J. Math. Soc. Japan
Vol. 53, No. 2, 2001

Conjectures sur le spectre résiduel

By Colette MOEGLIN

(Received Oct. 5, 1998)
(Revised Nov. 15, 1999)

Abstract. The problem discussed in that paper is to find a characterization on the Arthur's conjectural parameters for the representations occuring in the residual spectrum for a classical group. Only conjectures are given but it is proved that the global conjectures can be reduced to very natural local conjectures, in the case of cohomological square integrable automorphic forms.

Soit G un groupe réductif défini sur un corps de nombres k. Dans cette note, on donne une conjecture pour qu'une représentation automorphe de carré intégrable du groupe $G(\boldsymbol{A})$ ($\boldsymbol{A}$ sont les adèles de k) ne soit pas cuspidale. Les spécialistes savent qu'il doit y avoir une condition globale (non nullité de certaines fonctions L) et des conditions locales portant sur les opérateurs d'entrelacement normalisés convenablement. Ci-dessous on suggère que ces conditions sont plus simples qu'il n'y paraît et peuvent se lire directement sur les objets qu'Arthur a associés aux représentations de carré intégrable [$\mathbf{A}_1$ et $_2$]. Dans cette note, on admet les conjectures d'Arthur. Je suppose que les constructions faites ci-dessous pourraient s'écrire dans un cadre totalement général, mais pour rester concret, on a choisi de se limiter aux groupes réductifs pour lesquel le L-groupe est un groupe classique. Plus précisément on suppose qu'il existe un espace vectoriel complexe, V (de dimension finie) et que l'on est dans l'un des 2 cas suivants:

• il existe Φ une forme bilinéaire non dégénérée sur V tel que

$$^{L}G \simeq \mathrm{Aut}(\Phi, V) \times W_k$$

ou seulement le groupe des automorphismes de déterminant 1.

• il existe une extension quadratique k' de k et une action de W_k sur $\mathrm{Aut}(V)$ se factorisant par $\mathrm{Gal}(k'/k)$ tel que:

$$^{L}G \simeq \mathrm{GL}(V) \propto W_k.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 11F70, 11S40, 11R39, 22E55.
Key Words and Phrases. residual spectrum for classical groups, Arthur's parameters, intertwining operators, parabolic induction, residues of Eisenstein series, cohomological automorphic forms.

Remarquons que cette situation s'applique aux groupes suivants:

- *cas 1:* G est un groupe symplectique ou orthogonal (non nécessairement déployé) opérant sur un espace Y; alors on pose $V = Y^*$ où si Y est symplectique, Y^* est un espace orthogonal complexe de dimension 1 de plus que Y, si Y est orthogonal de dimension impaire (G étant alors le groupe spécial orthogonal), Y^* est un espace symplectique de dimension paire et si Y est orthogonal de dimension paire, on prend bien pour G le groupe orthogonal et non pas le groupe spécial orthogonal et Y^* est l'espace orthogonal complexe de même dimension que Y. Ce dernier cas peut surprendre; il est suggéré par les constructions locales de [**Ad**] et [$\mathbf{M_1}$]. Il faut remarquer que quand on localise en une place finie, les objets que l'on associe aux représentations dans le ^{L}-groupe reflète l'invariant de Hasse et le discriminant de la forme (cf. [$\mathbf{M_1}$]).
- *cas 2:* G est un groupe unitaire.

A la fin de l'article, on démontre la partie globale des conjectures pour les représentations ayant de la cohomologie ou plus généralement ayant un caractère infinitésimal entier régulier. Dans ce cas, il reste donc à démontrer des conjectures locales sur les opérateurs d'entralecement, données en **5**, mais c'est certainement très difficile.

Décrivons maintenant plus précisément l'article:

Pour unifier les deux cas considérés, on pose dans le premier cas considéré ci-dessus $k' = k$. Soit π une représentation automorphe irréductible de carré intégrable de $G(\boldsymbol{A})$. Les conjectures d'Arthur associent à une telle représentation 2 objets; ici L_k est le groupe tannakien conjecturalement associé par Langlands à k; on utilisera le fait que L_k contient pour toute place v le groupe de Weil-Deligne local, $W_{k_v} \times SU(2, \boldsymbol{R})$;

• un homomorphisme Ψ de $L_k \times SL(2, \boldsymbol{C})$ dans ${}^LG$ qui a un certain nombre de propriétés et en particulier dont l'image n'est pas incluse dans le L-groupe d'un Levi d'un parabolique propre de G défini sur k; pour toute place v de k, on note Ψ_v la restriction de Ψ à $W_{k_v} \times SU(2, \boldsymbol{R}) \times SL(2, \boldsymbol{C})$;

• une collection de caractères (représentations a priori non nécessairement irréductibles) (ε_v) du groupe des composantes de

$$Cent_{{}^LG^0} \operatorname{Im} \Psi_v$$

triviaux sauf en un nombre fini de places, satisfaisant une condition globale que nous n'avons pas besoin de rappeler ici. Arthur a imposé que ces caractères soient triviaux pour tout v sur le centre de $Cent_{{}^LG(k_v)^0}\, {}^LG(k_v)$, en précisant que cette condition est négociable; on ne la fait pas ici où on impose plutôt les conditions de [$\mathbf{M_1}$]. Mais ceci n'a aucune importance pour ce qui suit où nous n'avons pas besoin d'une description explicite des ε_v.

La non-irréductibilité des caractères ε_v est nécessaire dans certains cas connus, mais nous pouvons ici raisonnablement supposer que ces caractères sont irréductibles. Il n'y a de toute façon aucun problème à généraliser les conjectures ci-dessous sans supposer l'irréductibilité. Aux places archimédiennes et pour les représentations ayant de la cohomologie, l'irréductibilité est justifiée par les travaux d'Adams et Johnson [**Ad-J**].

Un point apparamment plus sérieux est le fait que les ε_v ne sont pas canoniquement définis. Toutefois, je n'ai pas à utiliser tout le caractère ε_v mais seulement sa restriction à certains sous-groupes précisés dans le texte. Or je pense que pour cette restriction la définition est canonique. Quoiqu'il en soit, la seule chose que je demande ici est que des choix aient été faits de façon cohérente pour le groupe G et ses sous-groupes de Levi.

Si Ψ et (ε_v) sont associés à la représentation π, on dit que $\pi \in \Pi(\Psi, (\varepsilon_v))$.

Dans tout l'article, on dit que M est un sous-groupe de Levi de G, s'il existe un sous-groupe parabolique de G défini sur k admettant M comme k-sous groupe de Levi.

Conjecture. *Si π n'est pas cuspidale, il existe un sous-goupe de levi M propre maximal de G et des données d'Arthur $\Psi_M, (\varepsilon_{M,v})$ pour le groupe M tels que Ψ soit "induit" par Ψ_M; ceci détermine un demi-entier positif s_0 et une représentation irréductible λ_0 de $L_{k'}$ (cf.* **1**). *Les propriétés suivantes étant satisfaites:*

le paquet pour M associé à Ψ_M et $(\varepsilon_{M,v})$ est non vide,

(ε_v) est totalement compatible (cf. **2**) *à $(\varepsilon_{M,v})$ (c'est un peu plus fort, mais de même nature, que de demander que, pour tout v, les caractères ε_v et $\varepsilon_{M,v}$ ont même restriction sur l'intersection des groupes sur lesquels ils sont définis)*

et notons $r_{^LM}$ la représentation de L_k dans le radical unipotent d'un parabolique de ^LG de Levi ^LM obtenue via

$$Ad \circ \left(\Psi_{M,|L_k} \otimes \Psi_{M,|SL(2,\boldsymbol{C})} \begin{pmatrix} ||^{1/2} & 0 \\ 0 & ||^{-1/2} \end{pmatrix} \right);$$

on peut la tordre naturellement par $s \in \boldsymbol{C}$ pour tenir compte des caractères de $M(\boldsymbol{A})$. Alors, pour toute représentation irréductible σ de $L_{k'}$ tel que $L(\sigma, 1/2) = 0$ les multiplicités des représentations $\sigma||^{\pm 1/2}$ dans la représentation $r_{^LM,s_0}$ sont égales.

Pour la réciproque, il faut être prudent, comme me l'a fait remarquer le referee; et ce qu'il est raisonable de conjecturer est:

soit $(\Psi, (\varepsilon_v))$ et $(\Psi_M, (\varepsilon_{M,v}))$ comme dans la condition ci-dessus et supposons précisément que ces données sont liées comme dans la condition ci-dessus. Alors il existe une représentation automorphe de carré intégrable, π, telle que $\pi \in \Pi(\Psi, (\varepsilon_v))$ et π est un résidu de série d'Eisenstein (que l'on peut construire explicitement à l'aide de π_M et s_0).

Avec les notations introduites à la fin de l'énoncé ci-dessus, la définition de l'induction entraîne que si Ψ est induit par Ψ_M en notant, pour $\varepsilon \in \{-1,0,1\}$, $[r_{{}^L M,s_0},\varepsilon]$ la multiplicité de la représentation $\|^{\varepsilon}$ de $L_{k'}$ dans $r_{{}^L M,s_0}$:

$$[r_{{}^L M,s_0},1] > [r_{{}^L M,s_0},0] = [r_{{}^L M,s_0},-1]. \tag{1}$$

Cette condition ne dépend que de Ψ_M et s_0; si elle est vérifiée Ψ se décrit alors assez aisément (cela est fait au **1**). Cette condition et la condition de la dernière partie de l'énoncé assurent que la fonction:

$$L(r_{{}^L M},s)/L(r_{{}^L M},s+1)$$

a un pôle en $s=s_0$. On peut alors espérer construire des résidus de séries d'Eisenstein de carré intégrable et c'est la condition sur les (ε_v) et $(\varepsilon_{M,v})$ qui est là pour assurer que π est réalisé dans l'ensemble de ces résidus. Mais la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'il y a d'autres points où les séries d'Eisenstein peuvent avoir des résidus de séries d'Eisenstein mais la conjecture dit alors que l'espace engendré a déjà été obtenu en ne considérant que les paramètres satisfaisant à l'énoncé. (cf la fin de **4** pour une discussion plus détaillée.)

On peut encore expliquer d'où vient la représentation λ_0. Il faut fixer M un sous-groupe de Levi d'un parabolique propre maximal de G et π_M une représentation de carré intégrable de $M(\boldsymbol{A})$ et supposons qu'on ait pu lui associer $\Psi_M,(\varepsilon_{M,v})$ suivant les conjectures d'Arthur. Comme M a un facteur $GL(k',b)$ (où $b \in \boldsymbol{N}$ est convenable). La restriction de π_M à ce facteur détermine un diviseur a de b et une unique représentation cuspidale unitaire ρ_0 de $GL(\boldsymbol{A}_{k'},b/a)$ de telle sorte que cette restriction soit le module de Speh associé à ρ_0 et a (cf. [M-W]). A ρ_0 on associe, conjecturalement, une représentation irréductible bornée de $L_{k'}$, λ_0. On peut alors définir $P_0 \subset \boldsymbol{R}_{>0}$ comme l'ensemble des points $s=s_0$ où (1) est vrai; grâce à un élément s_0 de P_0, on peut alors construire un homomorphisme Ψ et on peut alors réécrire la conjecture ci-dessus sous la forme:

Conjecture. *Les séries d'Eisenstein à partir de π_M ont un pôle en $s=s_0$ avec résidu de carré intégrable si et seulement si λ_0 est autoduale dans le cas des groupes orthogonaux ou symplectiques et est isomorphe à la conjuguée de la représentation duale sous* Gal(k'/k) *dans le cas des groupes unitaires et il existe une famille de caractères (ε_v) où v parcourt l'ensemble des places de k des groupes $Cent_{{}^L G^0}\Psi_{|L_{k_v}\times SL(2,\boldsymbol{C})}$ totalement compatible à la famille des $(\varepsilon_{M,v})$ et la dernière condition de la conjecture précédente est vraie.*

Toutes les représentations de carré intégrable non cuspidale de $G(\boldsymbol{A})$ se réalise dans l'un de ces espaces de résidus quand M, $\Psi_M,(\varepsilon_{M,v})$ varient.

Une remarque amusante est que pour Ψ comme dans cette introduction, il existe M,Ψ_M,λ_0,s_0 tel que Ψ soit induit par Ψ_M si et seulement si la restriction de Ψ à $SL(2, \boldsymbol{C})$ n'est pas triviale. La conjecture dit que pour que le paquet associé à Ψ contienne des représentations non cuspidales il faut une condition globale bien naturelle puisqu'elle assure que le quotient de fonctions L a un pôle. Et il me semble que cette condition est alors aussi suffisante, c'est-à-dire que l'on peut toujours trouver des systèmes de caractères $(\varepsilon_{M,v})$ et (ε_v) totalement compatibles.

Dans cet article, on étudie spécialement le cas des représentations ayant de la cohomologie à l'infini (pour un bon système de coefficients). Dans ce cas, on ramène la conjecture globale à une conjecture locale sur les opérateurs d'entrelacement expliquée au paragraphe **5**.

Je remercie vivement le referee qui m'a permis d'améliorer mes conjectures.

1. Définition de l'induction.

Dans ce paragraphe, on va décrire explicitement la notion d'induction; c'est à mon avis le seul moyen de comprendre ce qui se passe. L'idée de départ est la suivante: on suppose ici que $k' = k$, pour qu'un homomorphisme Ψ de $L_k \times SL(2, \boldsymbol{C})$ soit induit par un sous-groupe parabolique P défini sur k de Levi M défini sur k, il faut que $\Psi(L_k)$ soit inclus dans ${}^L M$; on note R le commutant de $\Psi(L_k)$ dans ${}^L G$ et R_P son intersection avec ${}^L P$; on peut vérifier que R_P est un sous-groupe parabolique du groupe réductif R de Levi $R_M := R \cap M$. On a envie de demander que $\Psi(SL(2, \boldsymbol{C}))$ qui est uniquement déterminé par une orbite unipotente de R corresponde à une orbite unipotente de R induite à partir d'une orbite unipotente de R_M. Cela est correct si les représentations dans le paquet correspondant à Ψ ont un caractère infinitésimal entier régulier ou plus généralement si l'orbite unipotente correspondant à $\Psi(SL(2, \boldsymbol{C}))$ est l'orbite unipotente régulière de R, mais ce n'est pas assez général pour l'ensemble des représentations de carré intégrable. On donne donc une définition plus compliquée. On revient évidemment au cas général où k' n'est pas nécessairement égal à k.

On fixe π comme ci-dessus et on suppose qu'on sait lui associer Ψ et (ε_v) en suivant les conjectures d'Arthur. On remarque que $L_{k'}$ est envoyé par Ψ dans le produit direct $GL(V) \times W_{k'}$ et opère donc naturellement sur V. On décompose V sous cette action:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \hat{L}_{k'}} V[\lambda],$$

où $V[\lambda]$ est la composante isotypique associée à la représentation irréductible λ; on fixe un espace V_λ pour λ. On rappelle que les hypothèses imposées par Arthur assure que si l'on voit λ comme une représentation irréductible de $L_{k'}$ dans $GL(V_\lambda)$, alors la représentation cuspidale irréductible de $GL(\boldsymbol{A}_{k'}$ qui doit lui correspondre est unitaire). L'action de $\Psi(SL(2, \boldsymbol{C}))$ permet de décomposer encore chaque $V[\lambda]$ sous cette action. Dans le premier cas, i.e. $k' = k$, Henniart a remarqué que l'hypothèse que l'image de Ψ n'est pas centralisée par le L-groupe d'un tore déployé sur k entraîne que si $V[\lambda] \neq 0$ alors λ est isomorphe à la représentation duale.

En effet, fixons λ tel que $V[\lambda] \neq 0$. L'orthogonal pour Φ de $V[\lambda]$ est $\bigoplus_{\lambda' \neq \lambda^*} V[\lambda']$. Ainsi, si $\lambda \not\simeq \lambda^*$, $V[\lambda]$ est un sous-espace isotrope de V stabilisé par l'image de Ψ. Remarquons aussi que cela entraîne que λ est soit symplectique soit orthogonal et donc la décomposition de $V[\lambda]$ sous l'action de $\Psi(SL(2, \boldsymbol{C}))$ se fait en somme de représentations irréductibles (intervenant avec multiplicité 1) dont les dimensions ont toutes même parité.

Le cas 2 est légèrement différent, on n'a pas la condition de parité mais on verra ci-dessous, qu'il est seulement faussement différent.

Soit M un sous-groupe de Levi d'un parabolique propre maximal de G défini sur k; il correspond dualement à une décomposition de V en:

$$V = V_0 \oplus X \oplus X^*.$$

La première condition que Ψ doit satisfaire pour être induit à partir de M est que l'image $\Psi(L_{k'})$ doit stabiliser V_0 ainsi que X et X^*. Supposons que cette condition soit satisfaite.

On suppose ici que $k' = k$. Sous l'action de $\Psi(L_k)$ on a une décomposition de X et de X^* et la propriété de dualité assure que:

$$X[\lambda] \neq 0 \Leftrightarrow X^*[\lambda] \neq 0.$$

On peut alors changer de Levi M de tel sorte que $X[\lambda] = 0$ pour tout λ sauf une unique représentation λ_0. C'est une simplification essentiellement technique qui revient à considérer des séries d'Eisenstein à partir du spectre discret des sous-groupes de Levi et non de $\mathscr{A}_{log}$ notation de [**F**].

Supposons maintenant que k' est une extension quadratique de k. Ici le fait que M soit un sous-groupe de Levi d'un parabolique propre de G défini sur k se traduit par le fait que $GL(X)$ et $GL(X^*)$ sont échangés sous l'action de $\mathrm{Gal}(k'/k)$. Pour λ une représentation irréductible de $L_{k'}$, on note ${}^{\tau}\lambda^*$ l'image de λ^* (la représentation contragrédiente de λ) après conjugaison de $\mathrm{Gal}(k'/k)$ sur $L_{k'}$. La multiplicité de λ dans X est égal à la multiplicité de ${}^{\tau}\lambda$ dans X^*. En outre, pour un tel λ le centre de $GL(V[\lambda])$ centralise $\Psi(L_{k'} \times SL(2, \boldsymbol{C}))$. Si λ n'est pas isomorphe à ${}^{\tau}\lambda^*$ le centralisateur de l'image de Ψ n'est pas fini. Ainsi certainement $\lambda \simeq {}^{\tau}\lambda^*$. Comme ci-dessus, on se ramène au cas où $X[\lambda] = 0$ sauf pour une représentation λ_0.

On considère la décomposition de $V[\lambda_0]$ sous l'action de $\Psi(SL(2, \boldsymbol{C}))$. Cette décomposition se fait sans multiplicité grâce à l'hypothèse que l'image de Ψ

n'est pas incluse dans le L-groupe d'un Levi d'un parabolique propre de G défini sur k. On écrit cette décomposition:

$$\alpha: \quad V[\lambda_0] \simeq: \bigoplus_{\mu} V_{\lambda_0} \otimes Y_\mu,$$

où μ parcourt un sous-ensemble fini des entiers et Y_μ représentation la représentation de $SL(2, \boldsymbol{C})$ de dimension μ et où V_{λ_0} est une représentation irréductible de $L_{k'}$ de type λ_0.

Pour que Ψ soit induit à partir de M, on demande qu'il existe soit $\mu_0 > 2\dim X/\dim V_{\lambda_0}$ soit $\mu_0' > \mu_0'' \geq 0$ tels que $(\mu_0' + \mu_0'')/2 = \dim X/\dim V_{\lambda_0}$ (donc en particulier $\mu_0' \leq 2\dim X/\dim V_{\lambda_0}$) et tel que dans l'isomorphisme α ci-dessus

$$\bigoplus_{\mu \neq \mu_0 \;\; ou \;\; \mu_0', \mu_0''} V_{\lambda_0} \otimes Y_\mu \hookrightarrow V_0[\lambda_0].$$

Dans le cas des groupes unitaires μ_0'' est nécessairement 0. Comme on verra ci-dessous cela est nécessaire pour que $\Psi(SL(2, \boldsymbol{C}))$ soit dans le commutant de $\Psi(L_k)$ et non seulement $\Psi(L_{k'})$.

On peut alors définir Ψ_M de telle sorte que sa restriction à L_k coïncide avec celle de Ψ et de telle sorte que l'action de $SL(2, \boldsymbol{C})$ (définie par Ψ_M) coïncide avec celle de Ψ sur $\bigoplus_{\lambda \neq \lambda_0} V[\lambda]$ ainsi que sur l'image de $\bigoplus_{\mu \neq \mu_0 \;\; ou \;\; \mu_0', \mu_0''} V_{\lambda_0} \otimes Y_\mu$ avec plus précisément, dans le premier cas:

$$V_0 \simeq \left(\bigoplus_{\lambda \neq \lambda_0} V[\lambda] \right) \oplus \left(\bigoplus_{\mu \neq \mu_0} V_{\lambda_0} \otimes Y_\mu \right) \oplus \left(V_{\lambda_0} \otimes Y_{\mu_0 - 2\dim X/\dim V_{\lambda_0}} \right)$$

et dans le deuxième cas:

$$V_0 \simeq \left(\bigoplus_{\lambda \neq \lambda_0} V[\lambda] \right) \oplus \left(\bigoplus_{\mu \neq \mu_0', \mu_0''} V_{\lambda_0} \otimes Y_\mu \right)$$

tandis que dans les 2 cas

$$X \simeq X^* \simeq V_{\lambda_0} \otimes Y_{\dim X/\dim V_{\lambda_0}}.$$

On demande en plus la condition technique suivante: si Y_μ intervient dans la décomposition de $V[\lambda_0]$ avec μ de même parité que μ_0 ou μ_0', μ_0'', on a:

$$\mu \notin [\mu_0 - 2\dim X/\dim V_{\lambda_0}, \mu_0]$$

ou

$$\mu \notin [\mu_0'', \mu_0'].$$

La condition de parité n'est réelle que pour les groupes unitaires.

On va maintenant interpréter ces conditions comme dans l'introduction en terme de multiplicité des représentations qui donnent des pôles aux fonctions L en 0 ou 1, c'est-à-dire les représentation $||^{\varepsilon}$ de $L_{k'}$ où $\varepsilon = -1, 0, 1$. On a besoin de quelques constructions supplémentaires pour définir les représentations dont on parle:

Fixons $\lambda \in \hat{L_{k'}}$. On note $||$ la valeur absolue sur $L_{k'}$ (c'est le produit des valeurs absolues locales). On obtient une représentation de $L_{k'}$ dans $V[\lambda]$ grâce à

$$\Psi_{|L_{k'}} \otimes \Psi_{M,|SL(2,\boldsymbol{C})}\begin{pmatrix} ||^{1/2} & 0 \\ 0 & ||^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Cette torsion a été introduite par Arthur. Cette représentation laisse stable $X[\lambda_0]$ et $X^*[\lambda_0]$.

On pose, pour $\lambda \neq \lambda_0$:

$$\mathfrak{u}_{\lambda_0,\lambda} := \mathrm{Lie}\, {}^L G^0 \cap (\mathrm{Hom}(X[\lambda_0], V_0[\lambda]) \oplus \mathrm{Hom}(V_0[\lambda], X^*[\lambda_0])).$$

En composant avec les représentations de $L_{k'}$ définies précédemment, on obtient une représentation naturelle de $L_{k'}$ dans $\mathfrak{u}_{\lambda_0,\lambda}$ que l'on note $r_{\lambda_0,\lambda}$. Si $\lambda = \lambda_0$, on définit:

$$\mathfrak{u}_{\lambda_0,\lambda_0} := \mathrm{Lie}\, {}^L G^0 \cap (\mathrm{Hom}(X[\lambda_0], V_0[\lambda_0]) \oplus \mathrm{Hom}(V_0[\lambda_0], X^*[\lambda_0]) \oplus \mathrm{Hom}(X[\lambda_0], X^*[\lambda_0])).$$

Et on définit r_{λ_0,λ_0} en tordant Ψ comme ci-dessus.

Pour définir les fonctions L, on introduit un paramètre supplémentaire $s \in \boldsymbol{C}$; pour s fixé dans $\boldsymbol{C}$, on note $r_{\lambda_0,\lambda,s}$ la représentation obtenue de façon identique à $r_{\lambda_0,\lambda}$ mais où la torsion introduite dépend de s:

$$\Psi_{|L_{k'}} \otimes \Psi_{M,|SL(2,\boldsymbol{C})}\begin{pmatrix} ||^{1/2} & 0 \\ 0 & ||^{-1/2} \end{pmatrix} \otimes i_s,$$

où i_s est un homomorphisme de $L_{k'}$ dans le centre de ${}^L M$ de tel sorte que $i_s(L_{k'})$ opère sur X par l'homothétie $||^s$.

On remarque que la représentation $r_{{}^L M,s}$ de l'introduction est la somme sur λ des représentations $r_{\lambda_0,\lambda,s}$. Les représentation $||^x$, $x \in \boldsymbol{R}$ de $L_{k'}$ ne peuvent intervenir que dans $r_{\lambda_0,\lambda,s}$ où $\lambda \simeq^{\tau} \lambda_0^*$ c'est-à-dire $\lambda \simeq \lambda_0$ avec ce que l'on a vu ci-dessus.

On reprend les notations $[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}, \varepsilon]$ pour la multiplicité de la représentation $||^{\varepsilon}$ dans $r_{\lambda_0,\lambda_0,s}$ analogues à celles de l'introduction et on pose:

$$P_0 := \{s_0 \in \boldsymbol{R}_{>0} | [r_{\lambda_0,\lambda_0,s_0}, 1] > [r_{\lambda_0,\lambda_0,s_0}, 0] = [r_{\lambda_0,\lambda_0,s_0}, -1]\}.$$

Remarque. *Il existe une bijection entre l'ensemble des homorphismes* Ψ (*à conjugaison près*) *induits à partir d'un homomorphisme pour M et les triplets* Ψ_M, λ_0, s_0 *où* Ψ_M *est un homomorphisme relativement à M vérifiant les conditions d'Arthur,* (*d'image non incluse dans le L-groupe d'un Levi*) *où* λ_0 *est une représentation irréductible de* $L_{k'}$ *et où* $s_0 \in P_0$. *Le rapport entre* s_0 *et* μ_0, μ_0', μ_0'' *utilisé ci-dessus est donné par les formules*:

si $2s_0 - \dim X/\dim V_{\lambda_0} > 0$ *alors on est dans le premier cas de l'induction, i.e. où* μ_0 *est défini par*

$$\mu_0 = 2s_0 + \dim X/\dim V_{\lambda_0};$$

sinon on est dans le deuxième cas de l'induction où μ_0' *et* μ_0'' *sont définis par*:

$$\mu_0' = 2s_0 + \dim X/\dim V_{\lambda_0}, \quad \mu_0'' = -2s_0 + \dim X/\dim V_{\lambda_0}.$$

Il est plus simple de fixer Ψ_M; imposer l'hypothèse que l'image de Ψ_M n'est incluse dans aucun sous-L-groupe de Levi, est inutilement restrictif et on ne la fait pas pour les calculs ci-dessous. La seule chose que l'on va utiliser, et on peut toujours s'y ramener, est que sur le facteur $GL(\boldsymbol{A}_{k'})$ est un multiple d'une représentation de carré intégrable. D'où λ_0 comme dans ce qui précède l'énoncé et $\lambda_0 \simeq {}^\tau\lambda_0^*$. On décompose V_0 sous l'action de $\Psi_M(L_{k'} \times SL(2, \boldsymbol{C}))$ que l'on écrit pour fixer les notations:

$$V_0 =: \bigoplus_{\lambda \in \hat{L}_{k'}, \mu} V_\lambda \otimes Y_\mu,$$

où μ parcourt un sous-ensemble E des entiers.

Pour alléger les notations, on pose:

$$a := \dim X/\dim V_{\lambda_0}$$

et on utilise systématiquement que $\lambda_0 \simeq \lambda_0^*$ si $k' = k$ et que $\lambda_0 \simeq {}^\tau\lambda_0^*$ dans l'autre cas.

La décomposition de la représentation $r_{\lambda_0, \lambda_0, s}$ est la somme des représentations:

$$r_{\lambda_0, \lambda_0, s}[\mu] := \bigoplus_{d \in [-(a-1)/2, (a-1)/2], d' \in [-(\mu-1)/2, (\mu-1)/2]} (\lambda_0 \times \lambda_0) \otimes \|^{s+d-d'}, \tag{1}$$

où μ parcourt l'ensemble E défini ci-dessus ainsi que des représentations:

si V est orthogonal:

$$r_{\lambda_0, \lambda_0, s}[\wedge^2] := \bigoplus_{d \leq d', d, d' \in [-(a-1)/2, (a-1)/2]} (\wedge^2 \lambda_0) \otimes \|^{2s+d+d'}$$

et de

$$r_{\lambda_0, \lambda_0, s}[Sym^2] := \bigoplus_{d < d', d, d' \in [-(a-1)/2, (a-1)/2]} (Sym^2\, \lambda_0) \otimes \|^{2s+d+d'};$$

si V est symplectique: les 2 représentations ci-dessus mais où $\wedge^2$ et Sym^2 sont échangés. Pour la commodité du lecteur on remarque que la différence tient en l'inégalité entre d et d' qui dans un cas est large et dans l'autre est stricte;

si $k' \neq k$:

$$r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[nat] := \bigoplus_{d,d' \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]} (\lambda_0 \times \lambda_0)||^{2s+d+d'}.$$

Pour alléger, pour toute représentation r de L_k et pour $\varepsilon \in \{-1,0,1\}$, on note $[r,\varepsilon]$ la multiplicité dans r de la représentation $||^{\varepsilon}$.

Fixons $\mu \in E$. On va d'abord montrer que:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],-1] \leq [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],0] \leq [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],1]$$

et donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces inégalités soient strictes. On a, pour tout ε comme ci-dessus:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],\varepsilon] = |\{(d,d'), d \in [-(a-1)/2,(a-1)/2], \\ d' \in [-(\mu-1)/2,(\mu-1)/2]; s+d-d' = \varepsilon\}|,$$

ou encore:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],\varepsilon] \\ = |\{d \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]; s+d \in [\varepsilon-(\mu-1)/2, \varepsilon+(\mu-1)/2]\}|. \quad (2)$$

Symétriquement, on a aussi:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],\varepsilon] \\ = |\{d' \in [-(\mu-1)/2,(\mu-1)/2]; s+d' \in [\varepsilon-(a-1)/2, \varepsilon+(a-1)/2]\}|. \quad (3)$$

On utilise l'égalité (2) si $\mu \geq a$ et l'égalité (3) si $\mu \leq a$. En utilisant l'hypothèse de positivité sur s, on voit qu'alors la borne inférieure ne peut être obtenue que pour $\varepsilon = +1$. Cela prouve immédiatement les inégalités (1).

Ces multiplicités sont certainement toutes nulles si s n'est pas un demi-entier ou si:

$$2s + a \text{ et } \mu \text{ n'ont pas même parité.}$$

Faisons ces hypothèses. Alors $[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],-1] < [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],0]$ si et seulement si il existe, quand $\mu \leq a$, $d_1 \in [-(\mu-1)/2,(\mu-1)/2]$ tel que

$$s + d_1 = (a-1)/2$$

et quand $\mu \geq a$, il existe $d_1 \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]$ tel que:

$$s + d_1 = (\mu-1)/2.$$

D'où:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],-1] = [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],0] \Leftrightarrow$$

si $\mu \leq a$:

$$s-(a-1)/2 \notin [-(\mu-1)/2,(\mu-1)/2]; \tag{4}$$

si $\mu \geq a$:

$$s-(\mu-1)/2 \notin [-(a-1)/2,(a-1)/2]. \tag{5}$$

En outre $[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu]:0] < [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu]:1]$ si et seulement si, quand $\mu \leq a$, il existe $d_1 \in [-(\mu-1)/2,(\mu-1)/2]$ tel que

$$s+d_1 = (a-1)/2+1$$

et quand $\mu \geq a$, il existe $d_1 \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]$ tel que:

$$s+d_1 = (\mu-1)/2+1.$$

Cela s'interprète comme ci-dessus. D'où:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],-1] = [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],0] \quad \text{et} \quad [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],0] < [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\mu],1]$$

si et seulement si, quand $\mu \leq a$:

$$s-(a-1)/2 = 1+(\mu-1)/2,$$

et quand $\mu \geq a$:

$$s-(\mu-1)/2 = 1+(a-1)/2.$$

Les deux cas s'unifient pour donner:

$$s = (\mu+a)/2. \tag{6}$$

Il faut maintenant examiner les représentations $r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2]$ et $r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[Sym^2]$. On ne le fait que si V est symplectique dans le cas opposé ce sont les parités qui changent. On va encore montrer:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],-1] \leq [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],0] \leq [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],1]; \tag{7}$$

et

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[Sym^2],-1] \leq [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[Sym^2],0] \leq [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[Sym^2],1]. \tag{8}$$

Il est clair que toutes les multiplicités dans (7) (resp. (8)) sont nulles si λ_0 n'est pas symplectique (resp. orthogonale).

Supposons que λ_0 est symplectique et démontrons (7) ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir des inégalités strictes.

Pour tout ε comme ci-dessus, on a:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2]:\varepsilon] = |\{d \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]; 2s+d \in [\varepsilon-(a-1)/2, \varepsilon-d]\}|.$$

Pour avoir quelque chose de non nul, il faut certainement que s soit un demi-entier. Faisons cette hypothèse. La positivité de s assure alors que $2s+d+(a-1)/2 \geq 1$. D'où les inégalité de (7).

On a aussi:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],-1] = [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],0] \Leftrightarrow$$

il n'existe pas $d \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]$ tel que $2s+d=-d$. D'où encore, si et seulement si:

$$s \notin [-(a-1)/2,(a-1)/2]. \tag{9}$$

Et on a:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],1] > [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],0]$$

si et seulement si il existe $d \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]$ tel que:

$$2s+2d=1.$$

C'est-à-dire $s-1/2 \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]$. Ici cette condition exclut automatiquement la condition $s \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]$ trouvée précedemment pour des questions de parité. Plus précisément:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],-1] = [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],0] \quad \text{et} \quad [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],1] > [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],0]$$

si et seulement si $2s$ a même parité que a et $s \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]$.

Supposons maintenant que λ_0 est orthogonal et montrons (8) ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir des inégalités strictes.

Pour tout ε comme ci-dessus, on a:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2]:\varepsilon] = |\{d \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]; 2s+d \in [\varepsilon-(a-1)/2, \varepsilon-d]\}|.$$

On obtient (8) comme ci-dessus et

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],-1] = [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],0] \Leftrightarrow$$

il n'existe pas $d \in [-(a-1)/2,(a-1)/2]$ tel que $2s+d=-d-1$. D'où encore, si et seulement si:

$$s+1/2 \notin [-(a-1)/2,(a-1)/2]. \tag{10}$$

On a aussi:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],-1] = [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],0] \quad \text{et} \quad [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],1] > [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\wedge^2],0]$$

si et seulement si $2s$ et a ont des parités opposées et $s - 1/2 \in [-(a-1)/2, (a-1)/2]$.

On traite maintenant le cas des groupes unitaires. Il faut comparer les multiplicités, $[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[nat], \varepsilon]$ pour $\varepsilon = -1, 0, 1$. Le principe du calcul est comme ci-dessus; on montre aisément les inégalités larges (en utilisant la positivité de s) et la nullité de toutes les multiplicités si s n'est pas un demi-entier. On montre ensuite que:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[nat], 0] = [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[nat], -1] \Leftrightarrow \nexists d_1 \in [-(a-1)/2, (a-1)/2];$$
$$2s + d_1 = (a-1)/2.$$

Cette condition est encore équivalente à ce que $2s > a - 1$. On montre aussi:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[nat], 1] > [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[nat], 0] \Leftrightarrow \exists d \in [-(a-1)/2, (a-1)/2];$$
$$2s + d = (a-1)/2 + 1.$$

Si on met cette condition avec la condition $2s > a - 1$ on obtient $2s = a$.

On est maintenant en mesure de donner une description de P_0. Soit $s_0 \in P_0$, alors s_0 satisfait l'un des 3 cas ci-dessous dont on verra qu'ils sont exclusifs:

premier cas: il existe $\mu_1 \in E$ tel que $s_0 = (\mu_1 + a)/2$; en particulier $2s_0 > a$. On pose alors $\mu_0 := \mu_1 + 2a$ et pour avoir l'égalité des multiplicités des représentations $||^{-1}$ et trivial il faut d'une part que pour tout $\mu \in E$, si $\mu \le a$ (cf. (4)):

$$(\mu_1 + a)/2 - (a-1)/2 \notin [-(\mu-1)/2, (\mu-1)/2]$$

tandis que si $\mu \ge a$ (cf. (5)):

$$(\mu_1 + a)/2 - (\mu-1)/2 \notin [-(a-1)/2, (a-1)/2].$$

Ces conditions sont trivialement vraies si μ n'a pas même parité que μ_1 et si μ a même parité que μ_1 (et donc que μ_0), on vérifie que les 2 cas se résument en:

$$\mu \notin \{\mu_1 + 2, \cdots, \mu_1 + 2i, \cdots, \mu_0\}.$$

D'autre part, on doit aussi avoir si ρ est l'une des représentation $\wedge^2, Sym^2, nat$:

$$[r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\rho], 0] = [r_{\lambda_0,\lambda_0,s}[\rho], -1].$$

On va montrer que ceci est vrai sans condition supplémentaire. Dans le cas des groupes unitaires, $\rho = nat$ et on a vu que la condition est $s_0 > a - 1$ qui est vérifiée ici. Supposons que V est orthogonal et il faut distinguer:

si λ_0 est symplectique, il faut

$$s_0 \notin [-(a-1)/2, (a-1)/2]$$

tandis que si λ_0 est orthogonale:

$$s_0 + 1/2 \notin [-(a-1)/2, (a-1)/2].$$

Remarquons que si λ_0 est symplectique (resp. orthogonal) μ_1 est certainement paire (resp. impaire). Les conditions sont alors automatiquement vérifiées.

deuxième cas, si V est orthogonal: λ_0 est symplectique et $s_0 - 1/2 \in [-(a-1)/2, (a-1)/2]$. Ici on définit μ_0' et μ_0'' par:

$$(\mu_0' - 1)/2 = s_0 + (a-1)/2; \quad (\mu_0'' - 1)/2 = -s_0 + (a-1)/2.$$

D'où encore:

$$\mu_0' = a + 2s_0; \quad \mu_0'' = a - 2s_0.$$

Ce sont donc des entiers pairs car $2s_0$ et a ont même parité. On remarque que $\mu_0' > 0$ alors que μ_0'' peut être nul et que $\mu_0' > \mu_0''$ par positivité de s_0.

Les conditions pour avoir l'égalité des multiplicités de la représentation triviale et de la représentation $||^{-1}$ s'écrivent ainsi:

pour tout $\mu \in E$, si $\mu \leq a$:

$$-(\mu_0'' - 1)/2 \notin [-(\mu-1)/2, (\mu-1)/2],$$

tandis que si $\mu \geq a$:

$$s_0 - (\mu-1)/2 \notin [-(a-1)/2, (a-1)/2].$$

Le premier cas se résume en $\mu_0'' > \mu$. Le deuxième cas se résume en $\mu_0' < \mu$. Ou encore (on remarque que $\mu_0'' < a < \mu_0'$):

$$\mu \notin [\mu_0'', \mu_0'].$$

Le troisième cas quand V est orthogonal est celui où λ_0 est orthogonal, il est totalement similaire au deuxième cas. Le cas où V est symplectique est analogue et il reste le cas des groupes unitaires. La condition est ici:

$$2s_0 = a.$$

On pose $\mu_0' = 2a$ et $\mu_0'' = 0$. Soit $\mu \in E$, il faut écrire la condition pour que:

$$[r_{\lambda_0, \lambda_0, s}[nat], -1] = [r_{\lambda_0, \lambda_0, s}[nat], 0].$$

Si $\mu \geq a$ la condition est:

$$a/2 - (\mu-1)/2 \notin [-(a-1)/2, (a-1)/2],$$

tandis que si $\mu \leq a$:

$$a/2 - (a-1)/2 \notin [-(\mu-1)/2, (\mu-1)/2].$$

La deuxième condition dit que si $\mu \leq a$ il faut que μ soit impair et la première donne uniquement $\mu > 2a$.

Cela termine la preuve de la remarque; on reviendra sur le lien avec les pôles de fonctions L au paragraphe **3**.

Un des intérêts des constructions explicites est de montrer de façon évidente:

PROPOSITION. *Étant donné un homomorphisme Ψ discret comme dans ce paragraphe, il existe un sous-groupe parabolique de G défini sur k de Levi M défini sur k et un homomorphisme discret Ψ_M ainsi que λ_0, s_0 tel que Ψ soit induite par Ψ_M si et seulement si Ψ n'est pas trivial sur $SL(2, \boldsymbol{C})$.*

2. Conditions sur les caractères.

Dans tout ce qui suit, on suppose que Ψ est fixé ainsi que M et Ψ_M de tel sorte que M soit induit par Ψ_M ce qui fixe une représentation irréductible λ_0 de $L_{k'}$ et un élément $s_0 \in P_0$. On pose encore:

$$a := \dim X / \dim V_{\lambda_0}.$$

D'où aussi si $s_0 > a/2$, $\mu_0 := 2s_0 + a$ et si $s_0 \leq a/2$, $\mu_0' = 2s_0 + a$ et $\mu_0'' = -2s_0 + a$.

On note R le commutant de $\Psi(L_k)$ dans ${}^L G^0$ et R_M son intersection avec ${}^L M^0$. Il est clair que:

$$R = \times_{\lambda \in \hat{L_{k'}}} (\mathrm{Aut}_{L_{k'}} V[\lambda])^{\mathrm{Gal}(k'/k)} \cap {}^L G^0.$$

D'où une décomposition:

$$R =: \times_{\lambda \in \hat{L_{k'}}} R_\lambda.$$

Pour tout $\lambda \in \hat{L_{k'}}$, on pose encore:

$$C_\lambda := R_\lambda \cap \mathit{Cent}\, \Psi(SL(2, \boldsymbol{C})).$$

On a:

$$\mathit{Cent}_{{}^L G^0} \Psi = \times_{\lambda \in \hat{L_{k'}}} C_\lambda.$$

On définit de même $C_{M,\lambda}$ en remplaçant G par M et clairement avec les hypothèses que l'on a faites, pour tout $\lambda \neq \lambda_0$:

$$C_{M,\lambda} = C_\lambda.$$

Le rapport entre C_{M,λ_0} et C_{λ_0} est plus subtil; ils ont un sous-groupe commun $C_{M,\lambda_0} \cap C_{\lambda_0}$ qui s'envoie surjectivement sur le groupe des composantes de C_{M,λ_0}. Ceci n'est pas important pour nous ici mais peut être utilisé par le spécialiste pour tester la condition globale d'Arthur.

Pour définir les caractères, il faut regarder les centralisateurs localement. Fixons v une place de k; on note Ψ_v la restriction de Ψ à $W_{k_v} \times SU(2, \boldsymbol{R}) \times SL(2, \boldsymbol{C})$ et on définit de même $\Psi_{M,v}$. On note C_v le centralisateur dans ${}^L G^0$ de Ψ_v et on définit de même $C_{M,v}$. Soient $\varepsilon_{M,v}$ un caractère de $C_{M,v}$ et ε_v un caractère de C_v; on dit qu'ils sont compatibles s'ils coïncident sur l'intersection $C_{M,v} \cap C_v$. Le système (ε_v) est compatible à $(\varepsilon_{M,v})$ si cela est vrai en chaque place.

Pour définir la notion de totalement compatible, il faut introduire de nouvelles notations: soit a' un entier avec

$$1 \leq a' \leq \inf\{2s_0, a\}.$$

On note $P_{a'}$ un sous-groupe parabolique stabilisant un espace isotrope de dimension, sur k', égale à $a' \dim \lambda_0$. On note $M_{a'}$ un Levi de $P_{a'}$ défini sur k'; c'est le produit d'un groupe $GL(a' \dim \lambda_0, k')$, opérant sur un espace isotrope $X_{a'}$ et d'un groupe de même type que G mais de rang plus petit opérant sur un espace $V_{a'}$; on suppose comme cela est loisible que $V_{a'}$ contient V_0.

On va construire un homomorphisme $\Psi_{a'}$ relativement à $M_{a'}$ de tel sorte que Ψ soit induit à partir de $\Psi_{a'}$. En fait $\Psi_{a'}$ est obtenu par induction à partir de Ψ_M, mais on va faire la construction en détail.

On reprend les notations λ_0, s_0 du paragraphe **1** qui permettent d'induire Ψ à partir de Ψ_M.

On définit $\Psi_{M_{a'}}$ de la façon suivante: on note V' le supplémentaire dans V_0, Ψ_M stable, de $V_{\lambda_0} \otimes Y_{\mu_1}$ (en posant $\mu_1 = 0$ si $s_0 \leq a/2$ et $\mu_1 = 2s_0 - a$ sinon). Pour définir $\Psi_{M_{a'}}$ on demande que $V_{a'}$ soit, comme $\Psi_{M_{a'}}$-module, la somme,

si $\mu_1 \neq 0$: $V' \oplus V_{\lambda_0} \otimes Y_{\mu_1 + 2(a-a')}$

si $\mu_1 = 0$: $V' \oplus V_{\lambda_0} \otimes Y_{\mu_0' - 2a'} \oplus V_{\lambda_0} \otimes Y_{\mu_0''}$,

où on a repris les notations: $\mu_0' = 2s_0 + a$ et $\mu_0'' = -2s_0 + a$. Pour que cela ait un sens, on a utilisé le fait que $\mu_0' - 2a' + \mu_0'' = 2(a - a')$.

On pose:

$$s_{a'} := s_0 + (a - a')/2.$$

On remarque qu'avec λ_0 et $s_{a'}$, Ψ est induit à partir de $\Psi_{M_{a'}}$.

Définition. Les familles $(\varepsilon_{M,v})$ et (ε_v) sont totalement compatibles, si pour tout $a' \in [1, \inf\{2s_0, a\}]$ il existe une famille de caractères $(\varepsilon_{a',v})$ relativement à l'homomorphisme $\Psi_{M_{a'}}$ tels que pour tout v, ε_v et $\varepsilon_{a',v}$ sont compatibles et $\varepsilon_{a',v}$ et $\varepsilon_{M,v}$ coïncident sur l'intersection des sous-groupes surlesquels ils sont définis.

Grâce à ce que l'on a vu ci-dessus, celui qui sait ce qu'est la condition globale d'Arthur pourra vérifier que si la famille des ε_v vérifie la condition globale d'Arthur, il en est de même de la famille des $\varepsilon_{M,v}$ si les 2 familles sont compatibles. Le point à vérifier est que le caractère d'Arthur défini pour Ψ coïncide avec le caractère d'Arthur défini pour Ψ_M sur l'intersection du centralisateur de Ψ et du centralisateur de Ψ_M. La réciproque n'est évidemment pas vraie. Toutefois, on va mettre des conditions en **3** tels qu'elle le deviendra; nous ne développons pas ces points pour éviter de devoir donner la définition du caractère d'Arthur.

3. Condition globale.

On reprend les notations du paragraphe 1. En particulier on fixe λ_0 et s_0. Dans le cas où $k' = k$, la condition globale est:

$$\forall\lambda | V[\lambda] \neq 0 \text{ et } \lambda \neq \lambda_0, \quad L(r_{\lambda_0,\lambda,s}, 0)/L(r_{\lambda_0,\lambda,s}, 1)$$

est holomorphe non nulle en $s = s_0$. Cela s'explicite aisément en termes de multiplicité des représentations $\lambda_0 \times \lambda^* \|^{\pm 1/2}$ de L_k dans $r_{\lambda_0,\lambda,s_0}$ (définie comme en **2**). Et cela donne une formulation valable y compris dans le cas des groupes unitaires. Si $\lambda_0 \neq \lambda$, les représentation $\|^m$ pour $m \in \boldsymbol{Z}$ n'interviennent pas, c'est aussi vrai pour le deuxième quotient de fonction L. Ainsi la non holomorphie de ce quotient ne peut venir que de 0 du dénominateur non compensé par des zéros du numérateur. Quant à la nullité, elle provient des zéros du numérateur non compensés par des zéros du dénominateur. Comme s_0 est un demi-entier, il n'y a aucun zéro si la condition suivante n'est pas satisfaite:

$$L(\lambda_0 \times \lambda^*, 1/2) = 0.$$

Supposons donc qu'au moins l'une de ces conditions soit satisfaite. On a à comparer la multiplicité des sous-représentations de $(\lambda_0 \times \lambda^*)\|^{1/2}$ avec la multiplicité des sous-représentations de $(\lambda_0 \times \lambda^*)\|^{-1/2}$ dans $r_{\lambda_0,\lambda,s_0}$. On note $[r_{\lambda_0,\lambda,s_0}, \pm 1/2]$ la multiplicité de la représentation $(\lambda_0 \times \lambda^*)\|^{\pm 1/2}$ dans $r_{\lambda_0,\lambda,s_0}$; bien que ces représentations ne soient pas irréductibles, cela est bien défini comme on le verra. La condition que l'on a imposée est donc, avec des notations voisines de celles de **1**:

$$[r_{\lambda_0,\lambda,s_0}, 1/2] = [r_{\lambda_0,\lambda,s_0}, -1/2]. \tag{1}$$

Si $k' = k$ ces multiplicités sont nulles si $\lambda \simeq \lambda_0$, c'est pour cela que l'on a pu exclure ce cas. Mais il n'en est pas de même si G est un groupe unitaire.

La condition globale imposée est (1) pour tout λ, y compris $\lambda \simeq \lambda_0$ si $L(\lambda_0 \times \lambda^*, 1/2) = 0$.

La preuve va montrer que l'on a pour tout $s_0 > 0$ l'inégalité $\geq$ en (1) et cela entraîne que notre condition est équivalente à celle de l'énoncé donné dans l'introduction, à savoir:

pour toute représentation irréductible σ de $L_{k'}$ telle que $L(\sigma, 1/2) = 0$ les multiplicités de $\sigma||^{\pm 1/2}$ dans $r_{L_{M,s_0}}$ sont égales.

Les calculs des multiplicités intervenant dans (1), sont parfaitement similaires à ceux faits en **1**, où il suffit de remplacer ε par $\pm 1/2$. La multiplicité $[r_{\lambda_0,\lambda,s_0}, 1/2]$ est supérieure ou égale à $[r_{\lambda_0,\lambda,s_0}, -1/2]$ dans toutes les représentations $r_{\lambda_0,\lambda,s}$ avec inégalité stricte pour l'une de ces représentation si et seulement si, il existe μ dans la décomposition de $V_0[\lambda]$ sous l'action de $SL(2, \boldsymbol{C})$ tel que, si $\mu \geq a$:

$$s_0 - 1/2 - (\mu - 1)/2 \notin [-(a-1)/2, (a-1)/2],$$

tandis que si $\mu \leq a$:

$$s_0 - 1/2 - (a-1)/2 \notin [-(\mu-1)/2, (\mu-1)/2].$$

Pour interpréter ces inégalités, on distingue suivant la valeur de s_0.

premier cas $s_0 > a/2$: il existe μ_1 dans la décomposition de $V_0[\lambda_0]$ sous l'action de $\Psi_M(SL(2, \boldsymbol{C}))$ tel que:

$$s_0 = (a + \mu_1)/2.$$

On pose alors:

$$\mu_0 = \mu_1 + 2a.$$

Tout calcul fait, la multiplicité de $||^{1/2}$ est strictement supérieure à celle de $||^{-1/2}$ si et seulement si il existe λ une représentation irréductible de L_k et μ dans la décomposition de $V_0[\lambda]$ sous $\Psi(SL(2, \boldsymbol{C}))$ (ce qui est aussi $\Psi_M(SL(2, \boldsymbol{C}))$) tels que:

$$(\mu_0 - \mu)/2 \in [1/2, a - 1/2];$$

ou encore μ est de parité opposé à μ_0 et $\mu \in [\mu_1, \mu_0]$.

deuxième cas $s_0 \leq a$: il existe μ_0', μ_0'' dans la décomposition de $V[\lambda_0]$ sous l'action de $\Psi(SL(2, \boldsymbol{C}))$ liés à s_0 par:

$$\mu_0' = 2s_0 + a \quad \mu_0'' = -2s_0 + a.$$

Ici on trouve que la multiplicité de $||^{1/2}$ est strictement supérieure à celle de $||^{-1/2}$ dans $r_{\lambda_0,\lambda,s_0}$ si et seulement si il existe μ dans la décomposition de $V[\lambda]$ sous $\Psi(SL(2, \boldsymbol{C}))$ (ce qui est aussi $\Psi_M(SL(2, \boldsymbol{C}))$) tels que:

$$\mu/2 \in [\mu_0''/2 + 1/2, \mu_0'/2 - 1/2].$$

Ou encore que μ est de parité opposée à μ_0' et μ_0'' et que $\mu \in [\mu_0'', \mu_0']$.

En termes imagés, on peut expliquer ce que cela signifie: on fixe Ψ_M, les μ qui interviennent dans la décomposition de $V_0[\lambda]$ sont très naturellement appelé les blocs de Jordan relativement à λ.

Remarque 1. *Avec les notations précédentes, la construction de Ψ à partir de Ψ_M respectant les conditions de* **1** *et* **3** *se fait de la façon suivante: soit on ajoute 2 nouveaux blocs de Jordan de taille $\mu_0' > \mu_0''$ soit on augmente la taille d'un bloc de Jordan relativement à λ_0 qui passe de la taille μ_1 à la taille μ_0. La règle à respecter est que:*

dans le cas de la création de nouveaux blocs, il ne doit pas exister de bloc relativement à λ_0 de même parité que μ_0' et de taille comprise entre μ_0'' et μ_0' ni de bloc relativement à une représentation λ tel que $L(\lambda_0 \times \lambda^*, 1/2) = 0$ de parité opposé à μ_0' et de taille incluse entre μ_0'' et μ_0';

dans le cas de l'augmentation de μ_1 à μ_0 de la taille d'un bloc de λ_0, on a les mêmes conditions, le segment $[\mu_0'', \mu_0']$ étant remplacé par le segment $[\mu_1, \mu_0]$.

La condition du paragraphe **2** est, elle, beaucoup plus compliquée parce que les centralisateurs C_v sont compliqués à décrire. On reviendra sur cette description au paragraphe **6**.

4. Énoncé des conjectures.

Conjecture A. *Fixons π une représentation de carré intégrable de $G(\boldsymbol{A})$, réalisée dans l'espace des formes automorphes de carré intégrable et supposons que suivant les conjectures d'Arthur, on sache lui associer Ψ et (ε_v); alors π est non cuspidal seulement si il existe un Levi M d'un parabolique propre de G défini sur k et des données $\Psi_M, (\varepsilon_{M,v})$ vérifiant les conditions d'Arthur pour M et correspondant à au moins une représentation de carré intégrable de $M(\boldsymbol{A})$ tels que*

Ψ soit induit par Ψ_M,

(ε_v) est totalement compatible à $(\varepsilon_{M,v})$

la condition globale du paragraphe **3** *est satisfaite. Et alors π est réalisée dans l'espace des résidus de séries d'Eisenstein construit grâce à une représentation $\pi_M \in \Pi(\Psi_M, (\varepsilon_{M,v}))$ en le point s_0 du paragraphe* **3**.

Il serait aussi intéressant d'avoir une réciproque: c'est-à-dire, on se donne M, Ψ_M et la collection des $(\varepsilon_{M,v})$. On construit les séries d'Eisenstein grâce à une représentation, π_M, associée conjecturalement par Arthur à ces données. On suppose encore que la restriction de π_M à $GL(X)(\boldsymbol{A}_{k'})$ est une représentation de carré intégrable, d'où λ_0 une représentation irréductible de $L_{k'}$ et on cherche en quels points $s = s_0$ ces séries d'Eisenstein peuvent avoir des résidus de carré intégrable.

Conjecture B. *Si s_0 est un élément de P_0, la représentation engendrée par les résidus est de carré intégrable si et seulement si les conditions des paragraphes* **2** *et* **3** *sont vérifiées.*

Si la représentation induite de $\pi_M \otimes |\det_{GL(X)}|^{s_0}$ a de la cohomologie à l'infini (*pour un système de coefficient*), *la condtion que s_0 soit dans P_0 est aussi nécessaire pour que les séries d'Eisenstein aient un pôle.*

En général pour qu'il y ait des résidus de carré intégrable, il semble que la description imagée donnée à la fin de **3** doit être satisfaite en oubliant la condition sur les blocs de Jordan relativement à λ_0 de même parité que μ_0 ou μ_0', μ_0''. Les conditions sur les caractères de **2** ainsi que la condition globale de **3** doivent alors donner des conditions nécessaires et suffisante pour l'existence de résidus de carré intégrable. Mais évidemment, l'espace alors obtenu est inclus (conjecturalement) dans un espace de résidus de séries d'Eisenstein avec des données satisfaisant les conditions de la conjecture, que l'on peut décrire très explicitement.

Le cas des représentations ayant de la cohomologie est étudié en **6**.

5. Conjecture sur les opérateurs d'entrelacement.

On fixe ici M un sous-groupe de Levi d'un parabolique de G, les deux étant définis sur k et π_M une représentation de carré intégrable (modulo le centre, mais unitaire) de $M(\boldsymbol{A})$. On suppose aussi pour simplifier, que X et V_0 qui sont déterminés par M (cf **1**) sont tels que X est isotypique sous l'action de $L_{k'}$, d'où λ_0. Ici on fixe s_0 dans P_0 ce qui permet de définir Ψ par induction.

On a déjà utilisé que M est le produit d'un groupe de même type que G (mais de rang plus petit) par un groupe linéaire $\mathrm{GL}(\dim X, k')$. On note $\|$ le caractère valeur absolue du déterminant de ce groupe linéaire. On sait définir l'opérateur d'entrelacement global:

$$M(w, \pi_M \otimes \|^s)$$

que l'on sait aussi définir localement. On met alors un v en indice. Pour normaliser, il faut introduire la représentation de $L_{k'}$ dans le radical unipotent d'un parabolique de Levi ${}^LM$ et il faut la tordre par s comme en **1**, on la note $r_{{}^LM,s}$. On rappelle sa définition:

$$r_{{}^LM,s} = ad \circ \left(\Psi_{|L_k} \otimes \Psi_{M,|SL(2,\boldsymbol{C})} \begin{pmatrix} \|^{1/2} & 0 \\ 0 & \|^{-1/2} \end{pmatrix} \otimes i_s \right),$$

où $\|$ est la valeur absolue de $L_{k'}$ et où i_s est défini au paragraphe **1**.

Pour chaque place v, on pose:

$$N_v(w, \pi_M \otimes \|^s) := M_v(w, \pi_M \otimes \|^s) L_v(r_{{}^LM,s}, 1) / L_v(r_{{}^LM,s}, 0).$$

Avec une telle formule, on ne peut espérer une bonne formule pour le produit parce que l'on n'a pas mis de facteur epsilon; de toute façon, aucune normalisation n'est démontré en toute généralité; celle-ci est du type de celle de Langlands mais en général le facteur de normalisation que l'on a mis me semble être un multiple de celui préconisé par celui de Langlands; cela fait que cet opérateur peut avoir des zéros à cause du facteur de normalisation. Il est difficile en général de comparer les 2 facteurs; le problème est de déterminer le support cuspidale de la représentation $\pi_{M,v}$ et cela dépend de $\Psi_{M,v}$ et surtout de $\varepsilon_{M,v}$. C'est la raison pourlaquelle la conjecture s'exprime à l'aide d'une condition sur $\varepsilon_{M,v}$.

On note w_0 l'élément du groupe de Weyl de longueur minimale rendant négative toutes racines hors de M.

Conjecture. *Pour w dans le groupe de Weyl de $G(k_v)$ de longueur minimale modulo le groupe de Weyl de $M(k_v)$, $N_v(w, \pi_M \otimes \|^s)$ est holomorphe pour tout s avec $\operatorname{Re} s \geq 0$. Et pour $w = w_0$, cet opérateur est non nul en $s = s_0$ si et seulement si il existe ε_v, caractère du centralisateur de $\Psi_{|W_{k_v} \times SU(2,\boldsymbol{R}) \times SL(2,\boldsymbol{C})}$ totalement compatible à $\varepsilon_{M,v}$. En outre son image est semi-simple et les composants ont des données d'Arthur, Ψ_v, ε_v, avec Ψ_v induit par $\Psi_{M,v}$ et ε_v totalement compatible à $\varepsilon_{M,v}$.*

Ces conjectures sont évidemment très proches de celles d'Arthur, à la différence près que nous ne sommes pas sur l'axe unitaire et les propriétés d'holomorphie sont certainement très difficiles à démontrer.

6. Le cas des représentations à caractère infinitésimal entier régulier.

Lemme. *Soit π une représentation de carré intégrable ayant un caractère infinitésimal entier régulier, alors elle ne peut être associée qu'à un homomorphisme Ψ tel que l'orbite unipotente déterminé par $\Psi(SL(2, \boldsymbol{C}))$ dans le commutant de $\Psi(L_k)$ dans ${}^L G^0$ est l'orbite unipotente régulière de ce groupe.*

On peut même être plus précis l'hypothèse d'intégralité ne sert que pour les groupes unitaires. Et pour les groupes symplectiques et les groupes orthogonaux sur des formes de dimension impaire, le commutant de $\Psi(L_k)$ qui en toute généralité est un produit de groupes symplectiques et de groupes orthogonaux ne contient ici que des groupes symplectiques et des groupes orthogonaux de forme de dimension impaire.

Soit π comme dans l'énoncé et soit Ψ l'homomorphisme lui correspondant. Pour calculer le caractère infinitésimal en une place v archimédienne, on regarde la restriction de Ψ_v à $L_{\boldsymbol{C}}$. Le caractère infinitésimal est le caractère par lequel le centre de l'algèbre enveloppante agit; pour le calculer on peut remplacer le groupe $G(k_v)$ par sa forme quasidéployée, ce que nous ferons pour les lignes qui suivent.

On traite d'abord le cas des groupes orthogonaux et symplectiques.

La propriété de base est que si V en tant que $\Psi(L_k \times SL(2, \boldsymbol{C}))$-module, contient une sous-représentation isomorphe à $V_{\lambda_0} \otimes Y_\mu$, avec λ_0 une représentation irréductible de L_k et $\mu \in \boldsymbol{N}$, alors le caractère infinitésimal de π est celui d'une induite de la forme:

$$\rho_{\lambda_0, v}|\det|_v^{(\mu-1)/2} \times \cdots \times \rho_{\lambda_0, v}|\det|_v^{(\mu-1)/2-j} \times \cdots \times \rho_{\lambda_0, v}|\det|_v^{\varepsilon} \times \pi'_v,$$

où ρ_{λ_0} est la représentation conjecturalement associée à λ_0, où $\varepsilon = 1$ si μ est impair et $\varepsilon = 1/2$ si μ est pair et où π'_v est dans un paquet associé à un homomorphisme Ψ'_v pour un groupe (quasi-déployé) de rang $[\mu/2]$ plus petit que $G(k_v)$, qui se déduit de Ψ_v en remplaçant le bloc de Jordan μ (cf. la fin de **3**, pour cette notion) par un bloc de Jordan $\mu - 2[\mu/2]$. Dans le cas où μ et μ' sont tels que la somme $V_{\lambda_0} \times Y_\mu \oplus V_{\lambda_0} \times Y_{\mu'}$ apparait dans la décomposition de V_0, alors le caractère infinitésimal de π_v est aussi celui de l'induite:

$$\times_{j \in [-(\mu'-1)/2, (\mu-1)/2]} \rho_{\lambda_0, v}|\det|^j \times \pi''_v,$$

où ici π''_v est dans un paquet qui s'obtient à partir de Ψ en enlevant les blocs de Jordan μ et μ'.

On déduit de cela, qu'une représentation de carré intégrable ayant un caractère infinitésimal régulier ne peut être associé qu'à un homomorphisme Ψ tel que pour tout λ représentation irréductible de L_k l'espace $V[\lambda]$ dans sa décomposition sous $SL(2, \boldsymbol{C})$ ne fait intervenir qu'au plus un bloc de Jordan pair et au plus 2 blocs de Jordan impair l'un des deux si 2 apparaissent, étant nécessairement de taille 1 et cela ne pouvant se produire que pour les groupes orthogonaux d'une forme de dimension paire; sinon les induites écrites ont un stabilisateur dans le groupe de Weyl. En outre ce dernier cas ne peut se produire que pour au plus une valeur de λ avec $\dim \lambda$ impaire (les autres cas sont éliminés en montrant qu'un élément du groupe de Weyl stabilise la représentation que l'on induit). Dans le cas des groupes symplectiques ou orthogonaux, grâce aux conditions de parités déjà obtenues, on obtient, sous les hypothèses de l'énoncé:

dans sa décompostion comme $L_k \times SL(2, \boldsymbol{C})$-module, via Ψ

$$V \simeq \bigoplus_{\lambda \in \hat{L_k}, \mu \in \boldsymbol{N}} m(\lambda, \mu) V_\lambda \otimes Y_\mu$$

où $m(\lambda, \mu) = 0$ pour tout $\mu \in \boldsymbol{N}$ sauf au plus une valeur de μ (qui sera alors noté $\mu(\lambda)$). Il y a une exception dans le cas des groupes orthogonaux d'une forme de dimension paire, où pour au plus un λ, V peut contenir $V_\lambda \otimes Y_\mu \oplus V_\lambda \otimes Y_1$ avec $\mu > 1$ impaire. On note encore μ par $\mu(\lambda)$ dans ce cas.

Pour avoir le même résultat pour les groupes unitaires, il faut ajouter l'hypothèse que le caractère infinitésimal est entier régulier. L'hypothèse d'être entier empêche l'existence de bloc de Jordan de parité opposée dans la décomposition de tout $V[\lambda]$ comme ci-dessus. Pour vérifier cela, on relève aux points complexes c'est-à-dire directement à $GL(\dim V, \boldsymbol{C})$ et le caractère infinitésimal de π_v est celui de l'algèbre enveloppante non compléxifié de $GL(\dim V, \boldsymbol{C})$ opérant sur l'induite:

$$\times_{\lambda \in \hat{L_{k'}}} \times_{\mu \in \boldsymbol{N}; j \in [-(\mu-1)/2, (\mu-1)/2]} \rho_{\lambda, w} \|_w^j,$$

où μ parcourt l'ensemble des blocs de Jordan de $V[\lambda]$ et où w est une place complexe au-dessus de v.

Dans ce paragraphe, on va démontrer:

THÉORÈME. *On suppose que la conjecture sur les opérateurs d'entrelacement énoncée en* **5** est vraie. *Soit π une représentation de $G(\boldsymbol{A})$ ayant un caractère infinitésimal entier régulier, à laquelle on a associé Ψ et (ε_v). Alors si π n'est pas cuspidale il existe $M, \Psi_M, (\varepsilon_{M,v})$, un Levi d'un parabolique maximal définis sur k, un homomorphisme pour M et une famille de caractère correspondant à (au moins) une représentation de carré intégrable pour M, tels que Ψ soit induit par Ψ_M, (ε_v) soit totalement compatible à $(\varepsilon_{M,v})$ et la condition globale de* **3** *soit satisfaite.*

Réciproquement, soit M un sous-groupe de Levi de G d'un parabolique maximal de G (définis sur k) et soit π_M une représentation de carré intégrable de $M(\boldsymbol{A})$ irréductible à laquelle on a associée par les conjectures d'Arthur un homomorphisme Ψ_M et une famille de caractères $(\varepsilon_{M,v})$. Ainsi π_M détermine λ_0 une représentation irréductible de $L_{k'}$ et M est le produit d'un facteur de la forme $GL(a \dim \lambda_0, k')$ où $a \in \boldsymbol{N}$ et d'un groupe dont le L-groupe est du même type que celui de G mais opérant sur un espace V_0 de dimension $2a \dim \lambda_0$ plus petite. Soit $s_0 \in \boldsymbol{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, s_0 > 0$ et tel que l'induite automorphe de $\pi_M |\det_{GL(a \dim \lambda_0, \boldsymbol{A})}|^{s_0}$ ait un caractère infinitésimal entier régulier. Alors il existe f dans cette induite tel que la série d'Eisenstein $E(f, y)$ ait un pôle en $y = 0$, si et seulement si:

- *$s = (\mu_1 + a)/2$, où μ_1 est le sup des dimensions des représentations de $SL(2, \boldsymbol{C})$ induite par Ψ_M dans $V_0[\lambda_0]$ si celle ci est non nulle et sinon où μ_1 vaut 0 sauf si G est un groupe orthogonal d'une forme de dimension paire et λ_0 est orthogonal de dimension impaire où μ_1 vaut -1; en particulier $s_0 \in P_0$ ce qui permet de définir Ψ par induction;*
- *pour toute représentation irréductible $\lambda \neq \lambda_0$ de $L_{k'}$ telle que $L(\lambda_0 \times \lambda^*, 1/2) = 0$ et pour tout $\mu \in [\mu_1 + 1, \mu_1 + 2a - 1]$, $\mu \neq 0$ de parité opposé à μ_1, la représentation de taille μ de $SL(2, \boldsymbol{C})$ n'intervient pas dans la représentation de $SL(2, \boldsymbol{C})$ dans $V_0[\lambda]$ induite par Ψ_M;*
- *il existe une famille de caractère (ε_v) relativement à Ψ (construit par induction) totalement compatible à la famille $(\varepsilon_{M,v})$.*

Si ces trois conditions sont remplies, le pôle de la série d'Eisenstein et d'ordre exactement 1*, son résidu est de carré intégrable. En outre la famille* (ε_v) *est unique et elle vérifie la condition globale d'Arthur. L'unicité souffre malheureusement d'une exception: il s'agit du cas du groupe orthogonaux paire quand* $\mu_1 = -1$ *où pour toute place* v 2 ε_v *peuvent éventuellement être possibles.*

Le cas exceptionnel est en fait la généralisation de ce qui se produit pour la représentation triviale des groupes othogonaux d'une forme de dimension paire déployée: cette représentation n'est évidemment pas cuspidale et s'obtient en même temps que la représentation signe comme quotient de l'induite d'un caractère convenable d'un parabolique stabilisant un espace isotrope de dimension maximal.

Il me semble aussi que sous les hypothèses de la deuxième partie du théorème ci-dessus (et en excluant le cas où $\mu_1 = -1$), quand les 3 conditions sont remplies, la représentation résiduelle définie est irréductible; pour le démontrer, il faut avoir une propriété supplémentaire sur l'image de l'opérateur d'entrelacement associé à w_0 (cf **5**); puisque la situation est locale, on fixe v et il faut savoir que son image, qui est semi-simple, a une décomposition en bijection avec les caractères (ε_v) du groupe des composantes du centralisateur de Ψ_v totalement compatible à $\varepsilon_{M,v}$. Je ne connais pas de contre exemple à une telle propriété.

Soit λ une représentation irréductible de $L_{k'}$, bornée, de dimension notée $\dim V_\lambda$ (pour rappeler les notations déjà utilisées). Soit b un entier. On note ρ_λ la représentation cuspidale unitaire de $GL(\dim V_\lambda, \boldsymbol{A}_{k'})$ (conjecturalement associée à λ) et $\pi(\lambda, b)$ le module de Speh c'est-à-dire la représentation de carré intégrable de $GL(b \dim V_\lambda, \boldsymbol{A}_{k'})$ quotient de l'induite automorphe:

$$\rho_\lambda|\det|^{(b-1)/2} \times \cdots \times \rho_\lambda|\det|^{(b-1)/2-j} \times \cdots \times \rho_\lambda|\det|^{-(b-1)/2}.$$

Avec cette notation, on écrit $\pi_M \simeq \pi(\lambda_0, a) \times \pi_0$, où π_0 est une représentation d'un groupe de même type que G mais de rang plus petit (c'est le facteur du Levi M qui n'est pas le groupe linéaire).

On a évidemment $\rho_{\lambda_0} \simeq \pi(\lambda_0, 1)$ et pour $a > 1$, $\pi(\lambda_0, a)$ est l'unique quotient irréductible de l'induite automorphe:

$$\rho_{\lambda_0}|\det|^{(a-1)/2} \times \pi(\lambda_0, a-1)|\det|^{-1/2}. \tag{1}$$

Plus précisément $\pi(\lambda_0, a)$ se réalise dans l'ensemble des résidus en $\delta = 0$ de l'induite:

$$\rho_{\lambda_0}|\det|^{(a-1)/2+\delta} \times \pi(\lambda_0, a-1)|\det|^{-1/2}.$$

Dans toute la preuve, on admet évidemment les conjectures locales de **5** et on procède par récurrence sur le rang de G. On commence par démontrer la deuxième partie du théorème; on obtiendra la première partie comme conséquence. On adopte la notation μ_1 de l'énoncé.

On commence par la remarque suivante. Les assertions d'holomorphie sur les opérateurs d'entrelacement normalisés et le fait que le caractère infinitésimal est entier, montrent qu'il ne peut y avoir de pôle que si s_0 est un demi-entier. On a donc certainement $s_0 \geq 1/2$. Il montre aussi qu'il ne peut y avoir de pôle que si λ_0 est autoduale dans le cas des groupes symplectiques ou orthogonaux et isomorphe à l'image de sa contragrédient sous $\mathrm{Gal}(k'/k)$ dans le cas des groupes unitaires.

On va d'abord se ramener aux 2 cas élémentaires suivants: $a = 1$ et $a = 2$ où on examine l'existence éventuel d'un pôle en $s = 1/2$.

On suppose d'abord donc que $a > 1$, on utilise (1) pour écrire l'induite de $\pi_M|\det|^s$ comme résidu en $\delta = 0$ de l'induite:

$$\rho_{\lambda_0}^{(a-1)/2+s+\delta} \times \pi(\lambda_0, a)|\det|^{-1/2+s} \times \pi_0. \tag{2}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence 2 fois si $a > 2$ ou $a = 2$ mais $s > 1/2$, les pôles éventuels (avec caractère infinitésimal entier régulier) sont sur les droites:

• $\delta = 0$, $(a-1)/2 + s + \delta = (\mu_1 + 1)/2$ et $-1/2 + s = (\mu_1 + a - 1)/2$.

On exclut le cas $(a-1)/2 + s + \delta = (\mu_1 + 1)/2$: comme on fera $\delta = 0$ ce cas nécessite par positivité de s que $\mu_1 \geq a - 1$ mais on vérifie alors que l'induite totale n'a pas son caractère infinitésimal régulier. Il ne reste donc que $s = (\mu_1 + a)/2$, ce que l'on cherchait. En outre par récurrence on sait que le pôle est au plus simple. On doit donc calculer la représentation engendrée par les fonctions:

$$\big(\delta(s - s_0)E(\phi, \delta, s)\big)_{\delta=0,\, s=s_0},$$

où ϕ est dans l'induite (2) où on fait $\delta = 0$. On calcule d'abord sur l'hyperplan $s = s_0$, en appliquant l'hypothèse de récurrence qui donne la nécessité des conditions juqu'à $a - 1$ et aussi leur suffisance pour que ce résidu soit non nul; mais il faut encore faire $\delta = 0$, ce qui est précisément le cas $a = 1$ que nous verrons ci-dessous.

On va éliminer partiellement le cas où $a = 2$, et $s = 1/2$: l'hypothèse sur le caractère infinitésimal entraîne que G est un groupe unitaire ou un groupe orthogonal sur un espace de dimension paire car pour les groupes orthogonaux sur un espace de dimension impaire ou pour les groupes symplectiques, les induites:

$$\rho_{\lambda_0}|\det| \times \rho_{\lambda_0} \times \pi_0$$

ont un stabilisateur dans le groupe de Weyl si λ_0 est autoduale. Dans le cas des groupes orthogonaux pairs, le même argument s'applique si $\dim \lambda_0$ est pair. Il reste donc à voir, pour ces groupes, le cas où λ_0 est orthogonal de dimension impaire. Ce cas sera laissé pour la fin.

Dans le cas des groupes unitaires, on vérifie que l'hypothèse sur le caractère infinitésimal assure que $V_0[\lambda_0] = 0$ et on en déduit que les facteurs de normalisation n'ont pas de pôle: ce n'est pas évident le problème est les pôles qui pourraient venir des zéros des dénominateurs. Pour ce point, le cas des groupes unitaires est exactement celui de $GL(n)$ traité en [**M-W**].

On traite donc le cas où $a = 1$. Le cas où π_0 est cuspidal est très simple: tous les termes constants d'une serie d'Eisenstein $E(f,s)$ avec f dans l'induite automorphe $\pi(\lambda_0, a)|\det|^s \times \pi_0$ sont nuls sauf celui relatif au parabolique P de Levi M. Le terme constant est de la forme:

$$E(f,s)_P = f_s + M(w_0,s)f,$$

avec les notations standard pour f_s. On écrit encore

$$M(w_0,s) = L(r_{L_{M,s}}, 0)/L(r_{L_{M,s}}, 1)N(w_0, s).$$

On a déjà étudié le quotient de fonction L. L'irréductibilité de $V_0[\lambda_0]$ sous l'action de $\Psi_M(L_{k'} \times SL(2, \boldsymbol{C}))$ rend les choses très simple: il a un pôle seulement si $s = (\mu_1 + 1)/2$ ou $s = 1/2$. La régularité demandée du caractère infinitésimal de l'induite exclu le deuxième cas si $\mu_1 > 0$. Ce point est vraiment un pôle s'il n'y a pas de zéro qui l'annule, c'est-à-dire la condition de **3**. On vérifie que le pôle est alors d'ordre 1 exactement. Pour avoir un résidu de carré intégrable, il faut encore que $N(w_0, (\mu_1 + 1)/2)$ soit d'image non nulle. La condition sera alors aussi suffisante et ceci est réglé par le lemme local.

Il faut maintenant considérer le cas où π_0 n'est pas cuspidale. On fixe f comme ci-dessus. Pour $\ell \in \boldsymbol{N}$ on note P_ℓ le sous-groupe parabolique de G (s'il existe) stabilisateur d'un plan hyperbolique de dimension ℓ; c'est un parabolique maximal dont le Levi est le produit de $GL(k', \ell)$ par un groupe de même type que G mais de rang ayant diminué de ℓ. Pour σ une représentation cuspidale irréductible (non nécessairement unitaire) de $GL(\ell, \boldsymbol{A}_{k'})$ on note $proj_\sigma$ la projection sur le support cuspidal σ des formes automorphes sur $P(k)U_P(\boldsymbol{A})\backslash G(\boldsymbol{A})$. On sait que $E(f,s)$ est holomorphe en $s = s_0$ si et seulement si cela est vrai pour tous les termes $proj_\sigma E(f,s)_{P_\ell}$ quand ℓ et σ varient. C'est assez facile d'étudier chacun de ces termes séparément.

Considérons d'abord le cas où $\ell = \dim V_{\lambda_0}$ et où $\sigma = \rho_{\lambda_0}|\,|^{-s}$. Ce terme est exactement $M(w_0,s)f$. A ce terme s'applique exactement les considérations du cas cuspidal.

Un autre cas simple est le cas où $\ell = \dim V_{\lambda_0}$ et $\sigma = \rho_{\lambda_0}|\det|^s$. Ce terme est exactement f_s.

Considérons les autres termes possibles: nécessairement une fonction dans π_0 a un terme constant de projection non nulle sur σ relativement à un parabolique de même type que P_ℓ. On va prendre une hypothèse de récurrence supplémentaire (que nous sommes en fait en train de démontrer) que cette propriété est équivalent à ce que π_0 soit résidu à partir d'une induite $\sigma^* \times \pi_0'$ pour π_0' de carré intégrable convenable et que σ^* est alors de la forme $\rho_\lambda|\det|^{(\mu(\lambda)-1)/2}$ pour λ tel que $V_0[\lambda] \neq 0$; ici $\mu(\lambda)$ est le sup des dimensions des représentations de $SL(2,\boldsymbol{C})$ intervenant dans $V_0[\lambda]$. Si $\lambda = \lambda_0$, $\mu(\lambda)$ est ici μ_1 et il y a un léger problème si G est un groupe orthogonal d'une forme de dimension paire; dans ce dernier cas π_0' n'est pas nécessairement de carré intégrable, ce peut aussi être un sous-module de l'induite (non nécessairement irréductible):

$$\rho_\lambda \times \pi_0'',$$

où λ est bien tel que $\sigma^* = \rho_\lambda|\det|$ (ici $\mu(\lambda) = 2$ et où π_0'' est de carré intégrable). Il n'est pas vraiment difficile de généraliser ce qui suit à ce cas que nous ne traiterons pas pour ne pas alourdir les notations. Les données pour π_0' s'obtiennent sans problème pour l'homomorphisme (on baisse $\mu(\lambda)$ en $\mu(\lambda) - 2$ et en imposant l'hypothèse de totale compatibilité pour les caractères des centralisateurs). En outre on utilisera aussi la propriété suivante: si $\lambda \neq \lambda_0$ et si $\mu_1 = \mu(\lambda) - 1$ alors $L(\lambda \times \lambda_0, 1/2) \neq 0$, propriété qui s'obtient par récurrence. En fait toutes les conditions nécessaires et suffisantes doivent être satisfaites pour ce cas.

Pour calculer $proj_\sigma E(f,s)_{P_\ell}$ il suffit de réaliser f dans $\rho_\lambda|\det|^{-(\mu(\lambda)-1)/2} \times \pi_0'$. Les séries d'Eisenstein dans $GL(\dim V_{\lambda_0} + \dim V_\lambda, \boldsymbol{A}_{k'})$ pour l'induite

$$\rho_{\lambda_0}|\det|^s \times \rho_\lambda|\det|^{-(\mu(\lambda)-1)/2}$$

sont holomorphes ([**M-W**]) car $s + (\mu(\lambda) - 1)/2 > 1$ sauf dans le cas particulier $\lambda = \lambda_0$ $s = 1/2$ et $\mu_1 = 2$ où ce nombre vaut 1. Ce cas est à exclure car le caractère infinitésimal de l'induite n'est pas régulier. Ainsi la fonction de s cherchée est certainement holomorphe si les séries d'Eisenstein pour l'induite

$$\rho_{\lambda_0}|\det|^s \times \pi_0'$$

le sont. Ceci se traite par récurrence; on s'intéresse surtout à la non holomorphie; elle nécessite que $s = (\mu_1 + 1)/2$ sauf si $\lambda = \lambda_0$ où il faut $s = (\mu_1 - 2 + 1)/2$. Ce dernier cas est encore exclure pour cause de non régularité. Remarquons au passage que c'est ici que l'on conclut l'hypothèse de récurrence annexe que nous avons mise. Donc maintenant certainement $\lambda \neq \lambda_0$ pour avoir non holomorphie. On obtient aussi la nécessité de la condition globale: si λ est tel que $L(\lambda_0, \lambda^*, 1/2) = 0$ alors $\mu(\lambda) \neq \mu_0 - 1$ (où $\mu_0 = \mu_1 + 2 = 2s_0 + 1$); on utilise ici l'hypothèse faite plus haut sur λ. La nécessité de la condition sur les caractères des centralisateurs n'est malheureusement pas automatiquement obtenue: en effet on l'obtient si $\mu(\lambda) \neq \mu_0$. Ceci est du au fait qu'en toute place v, pour calculer les centralisateurs, on commence par calculer le centralisateur de l'image de $SL(2, \boldsymbol{C})$. Et ce centralisateur se décompose en produit suivant la taille des représentations de $SL(2, \boldsymbol{C})$ qui apparaissent.

Pour traiter les cas restants, il faut décrire plus précisément cette condition locale. On va, en passant montrer l'assertion d'unicité faite après l'énoncé.

Fixons une place v et supposons que $k' = k$ pour éviter d'avoir à prendre des invariants sous $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$. On considère:

$$C'_v := \prod_{\lambda | V[\lambda] \neq 0} {}^L G^0 \cap Cent_{\mathrm{Aut}(V[\lambda])} \mathrm{Im}_{\mathrm{Aut}(V[\lambda])}(\Psi(L_{k_v}) \times SL(2, \boldsymbol{C})).$$

On note $[C'_v]$ le groupe des composantes de C'_v. On va montrer que ce groupe s'envoit surjectivement sur le groupe des composantes du centralisateur de Ψ. En effet, on décompose chaque λ_v suivant les représentations irréductibles de L_{k_v}. Dans l'écriture ci-dessous, les ν parcourt l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles non autoduales de L_{k_v} tandis que les ξ parcourt les classes d'isomorphie de représentations autoduales et les $m(., \lambda_v)$ représente la multiplicité:

$$\lambda_v \simeq \bigoplus_{\nu} m(\nu, \lambda_v)(\nu \oplus \nu^*) \oplus_{\xi} m(\xi, \lambda_v)\xi.$$

Pour simplifier les notations, on exclut le cas des groupes orthogonaux d'une forme de dimension paire. Pour λ représentation irréductible de L_k, on note $\mu(\lambda)$ la dimension des représentations irréductibles de $SL(2, \boldsymbol{C})$ intervenant dans $V[\lambda]$; on rappelle que, grâce à notre hypothèse, $V[\lambda] \simeq V_\lambda \otimes Y_{\mu(\lambda)}$ comme représentation de $L_k \times SL(2, \boldsymbol{C})$. Le commutant de Ψ_v est alors isomorphe à:

$$\times_{\mu \in \boldsymbol{N}} \left(\times_{\nu} GL\left(\sum_{\lambda | \mu(\lambda) = \mu} m(\nu, \lambda_v) \right) \quad \times_{\xi} H\left(\sum_{\lambda | \mu(\lambda) = \mu} m(\xi, \lambda_v) \right) \right),$$

où H est un groupe orthogonal ou symplectique, le choix dépendant de la nature de ξ de la parité de μ et de la nature de V. Avec ces notations,

$$C'_v = \times_{\mu \in \boldsymbol{N}} \times_{\lambda | \mu(\lambda) = \mu} \times_{\nu} GL(m(\nu, \lambda_v)) \times_{\xi} H(m(\xi, \lambda_v)).$$

D'où l'assertion.

On fait une construction du même type pour M et Ψ_M: on définit $C'_{M,v}$ qui est naturellement produit de l'analogue de C'_v mais où on ne regarde que les $\lambda \neq \lambda_0$ et de

$$Cent_{GL(\dim V_{\lambda_0}, \boldsymbol{C})} \lambda_{0,v} \times {}^L G^0 \cap Cent_{\mathrm{Aut}(V_0[\lambda_0])} \mathrm{Im}_{\mathrm{Aut}(V_0[\lambda_0])}(\Psi(L_k) \times SL(2, \boldsymbol{C})).$$

Le premier facteur ci-dessus est évidemment un produit de groupes linéaires. Quand on passe au groupe des composantes, $[C'_{M,v}]$ le premier facteur ci-dessus se trivialise donc et on a encore une application surjective sur le groupe des composantes du centralisateur de $\Psi_{M,v}$. Avec ces descriptions il est clair que si $\mu_1 \neq 0$, il y a une bijection naturelle entre $[C'_v]$ et $[C'_{M,v}]$ qui traduit le fait que 2 caractères ont même restriction à $C'_v \cap C'_{M,v}$. Par contre dans cette bijection les noyaux des applications ci-dessus ne sont respectés que pour tout ce qui ne fait pas intervenir λ_0. Cela montre quand même que si $\mu_1 \neq 0$, et si le caractère ε_v est compatible au caractère $\varepsilon_{M,v}$, ces caractères se déterminent l'un l'autre.

Dans le cas où $\mu_1 = 0$, le groupe ${}^LG^0 \cap Cent_{\mathrm{Aut}(V[\lambda_0])}\mathrm{Im}_{\mathrm{Aut}(V[\lambda_0])}(\Psi(L_k) \times SL(2, \boldsymbol{C}))$ est un sous-groupe de $Cent_{GL(\dim V_{\lambda_0}, \boldsymbol{C})}\lambda_{0,v}$. Ainsi tout caractère ε_v du groupe des composantes du centralisateur de Ψ_v compatible à un caractère du groupe des composantes du centralisateur de $\Psi_{M,v}$ est trivial sur ce sous-groupe. Il y a donc au plus une seule façon d'étendre les caractères. De même ε_v étant fixé, il y a au plus 1 caractère du groupe des composantes du centralisateur de $\Psi_{M,v}$ qui lui est compatible.

On traite maintenant le cas où $\mu(\lambda) = \mu_0$: on réalise effectivement f comme résidu. Mais on commence par se rappeler que la famille des caractères associée à π'_0 est uniquement déterminée par la famille des caractères $(\varepsilon_{M,v})$; on la note $(\varepsilon'_{0,v})$. Comme on peut déjà le conclure, l'ordre des pôles est inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire est d'ordre 1 et donc par étage, on réalise $E(f, s)$ comme la valeur en $y = 0$ de la fonction méromorphe $E(\phi, s, y)$ où $\phi_{s,y}$ est dans l'induite automorphe:

$$\rho_{\lambda_0}|\det|^s \times \rho_\lambda|\det|^{(\mu(\lambda)-1)/2+y} \times \pi'_0. \tag{3}$$

On s'intéresse au point $s = s_0 = (\mu_0 - 1)/2 = (\mu(\lambda) - 1)/2$. En s_0 et $y = 0$ l'induite (3) est isomorphe à l'induite où on a échangé les 2 premiers facteurs (cas très simple de [**M-W**]). On note $\phi'_{y,s}$ l'image de $\phi_{s,y}$ après cet entrelacement. On note Q le sous-groupe paraboliqe qui sert à induire l'image de (3). Et la fonction que l'on cherche est la valeur en $y = 0$ de la fonction:

$$M(\tilde{w}_0, y)E_Q^{P_{\dim V_\lambda}}(\phi'_{y,s}, y, s). \tag{4}$$

Le $\tilde{w}_0$ l'analogue de w_0 mais λ remplaçant λ_0 et y doit être translaté par $(\mu(\lambda) - 1)/2$ pour se ramener vraiment à λ et non à λ tordu. Comme le calcul des résidus se fait en évaluant la fonction (4) multipliée par $(s - (\mu_0 - 1)/2)$ (ce qui la rend holomorphe) en $s = (\mu_0 - 1)/2, y = 0$, on peut échanger l'ordre du calcul. C'est-à-dire, que l'on calcule d'abord sa valeur en $s = (\mu_0 - 1)/2$ puis en $y = 0$. La première évaluation donne un résidu de carré intégrable non nul si la famille des caractères peut s'étendre au groupe des composantes des centralisateurs locaux de l'homomorphisme associé au résidu. Puis le calcul en $y = 0$ se fait grâce au lemme local appliquée avec λ remplaçant λ_0. Il donne encore comme condition locale que la famille des caractères $(\varepsilon'_{0,v})$ que l'on a déjà étendue s'étend aussi au groupe des composantes des centralisateurs des homomorphismes Ψ_v. C'est bien ce que l'on cherchait.

Il reste à voir le cas que nous avions laissé de côté, c'est-à-dire le cas des groupes orthogonaux pairs avec $a = 2$ et λ_0 orthogonal au point $s_0 = 1/2$. On commence par vérifier que les pôles des facteurs de normalisation ne peuvent venir que des pôles des fonctions L apparaissant au numérateur, ou encore que les zéros éventuels des fonctions L au dénominateurs sont simplifiés par ceux du numérateur. Comme $V_0[\lambda_0] = 0$, il y a peu d'opérateur d'entrelacement dont le facteur de normalisation a un pôle; ce pôle est au plus simple et les éléments du groupe de Weyl correspondant sont de la forme $w_1 w_0$ où l'opérateur $N(w_1, -s_0)$ est holomorphe quand il est appliqué aux termes constants de la forme:

$$\big(N(w_0, s_0)f_s\big)_Q,$$

où Q est un parabolique inclus dans P. Le point est que l'on a des conditions de positivité. Il faut quand même calculer ces facteurs de normalisation (ces calculs sont très voisins de ceux fait pour $GL(n)$ et il faut vérifier qu'il n'y a vraiment de pôle que si il n'existe pas λ tel que $\mu(\lambda) = 1$ et $L(\lambda_0 \times \lambda, 1/2) = 0$. On obtient alors immédiatement l'équivalence:

$$\big((s - s_0)E(f, s)\big)_{s=s_0} \neq 0 \Leftrightarrow N(w_0, s_0)f \neq 0.$$

Cela termine la preuve de la deuxième partie du théorème.

Montrons la première partie de l'énoncé. Soit π une représentation automorphe irréductible de carré intégrable de $G(\boldsymbol{A})$, réalisée dans un espace de fonctions. Ce qu'il faut démontrer est que si π n'est pas cuspidal, il existe M un Levi d'un parabolique maximal, π_M une représentation automorphe irréductible de carré intégrable de $M(\boldsymbol{A})$ à laquelle on associe (conjecturalement) Ψ_M et $(\varepsilon_{M,v})$ satisfaisant les conditions de l'énoncé relativement à π.

Pour simplifier les notations, on suppose que $k' = k$, c'est-à-dire que l'on ne fait la démonstration que pour les groupes orthogonaux ou symplectiques. Le résultat général de Langlands assure que l'espace de fonctions dans lequel π se réalise, est de la forme, résidus en $s_i = s_{i,0}$, pour $i \in [1, J]$ avec $J \in \boldsymbol{N}$ convenable:

$$E(f, \{s_i; i \in [1, J]\}),$$

où $f_{\{s_i\}}$ est dans une induite automorphe de la forme:

$$\times_{i\in[1,J]}\pi(\rho_i, a_i)|\det|^{s_i} \times \pi_{cusp} \tag{5}$$

où π_{cusp} est une représentation cuspidale d'un groupe de même type que G mais de rang plus petit, où les ρ_i sont des représentations cuspidales irréductible de groupe linéaires $GL(b_i, k)$ (où b_i est un entier convenable) et où les a_i sont des entiers. En outre on se trouve dans la chambre de Weyl obtuse positive fermée, ce qui entraîne en particulier que les $s_{i,0}$ sont des réels positifs ou nuls. On commence par mettre l'hypothèse que π a un caractère infinitésimal entier régulier. Il en est dans de même de l'induite (5) quand on fait $s_i = s_{i,0}$ pour tout $i \in [1, J]$. Cela montre que l'on doit avoir pour tout $i \in [1, J]$:

$$s_{i,0} \geq (a_i - 1)/2, \tag{6}$$

avec inégalité stricte sauf éventuellement pour une valeur de i si G est un groupe orthogonal paire et $\dim \rho_i := b_i$ est impaire. De plus π_{cusp} a aussi un caractère infinitésimal entier régulier et les $s_{i,0}$ sont des demi-entiers. En utilisant uniquement les résidus de séries d'Eisenstein, on est maintenant coincé par ce que (6) assure que l'on est dans la chambre de Weyl obtuse positive fermée mais par contre on peut très bien avoir pour $i \leq i' \in [1, J]$ $s_i < s_{i'}$ et les opérateurs d'entrelacement locaux peuvent fournir des pôles dont les résidus ne seront pas de carré intégrable et les pôles peuvent être situés sur un nombre d'hyperplan de cardinal supérieur strictement à J, avec éventuellement même des multiplicités. Pour éviter ces ennuis, il faut revenir à la vraie méthode de Langlands [**L**] (cf. aussi [**M-W$_2$**]) qui décompose le produit scalaire des formes automorphes de carré intégrable. Pour les groupes classiques, c'est la méthode suivie dans [**M**$_3$]. En général, c'est très compliqué, mais ici on bénéficie de l'hypothèse sur le caractère infinitésimal; on vérifie que cela entraîne que l'on peut supposer que pour tout $i \in [1, J]$ on a un pôle en $s_{i'} = s_{i',0}$ pour $i' \geq i$ et $s_{i''}$ général pour $i'' < i$ d'ordre supérieur ou égal à $J - i + 1 - |\{i' > i, s_{i',0} = 0\}|$.

Supposons d'abord que G n'est pas le groupe orthogonal d'une forme de dimension paire. Par régularité, on a exclu la possibilité où l'un des $s_{i,0}$ est nulle, on peut donc appliquer de proche en proche la partie du théorème déjà démontré pour savoir que pour i fixé le pôle en $s_{i'} = s_{i',0}$ pour tout $i' \geq i$ est d'ordre au plus $J - i + 1$. On ne s'intéresse donc qu'au point $s_{i',0}$ pour lequel cet ordre est $J - i + 1$, le résidu est alors l'évaluation convenanble d'une fonction holomorphe et est de carré intégrable. Ceci permet de continuer la récurrence et finalement on trouve que π se réalise dans l'ensemble des résidus des fonctions $E(f, s_1)$ où f est dans une induite automorphe de la forme:

$$\pi(\rho_1, a_1)^{s_1} \times \pi',$$

avec π' irréductible de carré intégrable. Il suffit encore d'appliquer la deuxième partie du théorème pour conclure.

Le cas des groupes orthogonaux d'une forme de dimension paire, on ne peut plus exclure dès le départ le cas où l'un des $s_{i,0} = 0$. Supposons donc qu'il existe $i_0 \in [1, J]$ tel que $s_{i_0,0} = 0$. Par régularité du caractère infinitésimal, pour tout $i \in$

$[1, J]$ $i \neq i_0$, on a:

$$s_i - (a_i - 1)/2 > 0.$$

En outre l'homomorphisme Ψ_{cusp} associé à π_{cusp} est tel qu'il n'induit pas la représentation de L_k associé à ρ_{i_0}. Cela entraîne que pour tout $i > i_0$ $\rho_i \not\simeq \rho_{i_0}$; sinon il n'y a pas de pôle en $(s_{i'} = s_{i',0})$ pour $i' > i_0$ puisqu'un pôle revient à créer un bloc de Jordan relativement à la représentation de L_k associé à ρ_{i_0}. Ce bloc de Jordan sera nécessairement impaire et couplé avec ρ_{i_0} donne un caractère infinitésimal non régulier. Comme ci-dessus, on peut remplacer la représentation:

$$\times_{i>i_0} \pi(\rho_i, a_i)|\det|^{s_{i,0}} \times \pi_{cusp}$$

par une représentation de carré intégrable π' tel que l'homomorphisme qui lui est associé n'induit pas la représentation associé à ρ_{i_0}. Supposons d'abord que pour tout $i < i_0$, $\rho_i \not\simeq \rho_{i_0}$. On montre en utilisant la deuxième partie du théorème (sur l'ordre des pôles) que le pôle en $s_i = s_{i,0}$ est d'ordre au plus $J - 1$. On ne peut donc pas avoir de résidu de carré intégrable. Il existe donc $i < i_0$ tel que $\rho_i \simeq \rho_{i_0}$. On note i_1 la plus grande valeur de i vérifiant cela. On suppose d'abord que $i_1 = 1$. On montre alors, que π est nécessairement réalisée dans les résidus de la représentation:

$$\pi(\rho_1, a_1)|\det|^{s_1} \times \rho_{i_0} \times \pi',$$

où π' est une représentation de carré intégrable irréductible à laquelle on associe un homomorphisme Ψ' qui n'induise pas la représentation associée à ρ_{i_0} de L_k; on va noter λ_0 cette représentation. En outre $s_{1,0}$ est nécessairement $1 + (a_1 - 1)/2$. En ce point le pôle peut être double; pour éviter cette difficulté, on se place sur l'induite:

$$\pi(\rho_1, a_1)|\det|^{s_1} \times \rho_{i_0}|\det|^{s_2} \times \pi',$$

au voisinage de $s_2 = 0$. Les pôles sont sur les droites $s_1 - (a_1 - 1)/2 - s_2 = 1$ et $s_1 - (a_1 - 1)/2 + s_2 = 1$ et sont au plus simples sur chacun de ces hyperplans. Quelque soit l'hyperplan surlequel on se place, on voit que π est réalisée dans l'ensemble des résidus de la représentation:

$$\pi(\rho_1, a_1 + 1)|\det|^{s} \times \pi',$$

en $s - (a_1 + 1)/2 = 0$. On peut alors appliquer la deuxième partie du théorème, qui dit qu'il y a un pôle au plus simple et que son résidu est de carré intégrable. Pour qu'il y ait vraiment pôle, il faut que les hypothèses de l'énoncé soient satisfaites.

On peut maintenant enlever l'hypothèse $i_1 = 1$: d'après ce que l'on vient de voir π se réalise dans les résidus de la représentation:

$$\times_{i<i_1}\pi(\rho_i, a_i)|\det|^{s_i} \times \pi'',$$

où π'' est une représentation irréductible de carré intégrable. Maintenant $s_{i,0} > 0$ pour tout $i < i_1$ et on procède comme pour les autres groupes.

Bibliographie

[Ad] Adams, J., L-functoriality for dual pairs, in Orbites unipotentes et représentations II. Groupes p-adiques et réels, Astérisque, 1989, **171–172**, pp. 85–129.

[Ad-J] Adams, J. and Johnson, J., Endoscopic groups and packets of non-tempered representations, Compositio Math., **64** (1987), pp. 271–309.

[A_1] Arthur, J., Unipotent automorphic representations: conjectures, in Orbites unipotentes et représentations II. Groupes p-adiques et réels, Astérisque, 1989, **171–172**, pp. 13–71.

[A_2] Arthur, J., Unipotent automorphic representations: global motivation, in Automorphic forms, shimura varieties, and L-functions, vol. 1, ed. L. Clozel et J.S. Milne, perp. in math. Academic Press, pp. 1–75, 1990.

[F] Franke, J., Harmonic analysis in weighted L_2-spaces, à paraitre aux Ann de l'ENS.

[M_1] Mœglin, C., représentations quadratiques unipotentes pour les groupes classiques p-adiques. Duke math. J., **84** (1996), pp 267–332.

[M_2] Mœglin, C., une conjecture sur le spectre résiduel, prépublication 94, Université D.Diderot (Paris 7).

[M_3] Mœglin, C., représentations unipotentes et formes automorphes de carré intégrable, Forum Math., **6** (1994), pp. 651–744.

[M-W] Mœglin, C. and Waldspurger, J.-L., Le spectre résiduel de $GL(n)$, Annales de l'ENS, **22** (1989), pp. 605–674.

[M-W_2] Mœglin, C. and Waldspurger, J.-L., décomposition spectrale et séries d'Eisenstein, une paraphrase de l'Ecriture, Birkhaüser, P.M., **113** (1994).

Colette Moeglin

Institut de Mathematiques
Universite Paris 7-CNRS
F-75251 Paris cedex 05, FRANCE
E-mail: moeglin@math.jussieu.fr