrm{b}^*)(p_{\mathrm{b}^*}(\varpi^n x))$ et K_B tels que $p_{Sp(\mathrm{b}^*)}(\tilde{g}) = g$. On a alors $\tilde{g}\varpi^n x \in \varpi^n x + B$. Utilisant l'assertion (i) du Lemme 2.6.1, on conclut comme pour l'assertion (iii). $\square$

Soit $x \in W$. Il suit du lemme précédent que $x^{-1}K_B(\hat{x})x$ est un sous-groupe de $K_B \ltimes \overline{H}(B^*)$. Rappelons-nous la représentation $\widetilde{S_{\overline{\psi}}}\widetilde{\rho_{\overline{\psi}}}$ de $K_B \ltimes \overline{H}(B^*)$ définie au Paragraphe

4.2 par la formule (4.3). On définit alors la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ du groupe $K_B(\hat{x})$ en posant

$$\sigma_{\dot{x}}(g) = \widetilde{S}_{\overline{\psi}}\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}(xgx^{-1}),\ g \in K_B(\hat{x}) \tag{5.6}$$

(on vérifie que la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ ne dépend que de la classe $\dot{x} \in W/B$).

Supposons que $x \notin B^*$. Il suit de la formule (5.5) que l'on a

$$\sigma_{\dot{x}}(g) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x)\right)\widetilde{S}_{\overline{\psi}}(g)\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}(g^{-1}x - x, 0),\ g \in K_B(\hat{x}). \tag{5.7}$$

De plus, il résulte de l'assertion (ii) du Lemme 5.3.1 que la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ satisfait les relations suivantes qui la déterminent entièrement:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\dot{x}}(g) &= \widetilde{S}_{\overline{\psi}}(g),\ g \in K_B(x),\\
\sigma_{\dot{x}}(h) &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(x, h^{-1}x)\right)\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}(h^{-1}x - x, 0)\\
&= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(hx, x)\right)\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}(x - hx, 0),\ h \in K'_B(\hat{x}).
\end{aligned}$$

Dans la suite, on désigne par $\widetilde{K_B(\hat{x})}$ le sous-groupe $\{\pm Id\}K_B(\hat{x})$ de K_B.

Lorsque $x \in B^*$, $\widetilde{K_B(\hat{x})} = K_B(\hat{x}) = K_B$ et la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ de K_B est équivalente à $\widetilde{S}_{\overline{\psi}} = S_0$ et est réalisée dans le même espace $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}$. On a $-Id \in K_B$ et on note $\mathcal{H}^{\pm}_{\overline{\psi}}$ le sous-espace propre de $-Id$ pour la valeur propre ± 1, lequel est invariant par $\sigma_{\dot{x}}$. On désigne par $\sigma^{\pm}_{\dot{x}}$ la représentation de K_B dans ce sous-espace qui en résulte, lorsque celui-ci est non nul. On a $\mathcal{H}_{\overline{\psi}} = \mathcal{H}^{+}_{\overline{\psi}} \oplus \mathcal{H}^{-}_{\overline{\psi}}$ et donc $\sigma_{\dot{x}} = \sigma^{+}_{\dot{x}} \oplus \sigma^{-}_{\dot{x}}$, lorsque $\mathcal{H}^{-}_{\overline{\psi}}$ est non nul; ceci se produit exactement lorsque $l \neq 0$. Dans le cas contraire, on a $\sigma_{\dot{x}} = \sigma^{+}_{\dot{x}}$.

Supposons que $x \notin B^*$. Dans ce cas, $-Id$ n'appartient pas à $K_B(\hat{x})$. On étend alors la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ en une représentation $\sigma^{\pm}_{\dot{x}}$ du groupe $\widetilde{K_B(\hat{x})}$ en décidant que $\sigma^{\pm}_{\dot{x}}(-Id) = \pm Id$.

Théorème 5.3.1. (i) *Si $l = 0$, $S^{B,+}_0$ est la représentation triviale.*
(ii) *Si $l > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$S^{B,\pm}_n = \operatorname{Ind}^{K_B}_{\widetilde{K_B(\hat{x})}} \sigma^{\pm}_{\dot{x}},\ x \in (\varpi^{-n}B^* \backslash \varpi^{-n}B) + B^*.$$

(iii) *Si $l < r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$S^{B,\pm}_{n,1} = \operatorname{Ind}^{K_B}_{\widetilde{K_B(\hat{x})}} \sigma^{\pm}_{\dot{x}},\ x \in (\varpi^{-(n+1)}B \backslash \varpi^{-n}B^*) + B^*.$$

Démonstration. On utilise la réalisation S^B_ψ de la représentation de Weil dans l'espace $\mathcal{H}^B_\psi$ donnée au Paragraphe 4.2 et l'opérateur d'entrelacement $\mathcal{I}_{A,B}$ entre cette dernière et la réalisation S_ψ^A dans l'espace $\mathcal{H}_\psi^A$.

Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace de $\mathcal{H}_\psi^B$, on désigne par $\mathcal{F}^+$ (resp. $\mathcal{F}^-$) le sous-espace de $\mathcal{F}$ constitué des fonctions paires (resp. impaires).

Si $x \in W$, on désigne par $\mathcal{F}_{\hat{x}}$ le sous-espace de $\mathcal{H}_\psi^B$ constitué des fonctions dont le support est contenu dans $K_B x$, si $x \notin B^*$, et dans B^*, sinon (la définition et la notation sont justifiées parce que, d'après le Lemme 2.6.1 (i), $x + B^* \subset K_B x$, si $x \in W\backslash B^*$). Il est clair que les sous-espaces $\mathcal{F}_{\hat{x}}^\pm$ sont invariants sous l'action de la représentation S_ψ^B restreinte à K_B. D'autre part, il suit du Lemme 2.6.1 (ii) que les K_B-orbites dans $W\backslash B^*$ sont les $\varpi^{-(n+1)}B^*\backslash\varpi^{-(n+1)}B$ et $\varpi^{-(n+1)}B\backslash\varpi^{-n}B^*$, $n \in \mathbb{N}$. Comme l'opérateur d'entrelacement $\mathcal{I}_{A,B}$ conserve les supports et la parité, on déduit de ceci que l'on a

$$\mathcal{I}_{A,B}(\mathcal{F}_{\hat{x}}^\pm) = \mathcal{E}_0^{B\pm},\ x \in B^*,$$
$$\mathcal{I}_{A,B}(\mathcal{F}_{\hat{x}}^\pm) = \mathcal{E}_{n+1}^{B\pm},\ x \in \varpi^{-(n+1)}B^*\backslash\varpi^{-(n+1)}B,\ n \in \mathbb{N},$$
$$\mathcal{I}_{A,B}(\mathcal{F}_{\hat{x}}^\pm) = \mathcal{E}_{n,1}^{B\pm},\ x \in \varpi^{-(n+1)}B\backslash\varpi^{-n}B^*,\ n \in \mathbb{N}.$$

Soit $x \in W$. Désignons par $\mathcal{G}_{\hat{x}}^\pm$ l'espace de la représentation $\mathrm{Ind}_{\widetilde{K_B(\hat{x})}}^{K_B} \sigma_{\hat{x}}^\pm$. Alors, l'application $\varphi \longmapsto \tilde{\varphi}$ définie par $\tilde{\varphi}(g) = \widetilde{S}_{\overline{\psi}}(g)\varphi(g^{-1}x)$, $g \in K_B$, induit un isomorphisme de K_B-modules de $\mathcal{F}_{\hat{x}}^\pm$ sur $\mathcal{G}_{\hat{x}}^\pm$. D'où le théorème. □

5.4. Dans ce paragraphe nous allons mettre en relation les résultats du précédent avec ceux du Paragraphe 3.8, dont nous reprenons les notations.

Soit n un entier naturel. Le sous-ensemble $H(\varpi^{-(n+1)}B) = \varpi^{-(n+1)}B \times \varpi^{\lambda_\psi-1-2(n+1)}\mathcal{O}$ est un sous-groupe K_B-invariant de $H(W)$.

On désigne par $\mathcal{H}_n^B$ le sous-espace de $\mathcal{H}_\psi^B$ constitué des fonctions dont le support est contenu dans $\varpi^{-(n+1)}B$. En fait, $\mathcal{H}_n^B$ est l'espace des fonctions φ définies sur $\varpi^{-(n+1)}B$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}$ de la représentation de Schrödinger de type $\overline{\psi}$ du groupe de Heisenberg $H(\mathrm{b}^*)$, vérifiant la relation (4.1). Il est clairement invariant sous la restriction de S_ψ^B (resp. R_ψ^B) à K_B (resp. $K_B \ltimes H(\varpi^{-(n+1)}B)$): on note $S_\psi^{B,n}$ (resp. $R_\psi^{B,n}$) la représentation de K_B (resp. $K_B \ltimes H(\varpi^{-(n+1)}B)$) induite par cette dernière dans $\mathcal{H}_n^B$.

Soit ψ_{2n+1} le caractère primitif de O_{2n+1} défini par

$$\psi_{2n+1}(p_{O_{2n+1}}(t)) = \psi(\varpi^{\lambda_\psi-2(n+1)}t),\ t \in \mathcal{O}.$$

On considère le O_{2n+1}-module symplectique $\mathrm{b}_{2n+1} = B/\varpi^{2(n+1)}B^*$ et le sous-module isotrope $Sp(\mathrm{b}_{2n+1})$-invariant maximal $\mathrm{u} = \varpi^{n+1}B/\varpi^{2(n+1)}B^*$ (voir le Lemme 3.8.1). On rappelle la représentation $\rho_{\mathrm{u}^\perp,\psi_{2n+1}}$ de $H(\mathrm{u}^\perp)$, inflation de la représentation de Schrödinger $\rho_{\overline{\mathrm{u}^\perp},\psi_{2n+1}}$ de type ψ_{2n+1} de $H(\overline{\mathrm{u}^\perp})$.

Soit $\mu : \mathbb{F}_q \longrightarrow O_{2n+1}$ l'application définie par:

$$\mu(p_{\mathbb{F}_q}(t)) = p_{O_{2n+1}}(\varpi^{2n+1}t),\ t \in \mathcal{O}.$$

Il est immédiat que μ induit un isomorphisme de $\mathbb{F}_q$-modules de $\mathbb{F}_q$ sur l'idéal minimal

$\varpi^{2n+1}\mathcal{O}/\varpi^{2(n+1)}\mathcal{O}$. De plus, on a

$$\psi_{2n+1} \circ \mu = \overline{\psi}. \tag{5.8}$$

L'application $\mu_* : H(\mathrm{b}^*) \longrightarrow H(\overline{\mathrm{u}^\perp})$ définie par:

$$\mu_*(p_{\mathrm{b}^*}(x), t) = (p_{\mathrm{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x), \mu(t)),\ x \in B^*,\ t \in \mathbb{F}_q, \tag{5.9}$$

est un morphisme injectif de groupes. Il suit de la relation (5.8) que la représentation $\rho_{\overline{\mathrm{u}^\perp},\psi_{2n+1}} \circ \mu_*$ est la représentation de Schrödinger de type $\overline{\psi}$ de $H(\mathrm{b}^*)$. On peut donc supposer que $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}$ est également l'espace de la représentation $\rho_{\overline{\mathrm{u}^\perp},\psi_{2n+1}}$ et écrire alors

$$\rho_{\overline{\psi}} = \rho_{\overline{\mathrm{u}^\perp},\psi_{2n+1}} \circ \mu_*. \tag{5.10}$$

Par suite, la représentation de Weil $S_{\overline{\psi}}$ de type $\overline{\psi}$ de $Sp(\mathrm{b}^*)$ est également une représentation de Weil de type ψ_{2n+1} de $Sp(\overline{\mathrm{u}^\perp})$. On choisit alors pour représentation de Weil de type ψ_{2n+1} de $Sp(\mathrm{b}_{2n+1})$ relative au morphisme $r_\mathrm{u} : Sp(\mathrm{b}_{2n+1}) \longrightarrow Sp(\overline{\mathrm{u}^\perp})$ la représentation $\sigma = S_{\overline{\psi}} \circ r_\mathrm{u}$.

On note $\mathcal{H}_n$ l'espace de la représentation

$$R^{\mathrm{u},\sigma} = \mathrm{Ind}_{Sp(\mathrm{b}_{2n+1})\ltimes H(\mathrm{u}^\perp)}^{Sp(\mathrm{b}_{2n+1})\ltimes H(\mathrm{b}_{2n+1})}\, \sigma\rho_{\mathrm{u}^\perp,\psi_{2n+1}}. \tag{5.11}$$

La restriction $S^{\mathrm{u},\sigma}$ de la représentation $R^{\mathrm{u},\sigma}$ à $Sp(\mathrm{b}_{2n+1})$ est une représentation de Weil de type ψ_{2n+1}.

Il suit de la relation (3.15) que l'espace de la représentation $R^{\mathrm{u},\sigma}$ s'identifie, via l'application de restriction au sous-ensemble b_{2n+1} du sous-groupe $H(\mathrm{b}_{2n+1})$ du produit semi-direct $Sp(\mathrm{b}_{2n+1}) \ltimes H(\mathrm{b}_{2n+1})$, à l'espace des fonctions φ définies sur b_{2n+1}, à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}$ de la représentation $\rho_{\mathrm{u}^\perp,\psi_{2n+1}}$, qui vérifient la relation

$$\varphi(x+u) = \psi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\beta_{\mathrm{b}_{2n+1}}(x,u)\right)\rho_{\mathrm{u}^\perp,\psi_{2n+1}}(u)\varphi(x),\ x \in \mathrm{b}_{2n+1},\ u \in \mathrm{u}^\perp. \tag{5.12}$$

L'application $p : K_B \ltimes H(\varpi^{-(n+1)}B) \longrightarrow Sp(\mathrm{b}_{2n+1}) \ltimes H(\mathrm{b}_{2n+1})$ définie par:

$$p(g(x,t)) = p_{Sp(\mathrm{b}_{2n+1})}(g)(p_{\mathrm{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x), p_{O_{2n+1}}(\varpi^{2(n+1)-\lambda}t)),$$

$g \in K_B$, $(x,t) \in H(\varpi^{-(n+1)}B)$, est un morphisme surjectif de groupes.

LEMME 5.4.1. (i) *Si φ est un élément de $\mathcal{H}_n$, l'application φ^B définie sur $\varpi^{-(n+1)}B$ par*

$$\varphi^B(x) = \varphi(p_{\mathrm{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x)),\ x \in \varpi^{-(n+1)}B,$$

est un élément de $\mathcal{H}_n^B$.

(ii) *L'application* $\varphi \mapsto \varphi^B$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}_n$ *sur* $\mathcal{H}_n^B$ *qui entrelace les représentations* $S^{\mathrm{u},\sigma} \circ p_{Sp(\mathrm{b}_{2n+1})}$ *et* $S_{\psi}^{B,n}$ *de* K_B.

(iii) *Soit* $x \in \varpi^{-(n+1)}B$ *et* $\varphi \in \mathcal{H}_n$. *Alors dire que le support de* φ^B *est contenu dans* $K_B x$ *est équivalent à dire que le support de* φ *est contenu dans l'orbite de* $p_{\mathrm{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x)$ *modulo* $\mathrm{u}^{\perp}$ *sous l'action de* $Sp(\mathrm{b}_{2n+1})$.

Démonstration. (i) Soit $\varphi \in \mathcal{H}_n$. Soit $x \in \varpi^{-(n+1)}B$ et $b \in B^*$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\varphi^B(x+b) &= \varphi(p_{\mathrm{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}(x+b))) \\
&= \psi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\beta_{\mathrm{b}_{2n+1}}(p_{\mathrm{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x), p_{\mathrm{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}b))\right) \\
&\quad \times \rho_{\mathrm{u},\psi_{2n+1}}(p_{\mathrm{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}b))\varphi^B(x) \\
&= \psi_{2n+1}\left(p_{O_{2n+1}}\left(\varpi^{2(n+1)-\lambda}\frac{1}{2}\beta(x,b)\right)\right)\rho_{\mathrm{u},\psi_{2n+1}} \circ \mu_*(p_{\mathrm{b}^*}(b))\varphi^B(x) \\
&= \psi_{2n+1} \circ \mu\left(p_{\mathbb{F}_q}\left(\varpi^{1-\lambda}\frac{1}{2}\beta(x,b)\right)\right)\rho_{\mathrm{u},\psi_{2n+1}} \circ \mu_*(p_{\mathrm{b}^*}(b))\varphi^B(x) \\
&= \overline{\psi}\left(p_{\mathbb{F}_q}\left(\varpi^{1-\lambda}\frac{1}{2}\beta(x,b)\right)\right)\rho_{\overline{\psi}}(p_{\mathrm{b}^*}(b))\varphi^B(x) \\
&= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(x,b)\right)\widetilde{\rho}_{\overline{\psi}}(b)\varphi^B(x),
\end{aligned}$$

montrant que φ^B satisfait la relation (4.1).

(ii) Il est clair que l'application $\varphi \mapsto \varphi^B$ est injective. Réciproquement, soit $\varphi \in \mathcal{H}_n^B$. La relation (4.1) satisfaite par φ, montre qu'il existe une unique fonction φ^{u} définie sur b_{2n+1} et à valeurs dans $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}$ telle que

$$\varphi^{\mathrm{u}}(p_{\mathrm{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x)) = \varphi(x),\ x \in \varpi^{-(n+1)}B$$

et que cette fonction satisfait la relation (5.12). Ceci montre que l'application $\varphi \mapsto \varphi^B$ est bien une bijection linéaire de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{H}_n^B$. Le fait que ce soit un opérateur d'entrelacement est facile et est laissé au lecteur.

(iii) est clair. □

Il suit de l'assertion (iii) du lemme précédent que, pour tout $x \in \varpi^{-(n+1)}B$, l'application $\varphi \mapsto \varphi^B$ induit un isomorphisme entre les représentations $S^{\pm}_{p_{\mathrm{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x)} \circ p_{Sp(\mathrm{b}_{2n+1})}$ et $S^{\pm}_{\dot{x}}$ de K_B. En particulier, la décomposition en irréductibles de la restriction à K_B de la représentation de Weil de $Sp(W)$ se ramène à la décomposition en irréductibles des représentations de Weil des groupes symplectiques $Sp(\mathrm{b}_{2n+1})$ sur l'anneau local fini O_{2n+1}, démontrée dans le Théorème 3.8.1.

Remarque. La décomposition en irréductibles de la restriction à K_B de la représentation de Weil a été obtenue par D. Prasad dans [**13**] dans le cas où $B = B^*$, i.e.

K_B est le compact maximal standard. Dans [**4**] G. Cliff, D. McNeilly et F. Szechtman remarquent que leurs résultats concernant la représentation de Weil de $Sp(W)$ lorsque W est un module symplectique libre sur un anneau fini local et principal, permettent d'obtenir la décomposition en irréductibles de la restriction à K_B de la représentation de Weil également lorsque $B = \varpi B^*$, i.e. K_B n'est pas dans la classe de conjugaison du compact maximal standard, mais lui est conjugué par le groupe des similitudes symplectiques.

Références

[1] F. Bruhat et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, I, Données radicielles valuées, Publ. Math. I. H. É. S., **41** (1972), 5–251.

[2] F. Bruhat et J. Tits, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, Deuxième Partie: groupes unitaires, Bull. Soc. Math. France, **115** (1987), 141–195.

[3] G. Cliff, D. McNeilly et F. Szechtman, Weil representations of symplectic groups over rings, J. London Math. Soc. (2), **62** (2000), 423–436.

[4] G. Cliff, D. McNeilly et F. Szechtman, Clifford and Mackey theory for Weil representations of symplectic groups, J. Algebra, **262** (2003), 348–379.

[5] M. Duflo, Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques, Acta. Math., **149** (1982), 153–213.

[6] K. Dutta et A. Prasad, Combinatorics of finite abelian groups and Weil representations, Pacific J. Math., **275** (2015), 295–324.

[7] W. Klingenberg, Symplectic groups over local rings, Amer. J. Math., **85** (1963), 232–240.

[8] G. Lion et M. Vergne, The Weil representation, Maslov index and theta series, Progress in Math., **6**, Birkhaüser, Boston, Basle, Stuttgart, 1980.

[9] K. Maktouf et P. Torasso, Restriction de la représentation de Weil à un sous-groupe compact maximal ou à un tore maximal elliptique, arXiv:1101.0560v3.

[10] C. Moeglin, M.-F. Vignéras et J.-L. Waldspurger, Correspondance de Howe sur un corps p-adique, Lecture Notes in Math., **1291**, Springer-Verlag, 1987.

[11] C. C. Moore, Group extensions of p-adic and adelic linear groups, Publ. Math. I. H. E. S., **35** (1968), 5–70.

[12] S.-Y. Pan, Splittings of metaplectic covers of some reductive dual pairs, Pacific J. Math., **199** (2001), 163–226.

[13] D. Prasad, A brief survey on the Theta correspondence, Number theory, (Tiruchirapalli, 1996), Providence, RI, (éds. K. Murty et M. Waldschmidt), Contemporary Math., **210**, Amer. Math. Soc., 1998, 171–193.

[14] R. Rao, On some explicit formulas in the theory of the Weil representation, Pacific J. Math., **157** (1993), 335–371.

[15] R. Steinberg, Génerateurs, relations et revétements de groupes algébriques, Colloque sur la Théorie des Groupes Algébriques, (Bruxelles, 1962), (éd. C. B. de Recherches Mathématiques), Gauthier-Villars, 1962, 113–128.

[16] J.-L. Waldspurger, Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989), Weizmann, Jerusalem, Israel Math. Conf. Proc., **2**, 1990, 267–324.

[17] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta. Math., **111** (1964), 143–211.

Khemais Maktouf
Université de Monastir
Faculté des Sciences de Monastir
Département de Mathématiques
5019 Monastir, Tunisie
E-mail: khemais.maktouf@fsm.rnu.tn

Pierre Torasso
UMR 7348 CNRS
Université de Poitiers
Laboratoire de Mathématiques et Applications
Boulevard Marie et Pierre Curie
BP 30179
86962 Chasseneuil Cedex, France
E-mail: pierre.torasso@math.univ-poitiers.fr