J. Math. Soc. Japan
Vol. 50, No. 3, 1998

Analyse harmonique pour certaines représentations induites d'un groupe de Lie nilpotent

By Hidenori FUJIWARA

(Received July 10, 1995)
(Revised Oct. 7, 1996)

§1. Introduction et généralités

Dans cet article nous allons proposer de continuer une suite des études qui remontent à la thése de Benoist [1]. Soit $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Etant donnés un sous-groupe fermé connexe $H = \exp \mathfrak{h}$ de G, ayant l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, et son caractère unitaire χ, on considère la représentation induite $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi$ de G. Elle se réalise par translation à gauche dans l'espace $\mathscr{H}_\tau$ des fonctions mesurables $\varphi : G \to \mathrm{C}$ telles que $\varphi(gh) = \chi(h)^{-1}\varphi(g)$ $(g \in G, h \in H)$ et que $\int_{G/H} |\varphi(g)|^2 \, d\dot{g} < \infty$ pour une mesure invariante $d\dot{g}$ sur G/H.

Si l'on écrit la désintégration de τ:

$$\tau \cong \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi \, d\mu(\pi), \tag{1}$$

les multiplicités $m(\pi)$ et la mesure μ sur le dual unitaire $\hat{G}$ de G s'obtiennent en termes de la méthode des orbites (cf. [4], [9]). Le caractère χ s'écrit $\chi(\exp X) = e^{if(X)} = \chi_f(\exp X)$ $(X \in \mathfrak{h})$ pour une certaine forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}$ telle que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = \{0\}$. Alors la mesure μ est l'image par l'application de Kirillov (cf. [5], [13]) d'une mesure finie sur $\mathfrak{g}^*$ équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\Gamma_\tau = f + \mathfrak{h}^\perp$, où $\mathfrak{h}^\perp = \{l \in \mathfrak{g}^* : l \mid \mathfrak{h} = 0\}$. Et la multiplicité $m(\pi)$ est égale au nombre des H-orbites contenues dans $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau$, où $\Omega(\pi) = \Omega_G(\pi)$ désigne l'orbite coadjointe de G associée à $\pi \in \hat{G}$.

On se trouve dans l'alternative suivante: ou bien il existe un borne uniforme pour toutes les multiplicités $m(\pi)$ ou bien $m(\pi) = \infty$ pour π quelconque. Dans toute la suite il nous s'agit du cas où $m(\pi)$ sont finies.

Pour une représentation unitaire ρ de G, on note $\mathscr{H}_\rho$, $\mathscr{H}_\rho^\infty$ et $\mathscr{H}_\rho^{-\infty}$ respectivement l'espace de ρ, l'espace des vecteurs C^∞ de ρ et l'antidual de $\mathscr{H}_\rho^\infty$. Pour $a \in \mathscr{H}_\rho^{\pm\infty}$ et $b \in \mathscr{H}_\rho^{\mp\infty}$, on note $\langle a, b \rangle$ l'image de b par a. Donc $\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$. On pose

$$(\mathscr{H}_\rho^{-\infty})^{H,\chi} = \{a \in \mathscr{H}_\rho^{-\infty} : \rho(h)a = \chi(h)a, h \in H\}.$$

Dans cette situation il y a (cf. [11]) une question concernant une sorte de réciprocité: $\dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ se qualifie-t-elle pour la multiplicité m(π) dans la désintégration (1)? On établira plus loin une version affaiblie de cette réciprocité dans un cas bien particulier, c'est-à-dire dans le cas symétrique nilpotent.

Soit e l'élément neutre de G. On sait (cf. [16]) que $\mathscr{H}_\tau^\infty \subset C^\infty(G)$ et que $\delta_\tau : \mathscr{H}_\tau^\infty \to \boldsymbol{C}$, $\delta_\tau(\psi) = \overline{\psi(e)}$, définit un élément de $(\mathscr{H}_\tau^{-\infty})^{H,\chi}$. Penney [15] a montré que la désintégration (1) de τ entraîne celle de δ_τ:

$$\delta_\tau = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \sum_{k=1}^{m(\pi)} a_\pi^k \, d\mu(\pi) \tag{2}$$

avec certains $a_\pi^k \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ $(1 \leq k \leq m(\pi))$.

C'est la formule (2) que nous appelons "formule de Plancherel pour τ". Soit $\mathscr{D}(G)$ l'espace des fonctions C^∞ sur G à support compact. Pour $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ on fabrique un élément φ_H^f de $\mathscr{H}_\tau^\infty$:

$$\varphi_H^f(g) = \int_H \varphi(gh)\chi_f(h)\, dh \quad (g \in G),$$

dh étant une mesure invariante fixée sur H. Alors la formule de Plancherel (2) se récrit [**11**]: quelle que soit $\varphi \in \mathscr{D}(G)$,

$$\varphi_H^f(e) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\varphi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle \, d\mu(\pi). \tag{3}$$

On définit maintenant une certaine algèbre d'opérateurs différentiels. Soit

$$C^\infty(G,\tau) = \{\varphi \in C^\infty(G) : \varphi(gh) = \chi(h)^{-1}\varphi(g)\ g \in G, h \in H\},$$

et soit $\mathit{Diff}(G,\tau)$ l'algèbre des opérateurs différentiels qui sont C^∞ et qui laissent $C^\infty(G,\tau)$ stable. Notre objet à étudier, c'est $D_\tau(G/H)$ qui se constitue des restrictions $D \mid C^\infty(G,\tau)$ de $D \in \mathit{Diff}(G,\tau)$ commutant avec translations à gauche de G sur $C^\infty(G,\tau)$. On a le:

THÉORÈME ([**6**]). *Si $m(\pi) < \infty$ μ-presque partout, l'algèbre $D_\tau(G/H)$ est commutative.*

Corwin et Greenleaf ont démontré ce théorème en montrant que $D_\tau(G/H)$ est isomorphe à une sous-algèbre du corps $C(\Gamma_\tau)^H$ des fonctions rationnelles sur Γ_τ qui sont H-invariantes, et en outre cette sous-algèbre engendre $C(\Gamma_\tau)^H$. En examinant de près cette démonstration et bien des exemples, ils posent la:

CONJECTURE (Corwin-Greenleaf). *Si $m(\pi) < \infty$ presque partout pour μ, alors $D_\tau(G/H)$ est isomorphe à l'algèbre $C[\Gamma_\tau]^H$ des fonctions polynomiales H-invariantes sur Γ_τ.*

Et puis, plus récemment ils ont des résultats affirmatifs sous une hypothèse assez gênante. Supposons:

(i) $m(\pi) < \infty$ μ-presque partout,

(ii) il existe une polarisation $\mathfrak{b}$ commune pour μ-presque toutes $l \in \Gamma_\tau$ telle que $\mathfrak{h}$ normalise $\mathfrak{b}$.

Sous ces conditions ils établissent le:

THÉORÈME ([**7**]). *L'algèbre $D_\tau(G/H)$ est isomorphe à $C[\Gamma_\tau]^H$.*

Dans toutes les démonstrations de ces deux théorèmes, Corwin et Greenleaf ont pleinement utilisé des coordonnées bien adaptées, des transformations de Malcev-Fourier et des analyses très détaillées des orbites coadjointes.

Nous nous proposons ci-après d'étudier leurs résultats et conjecture mentionés ci-dessus par une méthode toute différente de la leur. Notre outil principal, c'est la formule de Plancherel (3) pour τ, et il nous s'agit d'une généralisation du travail de Benoist [**1**]. Toutefois il doit être noté que nos résultats ne nous fournit pas un chemin court aux résultats de Corwin-Greenleaf.

Cette étude a été mis au point, lorsque l'auteur séjournait à l'Université de Poitiers. Il remercie Gérard Grélaud pour des discussions très utiles, Pierre Torasso et d'autres collègues pour leur aimable hospitalité.

Enfin l'auteur témoigne sa vive gratitude au referee pour ses efforts destinés à l'amélioration du manuscrit.

§ 2. Rappels

Quant à la méthode des orbites, on renvoie à [**2**], [**5**], [**10**], [**13**], [**17**] ou [**18**]. Revenons à la formule de Plancherel (3) pour notre représentation monomiale τ, supposée toujours avoir les multiplicités finies à la désintégration (1). Les distributions tempérées a_π^k intervenant à la formule (3) s'obtiennent comme suit (cf. [**11**]). Pour μ-presque partout, l'orbite coadjointe $\Omega(\pi)$ rencontre le sous-espace affine Γ_τ de $\mathfrak{g}^*$ en nombre $m(\pi)$ de H-orbites, soient ω_π^k, $1 \le k \le m(\pi)$. On fixe $l \in \Omega(\pi)$ et une polarisation $\mathfrak{b}$ en l pour réaliser $\pi = \operatorname{ind}_B^G \chi_l$, où $B = \exp \mathfrak{b}$ et $\chi_l(\exp X) = e^{il(X)}$ $(X \in \mathfrak{b})$. Pour $1 \le k \le m(\pi)$, on prend un élément $g_k \in G$ tel que $g_k \cdot l \in \omega_\pi^k$.

Tout cela nous permet d'écrire a_π^k explicitement: il existe une mesure invariante $d_k\dot{h}$ sur l'espace homogène $H/H \cap g_k B g_k^{-1}$ telle qu'on ait

$$\langle a_\pi^k, \psi \rangle = \int_{H/H\cap g_k B g_k^{-1}} \overline{\psi(hg_k)\chi_f(h)}\, d_k\, \dot{h} \tag{4}$$

pour $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$ quelconque. D'où le support de a_π^k coïncide avec la double classe Hg_kB qui est bien fermée dans G. On vérifie [**11**] que les supp a_π^k, $1 \le k \le m(\pi)$, sont disjoints l'un de l'autre.

Ensuite, suivant [**6**], [**7**] (voir aussi [**8**]), décrivons l'algèbre $D_\tau(G/H)$ en termes de l'algèbre enveloppante $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Pour $g \in G$ ou $A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$, on note R_g ou $R(A)$ (resp. L_g ou $L(A)$) l'action à droite (resp. à gauche). Soient $\mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ l'ensemble des $A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$ tels que $R(A)$ laisse $C^\infty(G, \tau)$ stable, $\mathfrak{a}_\tau$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ engendré par $Y + if(Y)$, Y parcourant $\mathfrak{h}$, et $\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ l'idéal à gauche de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{a}_\tau$. Alors il vient que

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau) = \{A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}) : [A, Y] \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau, \forall Y \in \mathfrak{h}\} \tag{5}$$

et que l'application $A \to R(A) | C^\infty(G, \tau)$ nous donne un homomorphisme γ de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ sur $D_\tau(G/H)$ avec le noyau $\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. En somme,

$$D_\tau(G/H) \cong \mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau)/\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau. \tag{6}$$

De plus, si le couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est réductif dans le sens qu'il existe un supplémentaire $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, on voit que

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau) = \mathscr{U}^H(\mathfrak{g}) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau \tag{7}$$

avec $\mathscr{U}^H(\mathfrak{g}) = \{A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}) : [A, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$. D'où

$$D_\tau(G/H) \cong \mathscr{U}^H(\mathfrak{g})/\mathscr{U}^H(\mathfrak{g}) \cap \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau. \tag{8}$$

§ 3. Commutativité de $D_\tau(G/H)$

Commençons par une remarque sur laquelle se reposeront tous nos raisonnements. D'après la formule de Plancherel (3) pour $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi$ $(\chi = \chi_f)$, on a

$$\varphi_H^f(g) = (L_{g^{-1}}\varphi)_H^f(e) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(L_{g^{-1}}\varphi)a_\pi^k, a_\pi^k \rangle \, d\mu(\pi) \quad (\forall g \in G) \tag{9}$$

pour n'importe quelle $\varphi \in \mathscr{D}(G)$. En y appliquant $R(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, on calcule

$$\begin{aligned}(R(X)\varphi_H^f)(g) &= (R(X)(L_{g^{-1}}\varphi_H^f))(e) = (L(-X)(L_{g^{-1}}\varphi_H^f))(e) \\ &= (L(-X)L_{g^{-1}}\varphi)_H^f(e) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(L(-X)L_{g^{-1}}\varphi)a_\pi^k, a_\pi^k \rangle \, d\mu(\pi) \\ &= \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(-X)\pi(L_{g^{-1}}\varphi)a_\pi^k, a_\pi^k \rangle \, d\mu(\pi) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(L_{g^{-1}}\varphi)a_\pi^k, \pi(X)a_\pi^k \rangle \, d\mu(\pi).\end{aligned}$$

Par conséquent, on établit pour tous $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ et $A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$

$$(R(A)\varphi_H^f)(g) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(L_{g^{-1}}\varphi)a_\pi^k, \pi(\overline{A})a_\pi^k \rangle \, d\mu(\pi) \quad (\forall g \in G), \tag{10}$$

où $\bar{A}$ signifie le conjugué complexe de A.

La formule (10) nous suggère un argument. Pour $\pi \in \hat{G}$, on fixe $l \in \Omega(\pi)$ et une polarisation $\mathfrak{b}$ en l au moyen desquelles se réalise $\pi = \mathrm{ind}_B^G \chi_l$, où $B = \exp \mathfrak{b}$, $\chi_l(\exp X) = e^{il(X)}$ $(X \in \mathfrak{b})$. Nous allons poser $S = \{g \in G : g \cdot (l + \mathfrak{b}^\perp) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \varnothing\}$ et $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi} = \{a \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi} : \mathrm{supp}\, a \subset \bar{S}\}$. Ici supp a dénote le complément du plus grand ouvert $U \subset G$ tel que U est B-invariant à droite et que $\langle a, \psi \rangle = 0$ pour tout $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$ ayant le support compact modulo B. Il est clair que S est stable par H (resp. B) à gauche (resp. à droite). En réalité, on a vu dans **[11]** que, pour μ-presque toute $\pi \in \hat{G}$, S est fermé dans G et consiste en double classes Hg_kB en nombre $m(\pi)$ avec $g_k \in G$ tels que $g_k \cdot l \in \omega_\pi^k$ $(1 \le k \le m(\pi))$. Soit $A \in \mathscr{U}^H(\mathfrak{g})$ par exemple, alors il vient $\pi(A)a_\pi^k \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$. Donc si l'on pouvait montrer la réciprocité faible, i.e.

$$m(\pi) = \dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$$

presque partout pour μ, l'opérateur $\pi(A)$ préservant les supp a_π^k $(1 \le k \le m(\pi))$ qui sont disjoints l'un de l'autre, $\pi(A)a_\pi^k$ serait un multiple de a_π^k, c'est-à-dire $\pi(A)a_\pi^k = \lambda_\pi^k(A)a_\pi^k$ avec $\lambda_\pi^k(A) \in \boldsymbol{C}$. Il en résulterait qu'il existe, pour μ-presque toute $\pi \in \hat{G}$, des caractères $\lambda_\pi^k : \mathscr{U}^H(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{C}$, $1 \le k \le m(\pi)$, tels que

$$\pi(A)a_\pi^k = \lambda_\pi^k(A)a_\pi^k. \tag{11}$$

S'il en est ainsi, la formule (10) montrerait la commutativité de $D_\tau(G/H)$ dans le cas où s'établirait l'égalité (7).

Dans ce chemin de raisonnement il nous reste à démontrer la réciprocité (faible), et jusqu'à présent l'auteur n'en sais ni démonstration ni contre-exemple. Néanmoins la forme explicite (4) de a_π^k nous laisse de la chance.

Soient $l \in \Gamma_\tau = f + \mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{b}$ une polarisation en l et $\pi = \pi_l = \operatorname{ind}_B^G \chi_l \in \hat{G}$. Au moyen d'une base coexponentielle (cf. [2], Chap. I) à $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$, π se réalise dans $L^2(\boldsymbol{R}^m)$ ($m = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$) et $\mathscr{H}_\pi^\infty$ s'identifie avec $\mathscr{S}(\mathbf{R}^m)$, l'espace des fonctions de Schwartz (cf. [5]). Comme il existe une telle base dont une partie forme celle à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{h}$, on trouve un élément $a(l)$ de $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ par la formule

$$\langle a(l), \psi \rangle = \int_{H/H\cap B} \overline{\psi(h)\chi(h)}\, d\dot{h} \tag{12}$$

pour tout $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$. Là, $d\dot{h}$ dénote une mesure invariante sur l'espace homogène $H/H \cap B$. On considère la forme bilinéaire B_l sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ définie par $B_l(X, Y) = l([X, Y])$. On note $\mathfrak{g}(l)$ le noyau de B_l et $Q(l, \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{k} + \mathfrak{g}(l)$ est un sous-espace lagrangien pour B_l. Il vaut noter que

$$\mathfrak{k} \in Q(l, \mathfrak{g}) \Leftrightarrow \langle l, [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \rangle = \{0\} \text{ et } \dim G \cdot l = 2 \dim K \cdot l \text{ avec } K = \exp \mathfrak{k}.$$

Si $\mathfrak{h} \in Q(l, \mathfrak{g}), a(l)$ ne dépend essentiellement pas du choix de $\mathfrak{b}$. Cela veut dire qu'à un scalaire multiplicatif près $a(l) = a(l, \mathfrak{b})$ et $a(l, \mathfrak{b}')$ se transfèrent par l'opérateur d'entrelacement entre deux réalisation de la classe de π au moyen de deux polarisations $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ à $l \in \Gamma_\tau$ (cf. [11], p. 345). Donc, si $a(l, \mathfrak{b})$ est un vecteur propre de $\pi(l, \mathfrak{b})(V)$ ($V \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$), $a(l, \mathfrak{b}')$ est celui de $\pi(l, \mathfrak{b}')(V)$ et ils ont la même valeur propre.

THÉORÈME 1. *Supposons que τ est à multiplicités finies, $l \in \Gamma_\tau$ et que $\mathfrak{h} \in Q(l, \mathfrak{g})$. Pour $A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau)$, $\pi(\bar{A})\, a(l)$ est un multiple de $a(l)$, c'est-à-dire qu'il existe un caractère $\lambda_l : \mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau) \to C$ tel que*

$$\pi_l(\bar{A}) a(l) = \overline{\lambda_l(A)} a(l). \tag{13}$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que nous avons $\pi_l(\bar{A}) a(l) = 0$ pour tout $A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, car $a(l) \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$. On peut supposer que $\mathfrak{h}$ contient le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$. En effet, posons $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}$, $K = \exp \mathfrak{k}$ et $\sigma = \operatorname{ind}_K^G \chi_l$. Il se voit alors que $\mathfrak{k} \in Q(l, \mathfrak{g})$, $a(l) \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{K, \chi_l}$ et que $\mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau) \subset \mathscr{U}(\mathfrak{g}, \sigma)$.

Cela posé, on procède par récurrence sur la dimension de G. En passant au quotient par $\exp(\mathfrak{z} \cap \ker f)$ si besoin est, on se ramène au cas où $\mathfrak{z} \cap \ker f = \{0\}$. Soient $\mathfrak{z} = \boldsymbol{R}Z$ et $f(Z) = 1$. Il est bien connu [13] qu'il existe deux éléments X, Y dans $\mathfrak{g} \cap \ker f$ tels que $[X, Y] = Z$ et que $\mathfrak{g} = \boldsymbol{R}X + \mathfrak{g}_0$ avec $\mathfrak{g}_0 = \{W \in \mathfrak{g} : [W, Y] = 0\}$. De plus il est faisable de prendre $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}_0$. Posons $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$, $l_0 = l \mid \mathfrak{g}_0 \in \mathfrak{g}_0^*$ et $\pi_0 = \operatorname{ind}_B^{G_0} \chi_{l_0}$.

On distingue deux cas. Premièrement soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Le théorème 5.4, (b) dans [6] dit que $\mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau) = \mathscr{U}(\mathfrak{g}_0, \tau_0) + \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ avec $\tau_0 = \operatorname{ind}_H^{G_0} \chi$. D'où il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-groupe G_0, car $\mathfrak{h} \in Q(l_0, \mathfrak{g}_0)$ et que $a(l)$ se regarde comme $a(l_0)$ dans $(\mathscr{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H,\chi}$.

Deuxièmement soit $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$. On prend X dans $\mathfrak{h} \cap \ker f$ et pose $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$, $H_0 = \exp \mathfrak{h}_0$. Il est immédiat que $\mathfrak{h}_0 \in Q(l_0, \mathfrak{g}_0)$. Chaque élément $A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$ s'écrit $A = \sum_{j=0}^{j=d} A_j X^j$ avec certains $A_j \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}_0)$, $0 \le j \le d$. D'où $A \equiv A_0$ modulo $\mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ et $\pi(\bar{A}) a(l) = \pi(\bar{A}_0) a(l)$.

D'ailleurs, si $A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau)$, $[A_0, W] \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}_0)\mathfrak{a}_{\tau_0}$ pour $W \in \mathfrak{h}$ arbitraire. On en déduit le résultat attendu. Pour cela, rappelons que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_0$, ce qui signifie que $\mathfrak{b}$ est une polarisation à $l \in \mathfrak{g}^*$ et à $l_0 \in \mathfrak{g}_0^*$. Calculons $\langle \pi(\bar{A}_0)a(l), \psi \rangle$ pour $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$ de la forme $\psi(\exp \chi X \cdot g_0) = \zeta(x)\xi(g_0)$ $(x \in \boldsymbol{R}, g_0 \in G_0)$ avec $\zeta \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R})$, $\xi \in \mathscr{H}_{\pi_0}^\infty$. Pour $V \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$, on note $g \cdot V$ $(\forall g \in G)$ l'image de V sous l'action adjointe de g et ${}^tV$ celle par l'anti-automorphisme principal de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Posons $h(x) = \exp(xX) \in H$ $(\forall x \in \boldsymbol{R})$. On constate alors

$$\begin{aligned}\langle \pi(\overline{A_0})a(l), \psi \rangle &= \langle a(l), \pi({}^tA_0)\psi \rangle \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \overline{\zeta(x)} \left(\int_{H_0/H_0 \cap B} \overline{(\pi_0({}^t(h(-x) \cdot A_0))\xi)(h_0)\chi(h_0)}\, d\dot{h}_0 \right) dx \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \overline{\zeta(x)} \langle \pi_0 \overline{(h(-x) \cdot A_0)} a(l_0), \xi \rangle\, dx = \left(\int_{\boldsymbol{R}} \overline{\zeta(x)}\, dx \right) \langle \pi_0(\overline{A_0})a(l_0), \xi \rangle,\end{aligned}$$

où $a(l_0) \in (\mathscr{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H_0,\chi}$ s'obtient par

$$\langle a(l_0), \xi \rangle = \int_{H_0/H_0 \cap B} \overline{\xi(h_0)\chi(h_0)}\, d\dot{h}_0$$

si $d\dot{h} = dx\, d\dot{h}_0$ pour $h = \exp xX \cdot h_0 \in H$. Par hypothèse de récurrence, $\pi(\bar{A}_0)a(l_0) = \overline{\lambda_{l_0}(A_0)}\, a(l_0)$ et donc $\langle \pi(\bar{A})a(l), \psi \rangle = \overline{\lambda_{l_0}(A_0)} \langle a(l), \psi \rangle$ pour $\psi = \zeta \otimes \xi$. Puisque $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}) \hat{\otimes} \mathscr{H}_{\pi_0}^\infty \cong \mathscr{H}_\pi^\infty$, on en déduit $\pi(\bar{A})\, a(l) = \overline{\lambda_{l_0}(A_0)}\, a(l)$ pour $A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau)$. c.q.f.d.

Corollaire 1 (Corwin-Greenleaf [**6**]). *Si τ est à multiplicités finies, l'algèbre $D_\tau(G/H)$ est commutative.*

Remarque 1. Dans la démonstration du théorème 1 on a utilisé essentiellement le théorème 5.4, (b) de [**6**]. Comme ce dernier lui-même demande une longue démonstration, le corollaire 1 ne réclame pas grand-chose.

Rappelons que $\Xi = \{l \in \Gamma_\tau : \mathfrak{h} \in Q(l, \mathfrak{g})\}$ contient un ouvert de Zariski de Γ_τ, et que la fonction $l \mapsto P_A(l) = \lambda_l(A)$ $(A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau))$ est H-invariante sur Ξ, car $a(l)$ l'est à un scalaire multiplicatif près modulo l'opérateur d'entrelacement (cf. [**11**]). La conjecture de Corwin-Greenleaf nous amène aux questions suivantes.

La fonction $P_A(l)$ se prolonge-t-elle en une fonction polynomiale sur Γ_τ? Si c'est vrai, l'application $A \mapsto P_A(l)$ de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ dans $\boldsymbol{C}[\Gamma_\tau]^H$ est-elle surjective?

Lorsque $l \in \omega_\pi^k$, écrivons aussi λ_π^k au lieu de λ_l. Comme signalé dans [**14**], la formule de Plancherel (4) nous fournit un opérateur d'entrelacement entre deux membres de (1): pour $\varphi \in \mathscr{D}(G)$,

$$\varphi_H^f \in \mathscr{H}_\tau^\infty \mapsto \int_{\hat{G}}^{\oplus} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \pi(\varphi) a_\pi^k\, d\mu(\pi).$$

De même elle entraîne de ce qui précède une diagonalisation de $\gamma(A) \in D_\tau(G/H)$, un élément du commutant de $\tau \mid \mathscr{H}_\tau^\infty$: pour $A \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau)$,

$$\gamma(A) \mapsto \int_{\hat{G}}^{\oplus} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \lambda_\pi^k(A)\, d\mu(\pi).$$

§ 4. Espaces symétriques nilpotents

Nous allons étudier la réciprocité faible dans un cas bien particulier. Il nous s'agit du cas symétrique, ce qui veut dire que H coïncide avec l'ensemble des points fixes d'une involution σ de G. C'est ce que nous supposons désormais. On note encore σ l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ dérivé de σ. Donc $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\}$. Soit $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = -X\}$ de sorte qu'on ait $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$. On garde les notations $\chi = \chi_f \ (f \in \mathfrak{g}^*)$, $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi = \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu(\pi)$ avec $m(\pi) < \infty$ etc. Pour $l \in \mathfrak{g}^*$, $M(l, \mathfrak{g})$ dénote l'ensemble des polarisations (réelles) de $\mathfrak{g}$ en l. Généralisons maintenant un résultat de Benoist [**1**] qui concerne le cas où χ est trivial.

Théorème 2. *Supposons que τ est à multiplicités finies. On établit la réciprocité faible, c'est-à-dire que $m(\pi) = \dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$ presque partout pour μ. Plus encore, si $0 < \dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi} < \infty$, alors $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau \neq \varnothing$. Enfin soit $E = \{\pi \in \hat{G} : \dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi} < \infty, (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi} \neq (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}\}$. Alors, on a $\mu(E) = 0$.*

Remarque 2. Il est connu (cf. [**15**]) que $m(\pi) \leq \dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ presque partout pour μ. Donc si $m(\pi) \equiv \infty$ uniformément, la réciprocité de Frobenius s'ensuit dans ce cas-là.

Démonstration. Tout d'abord, on sait déjà (cf. [**12**], pp. 165–166) que la condition $0 < \dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi} < \infty$ entraîne $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau \neq \varnothing$. Pour μ-presque toutes $\pi \in \hat{G}$ on a déjà construit les éléments a_π^k $(1 \leq k \leq m(\pi))$ de $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$ qui sont des mesures de Radon. Ce que nous allons démontrer, c'est que $m(\pi) = \dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$, autrement dit que chaque élément de $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$ ne contient pas de dérivation dans la direction transversale à $S = \{g \in G : g \cdot (l + \mathfrak{b}^\perp) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \varnothing\}$, et que la condition $\dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi} < \infty$ entraîne $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi} = (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$.

Comme d'habitude, on procède par récurrence sur $\dim G$. Soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Soient $\pi \in \hat{G}$ et $a \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$. On fixe $l \in \Omega(\pi)$ et $\mathfrak{b} \in M(l, \mathfrak{g})$ au moyen desquelles on réalise $\pi = \mathrm{ind}_B^G \chi_l$, où $B = \exp \mathfrak{b}$, $\chi_l(\exp X) = e^{il(X)}$ $(X \in \mathfrak{b})$ comme avant. Si $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} \cap \ker f \neq \{0\}$ ou $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{p} \cap \ker l \neq \{0\}$, on peut passer au quotient. Supposons donc $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} \cap \ker f = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{p} \cap \ker l = \{0\}$.

Comme $\mathfrak{k} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ est un idéal σ-stable de $\mathfrak{g}$, et que $\mathfrak{g}$ est nilpotente, il est capable de construire un drapeau $(\mathfrak{g}_j)_{0 \leq j \leq n}$, qui passe $\mathfrak{k}$, d'idéaux σ-stables de $\mathfrak{g}$. Cela signifie que

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}, \ \dim \mathfrak{g}_j = j \quad (0 \leq j \leq n) \tag{14}$$

et qu'il existe un indice j_0 tel que $\mathfrak{g}_{j_0} = \mathfrak{k}$.

I. En premier lieu, soit $\dim \mathfrak{z} = 1$, ce qui entraîne $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_1$ et $f \mid \mathfrak{z} \neq 0$. On prend un triplet d'Heisenberg (X, Y, Z), $[X, Y] = Z$, de telle façon que $\mathfrak{z} = \boldsymbol{R}Z$, $l(Z) = 1$, $\mathfrak{g}_2 = \boldsymbol{R}Y \oplus \mathfrak{z}$ et que $\mathfrak{g} = \boldsymbol{R}X + \mathfrak{g}'$ avec le centralisateur $\mathfrak{g}'$ de Y dans $\mathfrak{g}$. On choisit comme $\mathfrak{b}$ la polarisation de Vergne (cf. [**2**], Chap. IV) construite à partir du drapeau (14). De temps à autre on change de polarisations, mais la proposition 3 de [**11**] nous confirme que l'opérateur d'entrelacement dû à Lion entre ces réalisations différentes de π fait correspondre l'espace $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$ l'un à l'autre. D'après la construction, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}'$. On pose $G' = \exp \mathfrak{g}'$, $\pi' = \mathrm{ind}_B^{G'} \chi_l \in \hat{G}'$.

(i) Soit d'abord $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{p}$. Reprenons les arguments utilisés dans [**11**]. Si $\mathfrak{g}_2 \not\subset \mathfrak{p}$, on choisit Y dans $\mathfrak{h}$. D'après la semi-invariance de a relative à $\exp yY$ $(y \in \boldsymbol{R})$, on voit que

a n'est autre que la mesure de Dirac pour la coordonnée de X. En effet, on calcule pour $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$:

$$\langle \pi(\exp yY)a, \psi(g)\rangle = \langle a, \psi(\exp(yY)g' \exp xX)\rangle$$
$$= \langle a, \psi(g' \exp xX \exp yY \exp(-xyZ))\rangle = \langle a, e^{iy(x-l(Y))}\psi(g)\rangle,$$

ici $g = g' \exp xX$ avec $x \in \boldsymbol{R}$, $g' \in G'$. Donc la semi-invariance demandée pour a exige

$$(e^{iyf(Y)} - e^{iy(l(Y)-x)})a = 0 \quad (\forall y \in \boldsymbol{R}),$$

d'où découlent supp $a \subset G' \exp x_0 X$ avec $x_0 = l(Y) - f(Y)$ et le fait que a ne contient pas de dérivée transversale à G'.

Remarquons que cette valeur x_0 se donne par la condition $((\exp x_0 X) \cdot l)(Y) = f(Y)$. Soient $g_0 = \exp x_0 X$, $B' = g_0 B g_0^{-1}$ et $\tilde{\pi} = \mathrm{ind}_{B'}^{G'} \chi_{g_0 \cdot l}$. Notons ici que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}'$. Il résulte de ce qu'on vient de voir qu'il existe $a' \in (\mathscr{H}_{\tilde{\pi}}^{-\infty})^{H,\chi}$ tel que $\langle a, \psi\rangle = \langle a', \psi_{g_0}(g')\rangle$, où $\psi_{g_0} \in \mathscr{H}_{\tilde{\pi}}^\infty$ s'obtient simplement par $\psi_{g_0}(g') = \psi(g' g_0)$. C'est ce qui nous amène à la conclusion cherchée. On descend au sous-groupe G' auquel s'applique l'hypothèse de récurrence. Plus précisement si $a \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$, alors $a' \in (\mathscr{H}_{\tilde{\pi}}^{-\infty})_0^{H,\chi}$ et d'après l'hypothèse de récurrence a', et donc a non plus, ne contient pas de dérivée transversale. Par ailleurs, l'espace $(\mathscr{H}_{\tilde{\pi}}^{-\infty})^{H,\chi}$ s'injecte dans $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ et si celui-ci est de dimension finie, alors celui-là l'est aussi. Ceci posé, l'hypothèse de récurrence dit que $a' \in (\mathscr{H}_{\tilde{\pi}}^{-\infty})_0^{H,\chi}$ et par conséquent que $a \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$.

Si $Y \in \mathfrak{p}$, alors X peut être choisi dans $\mathfrak{h}$. La semi-invariance de a par rapport à $\exp xX$ $(x \in \boldsymbol{R})$ nous dit qu'il existe un certain $a' \in (\mathscr{H}_{\pi'}^{-\infty})^{H_0,\chi}$, $H_0 = \exp(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}')$, tel qu'on ait

$$\langle a, \psi(g)\rangle = \int_{\boldsymbol{R}} \langle a', \psi_x(g')\rangle \overline{\chi(\exp xX)}\, dx$$

pour $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$ quelconque, où $\psi_x \in (\mathscr{H}_{\pi'}^{-\infty})^{H_0,\chi}$ donné par $\psi_x(g') = \psi(\exp(xX)g')$ $(x \in \boldsymbol{R}, g' \in G')$.

Posons $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$, $\tau' = \mathrm{ind}_{H_0}^{G'}(\chi | H_0)$ et $\Gamma_{\tau'} = (f|\mathfrak{g}') + \mathfrak{h}_0^\perp \subset (\mathfrak{g}')^*$. Lorsque $l \in \Gamma_\tau$ et que $\mathfrak{h} \in Q(l, \mathfrak{g})$, il est clair que $\mathfrak{h}_0 \in Q(l|\mathfrak{g}', \mathfrak{g}')$. D'où τ' est aussi à multiplicités finies. D'autre part, $\pi = \mathrm{ind}_{G'}^G \pi'$ et l'on vérifie que les H_0-orbites dans $\Omega_{G'}(\pi') \cap \Gamma_{\tau'}$ correspondent bijectivement avec H-orbites dans $\Omega_G(\pi) \cap \Gamma_\tau$.

D'après tout ce qu'on vient d'observer, on peut passer de (H, χ) dans G à $(H_0, \chi | H_0)$ dans G', ce qui nous permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

(ii) Soit maintenant $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}$. C'est le cas essentiel. La condition $f|\mathfrak{z} \neq 0$ nous amène au cas où $X, Y \in \mathfrak{p}$.

A) Supposons d'abord $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} \neq \mathfrak{z}$. Soit i_0 $(3 \leq i_0 \leq j_0)$ le premier indice vérifiant $\mathfrak{g}_{i_0} \cap \mathfrak{h} \neq \mathfrak{z}$, et prenons $W \in \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ de sorte qu'on ait $\mathfrak{g}_{i_0} = \boldsymbol{R}W + \mathfrak{g}_{i_0-1}$. Il est évident que W est central dans $\mathfrak{h}$, ce qui entraîne $[\mathfrak{p}, W] \neq \{0\}$. Signalons ensuite que W appartient au centre de $\mathfrak{g}_{i_0}$ qui est G-stable et contenu dans $\mathfrak{b}$. En effet,

$$[W, \mathfrak{g}_{i_0}] \subset [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{g}_{i_0-1}] \subset [\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{g}_{i_0-1}]] \subset [\mathfrak{p}, \mathfrak{z}] = \{0\}.$$

En fixant une base coexponentielle à $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ (cf. [**2**], Chap. I), on identifie G/B à un fermé $E \subset G$ et par conséquent $\mathscr{H}_\pi^\infty$ (resp. a) à l'espace des fonctions de Schwartz (resp.

une distribution tempérée) sur E. Quels que soient $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$ et $t \in \boldsymbol{R}$, on a

$$\langle \pi(\exp tW)a, \psi(g)\rangle = \langle a, \psi(\exp tW \cdot g)\rangle = \langle a, \overline{\chi_l(\exp(tg^{-1}W)}\psi(g)\rangle \quad (g \in E).$$

D'où $(\chi_f(\exp tW) - \chi_{g\cdot l}(\exp tW))a = 0$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$, et l'on vérifie

$$\operatorname{supp} a \subset \{g \in E : g \cdot l(W) = f(W)\}. \tag{15}$$

Faisons attention à l'idéal $[\mathfrak{p}, W] \oplus \mathfrak{z}$. En remplaçant le dapeau (14) si besoin est, on peut supposer que $\mathfrak{g}_{i_0-1} = [\mathfrak{p}, W] \oplus \mathfrak{z}$ et $\mathfrak{g}_{i_0} = \boldsymbol{R}W \oplus \mathfrak{g}_{i_0-1}$. On voit facilement que $\mathfrak{g}_{i_0}$ est abélien. Maintenant on considère la forme quadratique symétrique non nulle

$$F(U, V) = l([U, [V, W]])$$

sur $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$. Soient $\mathfrak{p}_0$ le noyau de F, ce qui signifie $[\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}_0, W]] = \{0\}$, $\mathfrak{p}_1$ un supplémentaire de $\mathfrak{p}_0$ dans $\mathfrak{p}$ et $\{X_j : 1 \le j \le m\}$ une base de $\mathfrak{p}_1$ telle que l'on ait

$$F(U, V) = \sum_{j=1}^{r} u_j v_j - \sum_{j=r+1}^{m} u_j v_j$$

pour $U = \sum_{j=1}^m u_j X_j$, $V = \sum_{j=1}^m v_j X_j$. Soit $\{Y_j : 1 \le j \le m\}$ une base de $[\mathfrak{p}_1, W]$ vérifiant $[X_j, Y_k] = \delta_{j,k} Z$. Il en vient que $[X_j, W]$ est égal à Y_j (resp. $-Y_j$) si $1 \le j \le r$ (resp. $r+1 \le j \le m$).

En outre $[[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{g}_{i_0}] = \{0\}$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{p}_0$. En effet, la première relation est claire, la seconde résulte de

$$l([\mathfrak{p}, [[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_0], W]]) = l([\mathfrak{p}, [\mathfrak{h}, [\mathfrak{p}_0, W]]]) = l([[\mathfrak{p}, \mathfrak{h}], [\mathfrak{p}_0, W]]) \subset l([\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}_0, W]]) = \{0\}.$$

Cela entraîne que $[\mathfrak{p}_0, W]$ est $\mathfrak{h}$-stable et que, si $[\mathfrak{p}_0, W] \ne \{0\}$, il existe $0 \ne V \in [\mathfrak{p}_0, W] \subset \mathfrak{p}$ tel que $[\mathfrak{h}, V] = \{0\}$. Comme $[\mathfrak{p}, V] = \{0\}$, V appartient au centre $\mathfrak{z}$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, $[\mathfrak{p}_0, W] = \{0\}$. En résumé,

$$\mathfrak{p}_0 = (\text{centralisateur de } W) \cap \mathfrak{p}.$$

Remarquons que $G = H \cdot \exp \mathfrak{p}_0 \cdot \exp \mathfrak{p}_1$ et que $\tilde{G} = H \cdot \exp \mathfrak{p}_0$ est un sous-groupe fermé connexe. En effet, la seconde égalité est claire. Vérifions la première. On a

$$[\mathfrak{p}, [[\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]], W]] = [\mathfrak{p}, [[\mathfrak{p}, W], [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]]] \subset [\mathfrak{p}, [[[\mathfrak{p}, W], \mathfrak{p}], \mathfrak{p}]] = \{0\}$$

car $[[\mathfrak{p}, W], \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{z}$. A savoir $[\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]] \subset \mathfrak{p}_0$. S'il en est ainsi, chaque élément $g \in G$ s'écrit $g = h\exp(X_0 + X_1)$ avec $h \in H$, $X_k \in \mathfrak{p}_k$ $(k = 0, 1)$ et d'après la formule de Campbell-Hausdorff on a $g\exp(-X_1) \in \tilde{G}$. Séparons encore deux sous-cas.

a) Si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{i_0-1}] = \{0\}$, alors $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}_0$ est un idéal qui contient $\mathfrak{b}$. Au fait, $\tilde{\mathfrak{g}}$ n'est autre que le centralisateur de $\mathfrak{g}_{i_0}$. En effet, rappelons d'abord $\mathfrak{g}_{i_0-1} = [\mathfrak{p}, W] \oplus \mathfrak{z}$ et $\mathfrak{g}_{i_0} = \boldsymbol{R}W \oplus \mathfrak{g}_{i_0-1}$. D'où

$$[\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}_{i_0-1}] = [\mathfrak{p}_0, \mathfrak{g}_{i_0-1}] = [\mathfrak{p}_0, [\mathfrak{p}_1, W]] \subset [\mathfrak{h}, W] + [\mathfrak{p}_1, [\mathfrak{p}_0, W]] = \{0\}.$$

La relation $[\tilde{\mathfrak{g}}, W] = \{0\}$ étant triviale, on en déduit $[\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}_{i_0}] = \{0\}$. D'autre part, comme $\mathfrak{p}_1 = \sum_{j=1}^m \boldsymbol{R}X_j, \mathfrak{g}_{i_0-1} \cap \mathfrak{p}_0 \supset [\mathfrak{p}_1, W] = \sum_{j=1}^m \boldsymbol{R}Y_j$ et que $l([X_j, Y_k]) = \delta_{j,k}$, on observe que $\tilde{\mathfrak{g}}$ coïncide avec le centralisateur de $\mathfrak{g}_{i_0}$ et encore avec l'orthogonal de $\mathfrak{g}_{i_0}$ par rapport à la forme bilinéaire B_l. Comme $\mathfrak{g}_{i_0} \subset \mathfrak{b}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ contient $\mathfrak{b}$. $\tilde{G} = \exp \tilde{\mathfrak{g}}$ est un sous-groupe distingué, σ-invariant et contenant le produit HB. Nous allons reprendre les arguments développés dans [**12**], pp. 165–166.

Suivant $G = \exp \mathfrak{p}_1 \cdot \tilde{G}$, on écrit chaque $g \in G$ comme $g = \exp\left(\sum_{j=1}^m x_j X_j\right) \cdot \tilde{g}$ avec $x_j \in \boldsymbol{R}$ et $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Comme $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{i_0-1}] = \{0\}$, $\pi(\mathfrak{g}_{i_0-1})a$ et donc $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)a$ appartiennent à $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ pour tous les polynômes P à m-variables. Cela résulte des calculs suivants. Nous calculons $Y_j\psi = \sqrt{-1}(l(Y_j) - x_j)\psi$ $(1 \le j \le m)$ pour tout vecteur $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$. D'où $x_j a = l(Y_j)a + \sqrt{-1}\, Y_j a \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ et ainsi de suite. En particulier, pour $1 \le j \le m$, $x_j^d a \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ $(\forall\, d \in \boldsymbol{N})$ et si dim $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi} < \infty$, il existe un polynôme $P_j \neq 0$ à une variable tel que $P_j(x_j)a = 0$. D'où supp a se projette en nombre fini de points dans $\exp \mathfrak{p}_1$.

Montrons que $m(\pi) = \dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$ presque partout pour μ. La dimension en membre droit ne dépend pas de réalisation de π. On considère (cf. § 2) $\pi \in \hat{G}$ telle que $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau$ soit une réunion disjointe de H-orbites ω_π^k en nombre $m(\pi)$, i.e. $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau = \coprod_{k=1}^{m(\pi)} \omega_\pi^k$ et choisit l dans $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau$, soit dans $\omega_\pi^{k_0}$. On sait que $S = \coprod_{k=1}^{m(\pi)} Hg_kB$ (réunion disjointe), où $g_k \in G$ vérifie $g_k \cdot l \in \omega_\pi^k$ $(1 \le k \le m(\pi))$, et que toutes les doubles classes sont fermées dans G. Prenons par exemple $g_{k_0} = e$.

Etant donnée $a \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$, il s'agit de montrer que a ne contient pas de dérivée transversale à S. Comme a se décompose uniquement dans la somme $a = \sum_{k=1}^{m(\pi)} \tilde{a}_k$ avec certains $\tilde{a}_k \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})_0^{H,\chi}$ vérifiant supp $\tilde{a}_k \subset Hg_kB$, il nous suffit d'établir l'assertion suivante. Supposons que supp $a \subset HB \subset \tilde{G}$ et montrons que a est un multiple de $a_\pi^{k_0}$, i.e. qu'il existe un scalaire $c \in \boldsymbol{C}$ tel qu'on ait

$$\langle a, \psi \rangle = c \int_{H/H \cap B} \overline{\psi(h)\chi(h)}\, d\dot{h}$$

pour tout $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$. Si a est une distribution sur le sous-groupe $G^2 = \exp\left(\sum_{j=2}^m \boldsymbol{R}X_j\right) \cdot \tilde{G}$, il suffit d'appeler l'hypothèse de récurrence.

Si ce n'est pas le cas, on écrit (cf. [**3**], p. 106–p. 107) a, supposée non triviale, comme une somme de dérivées transversales de distributions sur G^2:

$$a = \sum_{j=0}^{s} \frac{\partial^j}{\partial x_1^j} a_j \quad (a_s \neq 0). \tag{16}$$

Supposons $s \ge 1$ et cherchons une contradiction. D'après (16),

$$a_s = (-1)^s (s!)^{-1} x_1^s a, \; a' = a_{s-1} + s \frac{\partial}{\partial x_1} a_s = (-1)^{s-1}((s-1)!)^{-1} x_1^{s-1} a$$

se trouvent dans $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$. L'hypothèse de récurrence dit que $a_s = c_1 a_\pi^k$ avec un certain $0 \neq c_1 \in \boldsymbol{C}$. On examine ensuite $x_2 a' = x_2 a_{s-1}$ de $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$. Si $x_2 a' = 0$, supp a' est inclus dans le sous-groupe $G^1 = \exp \boldsymbol{R}X_1 \exp\left(\sum_{j=3}^m \boldsymbol{R}X_j\right) \tilde{G}$ et a' ne contient pas de dérivée transversale par rapport à la variable x_2. On en déduit par hypothèse de récurrence que $a' = c' a_\pi^k$ avec un certain scalaire c', ce qui est absurde.

En conséquence, $x_2 a' \neq 0$ et encore une fois $x_2 a' = -c_2 a_\pi^k$ avec $c_2 \in \boldsymbol{C}$. D'où $a_{s-1} = c_2(\partial/\partial x_2) a_\pi^k + b$, b étant une distribution sur le sous-groupe $G^3 = \exp\left(\sum_{j=3}^m \boldsymbol{R}X_j\right) \cdot \tilde{G}$. Cette situation se reproduit par le fait que $x_3 a' = x_3 b$ appartient à

$(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$. En répétant ce procédé, on arrive éventuellement jusqu'à l'expression

$$a' = \left(\sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) a_\pi^k + \tilde{a} \quad (c_j \in \boldsymbol{C}), \tag{17}$$

où $\tilde{a}$ est une distribution sur $\tilde{G}$.

Calculons l'action de $\exp tW$ $(t \in \boldsymbol{R})$ sur a: en notant $g = \exp U \cdot \tilde{g}$ avec $U = \sum_{j=1}^m x_j X_j \in \mathfrak{p}_1$, $\tilde{g} \in \tilde{G}$ et posant $l_j = l([X_j, W])$ $(1 \le j \le m)$, i.e. $l_j = l(Y_j)$ pour $1 \le j \le r$ et $l_j = -l(Y_j)$ pour $r+1 \le j \le m$, on a

$$\begin{aligned}\langle \pi(\exp tW)a', \psi(g)\rangle &= \langle a', \psi(\exp tW \exp U \cdot \tilde{g})\rangle \\ &= \left\langle a', \psi\left(\exp U \exp t\left(W - [U, W] + \frac{1}{2}[U,[U,W]]\right) \cdot \tilde{g}\right)\right\rangle \\ &= \langle a', e^{-itl(W-[U,W]+1/2[U,[U,W]])}\psi(g)\rangle \\ &= \left\langle a', e^{-it\left\{f(W) - \sum_{j=1}^m x_j l_j + 1/2\left(\sum_{j=1}^r x_j^2 - \sum_{j=r+1}^m x_j^2\right)\right\}}\psi(g)\right\rangle\end{aligned}$$

pour tout $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$. La semi-invariance de a' signifie donc

$$\left(1 - e^{it\left\{\sum_{j=1}^m x_j l_j - 1/2\left(\sum_{j=1}^r x_j^2 - \sum_{j=r+1}^m x_j^2\right)\right\}}\right) a' = 0 \tag{18}$$

pour $t \in \boldsymbol{R}$ quelconque.

Les relations (17), (18) impliquent $\sum_{j=1}^m c_j l_j = 0$. Il en résulte que, si $l|\mathfrak{g}_{i_0-1} \cap \mathfrak{p} \ne 0$, a' n'a pas de dérivée dans la direction $\boldsymbol{R}(l_1, l_2, \ldots, l_m)$, c'est à dire que a' est une distribution sur $D = MH \exp \mathfrak{p}_0$, où $M = \exp \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m} = \left\{U = \sum_{j=1}^m x_j X_j \in \mathfrak{p}_1 : \sum_{j=1}^m l_j x_j = 0\right\}$. Or, D étant un sous-groupe σ-invariant de codimension 1, l'expression (17) contredit l'hypothèse de récurrence.

Quand on part de l'hypothèse $\dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi} < \infty$, étant donnée $a \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ on a vu que supp a se projette en nombre fini de points dans $\exp \mathfrak{p}_1$. En décomposant a dans la somme des distributions semi-invariantes dont le support se projette en un point dans $\exp \mathfrak{p}_1$, on se ramène au cas où supp $a \subset \exp X_0 \cdot \tilde{G} = \tilde{G} \cdot \exp X_0$ avec un certain $X_0 \in \mathfrak{p}_1$. Quitte à transférer $l \in \Omega(\pi)$ et $\mathfrak{b} \in M(l, \mathfrak{g})$ par l'élément $g_0 = \exp X_0$, l'opérateur d'entrelacement étant fourni comme translation à droite par g_0, il nous suffit d'étudier $a \in (\mathscr{H}_{\pi'}^{-\infty})^{H,\chi}$ dont le support est contenu dans $\tilde{G}$. Ici $\pi' = \mathrm{ind}_{B'}^G \chi_{l'}$ avec $B' = g_0 B g_0^{-1}$ et $l' = g_0 \cdot l \in \Omega(\pi)$. Cela posé, les raisonnements faits plus haut permettent de conclure que a est une combinaison linéaire des a_π^k $(1 \le k \le m(\pi))$ donnés en § 2.

b) Si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{i_0-1}] \ne \{0\}$, alors $i_0 \ge 4$ et soit j_1 $(2 \le j_1 \le i_0 - 2)$ le plus grand des indices j vérifiant $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$. Il se voit que $[\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}_{j_1+1}] = \{0\}$. En effet, il est clair que $[[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{g}_{j_1+1}] = \{0\}$, et d'autre part $[[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{g}_{j_1+1}] \subset [\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_{i_0-1} + \mathfrak{z}]] \subset [\mathfrak{p}, \mathfrak{z}] = \{0\}$. Soit $\pi \in \hat{G}$ telle que $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau = \coprod_{k=1}^{m(\pi)} \omega_\pi^k$, où l'on prend l. Notons encore que $\mathfrak{g}_{j_1+1} \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_{i_0-1} \cap \mathfrak{p} = ([\mathfrak{p}, W] \oplus \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{p} = [\mathfrak{p}_1, W] \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_0$, et envisageons une partie de la structure d'Heisenberg introduite juste avant de séparer les deux sous-cas. Quitte à remplacer si besoin est les vecteurs y introduits, prenons des éléments $P_j \in \mathfrak{p}_1$, $Q_j \in \mathfrak{p}_0$ $(1 \le j \le j_1)$ et

$T \in \mathfrak{h}$ de façon qu'on ait $[P_j, Q_k] = \delta_{j,k} Z$, $[T, Q_{j_1}] = Q_1$, $l(Q_1) = \lambda$, $l(Q_j) = 0$ $(2 \leq j \leq j_1)$ et $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{z} \oplus \sum_{k=1}^{j-1} \boldsymbol{R} Q_k$ $(2 \leq j \leq j_1 + 1)$. Ne cherchons le résultat que μ-presque partout, on suppose $\lambda \neq 0$ et regarde $\mathfrak{g}(l|\mathfrak{g}_{j_1+1}) = \{V \in \mathfrak{g} : B_l(V, \mathfrak{g}_{j_1+1}) = 0\}$. Il en vient $\mathfrak{p} = \sum_{j=1}^{j_1} \boldsymbol{R} P_j + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}(l|\mathfrak{g}_{j_1+1})$, $\mathfrak{h} = \boldsymbol{R} T + \mathfrak{h}'$ avec $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l|\mathfrak{g}_{j_1+1})$.

Si $\mathfrak{g}(l)$ est inclus dans l'idéal $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}' + \mathfrak{p}$, on a $\mathfrak{g} = \boldsymbol{R} T + \mathfrak{g}^0$ et la semi-invariance de a pour $\exp \boldsymbol{R} T$ nous amène au sous-groupe $G_0 = \exp \mathfrak{g}^0$, justement comme à la fin du cas (i). Si ensuite $\mathfrak{g}(l) \not\subset \mathfrak{g}^0$, on considère $l' \in \Omega(\pi)$ qui s'annule sur $\mathfrak{g}_{j_1+1} \cap \mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{g}_{j_1+1} \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_{i_0-1} \cap \mathfrak{p} = [\mathfrak{p}, W]$, on a $[\mathfrak{p}_0, \mathfrak{g}_{j_1+1} \cap \mathfrak{p}] \subset [\mathfrak{p}_0, [\mathfrak{p}, W]] = \{0\}$. Il s'en voit que $\mathfrak{g}(l'|\mathfrak{g}_{j_1+1}) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q} + \mathfrak{h} + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{h} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ étant le centralisateur de $\mathfrak{g}_{j_1+1}$. Car $l(Q_j) = 0$ $(2 \leq j \leq j_1)$ et que $l'|(\mathfrak{g}_{j_1+1} \cap \mathfrak{p}) = 0$, la condition $g \cdot l' = l$ pour $g \in G$ entraîne $g \cdot l'|\mathfrak{g}_{j_1+1} = \exp(-\lambda P_1) \cdot l'|\mathfrak{g}_{j_1+1}$, d'où $g \in \exp(-\lambda P_1) \exp(\mathfrak{h} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$. Alors $\mathfrak{g}(l) \not\subset \mathfrak{g}^0$ implique $\mathfrak{g}(l') \not\subset \mathfrak{g}^0$ et il existe $X' \in \mathfrak{g}(l') \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ tel que $X' = T + X'' + P'$ avec certains $X'' \in \mathfrak{h}'$ et $P' \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. D'où

$$\tilde{X} = \exp(-\lambda P_1) \cdot (T + X'' + P') \equiv T - \lambda [P_1, T] + X'' (\operatorname{mod} \mathfrak{q})$$

appartient à $\mathfrak{g}(l)$, car on a $[X'', \mathfrak{g}_{j_1+1}] \subset \mathfrak{g}_{j_1+1} \cap \mathfrak{p} \cap \ker l = \sum_{j=2}^{j_1} \boldsymbol{R} Q_j$ et par suite que $[P_1, [X'', \mathfrak{g}_{j_1+1}]] = \{0\}$.

Or, pour tout $g \in G$, il existe uniquement t, p_j $(1 \leq j \leq j_1 - 1)$ dans $\boldsymbol{R}$ qui vérifient

$$g \cdot l|\mathfrak{g}_{j_1+1} = \exp tT \left(\prod_{j=1}^{j_1-1} \exp p_j P_j \right) \cdot l|\mathfrak{g}_{j_1+1},$$

ce qui signifie la décomposition suivante qui nous donne des coordonnées sur G:

$$G = \exp \boldsymbol{R} T \left(\prod_{j=1}^{j_1-1} \exp \boldsymbol{R} P_j \right) G(l|\mathfrak{g}_{j_1+1}) = \exp \boldsymbol{R} T \left(\prod_{j=1}^{j_1-1} \exp \boldsymbol{R} P_j \right) \exp \mathfrak{h}' \exp(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) \exp \boldsymbol{R} \tilde{X},$$

où $G(l|\mathfrak{g}_{j_1+1})$ dénote le stabilisateur de $l|\mathfrak{g}_{j_1+1}$ dans G.

Négligeons d'abord $\exp \boldsymbol{R} \tilde{X} \subset G(l)$ et utilisant ensuite la semi-invariance de a pour $\exp \boldsymbol{R} T$, ce qui nous amène au sous-groupe distingué $G'' = \left(\prod_{j=1}^{j_1-1} \exp \boldsymbol{R} P_j \right) \exp \mathfrak{h}' \exp(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$. On finit par remarquer que G'' est σ-stable, de codimension 2 et que la représentation induite par χ restreint à $H' = \exp \mathfrak{h}'$ est à multiplicités finies. Le passage de (G, H, χ) à $(G'', H', \chi|H')$ s'assure par l'observation de la structure d'orbites coadjointes, ce qui est identique à la fin du cas (i).

B) Maintenant soit $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{z}$. Ici encore restent valables les raisonnements développés dans le cas A). Là on a utilisé le vecteur $W \in \mathfrak{h}$ et la forme F pour introduire la structure d'Heisenberg dans une partie de $\mathfrak{p} + \mathfrak{z}$. Ici c'est faisable plus directement. Soit $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{p} : [X, \mathfrak{p}] = \{0\}\}$. Si $\mathfrak{q} \neq \{0\}$, on constate que $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{z} \neq \{0\}$ car $\mathfrak{q}$ est $\mathfrak{h}$-stable. D'où $\mathfrak{q} = \{0\}$ et la sous-algèbre $\mathfrak{k} = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ est une algèbre d'Heisenberg ayant le centre $\mathfrak{z} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$.

Soit $\pi \in \hat{G}$ telle que $\Omega(\pi) \cap \Gamma_\tau = \coprod_{k=1}^{m(\pi)} \omega_\pi^k$, où l'on choisit $l \in \Omega(\pi)$. Soit $l' \in \Omega(\pi)$ vérifiant $l'|\mathfrak{p} = 0$. Si $l'([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \neq 0$, on peut supposer que $\mathfrak{g}(l') \subset \mathfrak{g}_{n-1}$ au drapeau (14). En effet, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + \mathfrak{p} + \mathfrak{z}$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{k} = \{0\}$ puisque $l([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = \{0\}$. Si $l'([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \neq \{0\}$, $\mathfrak{h}$ n'est pas abélienne. Comme $\mathfrak{g}(l') = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l')) + \mathfrak{z}$, on prend un idéal $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{h}$ et $T \in \mathfrak{h} \cap \ker f$ de façon qu'on ait $\mathfrak{h} = \boldsymbol{R} T + \mathfrak{h}_0$. Finalement remlacons au

(14) $\mathfrak{g}_{n-1}$ par $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{k}$ s'il en est besoin. Cela entraîne $\mathfrak{g} = \boldsymbol{R}T + \mathfrak{g}_{n-1}$, $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_{n-1}$ et nous utilisons T pour donner la première coordonnée dans $\mathscr{H}_\pi$. L'invariance de a pour $\exp \boldsymbol{R}T$ nous permet de passer au sous-groupe $G_{n-1} = \exp \mathfrak{g}_{n-1}$.

Si $l'([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0, \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(l')$, et la polarisation de Vergne $\mathfrak{b}'$ construite au moyen du drapeau (14) est de la forme $\mathfrak{b}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ étant un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ vérifiant $\dim \mathfrak{a} = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{p} + 1$. Dans le cas où $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \neq \{0\}$, on peut adopter les arguments de A), b). Dans le cas contraire, la commutativité $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] = \{0\}$ entraîne $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{a}$ et que $\mathfrak{b}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. D'où $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$.

Cette fois c'est les arguments de A), a) qui nous aident. Soient $\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^m \boldsymbol{R}Y_j + \mathfrak{z}$, et $\{X_j : 1 \leq j \leq m\}$ les éléments de $\mathfrak{p}$ tels que $[X_j, Y_k] = \delta_{j,k}Z$. On identifie $\exp\left(\sum_{j=1}^m \boldsymbol{R}X_j\right)$ avec G/B. Supposons $l \in \omega_\pi^k$ et $a \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ dont le support est égal à B. Il nous s'agit de montrer que a est un multiple de a_π^k, ici $a_\pi^k : \psi \mapsto \overline{\psi(e)}$ pour $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$.

D'une part, $\mathfrak{h} \in Q(l, \mathfrak{g})$, c'est-à-dire que $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}(l)$ est un sous-espace lagrangien pour la forme bilinéaire alternée B_l (cf. [**4**], [**11**]). Il s'ensuit que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{g}(l)$.

D'autre part, on identifie $\mathscr{H}_\pi^\infty$ à $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^m)$ par $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \psi\left(\exp\left(\sum_{j=1}^m x_jX_j\right)\right)$. Si a est une distribution sur un certain sous-groupe, l'hypothèse de récurrence nous donne le résultat. Sinon, justement comme dans A), a), on trouverait dans $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ un élément ayant la forme

$$a' = \sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial}{\partial x_j} a_\pi^k + b \quad \left(c_j \in \mathbf{C}, \sum_{j=1}^m |c_j|^2 \neq 0\right) \tag{19}$$

avec une distribution b sur B. Soit par exemple $c_1 \neq 0$.

En utilisant le fait $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{g}(l)$, nous écrivons $Y_1 = T + V$ avec $T \in \mathfrak{h}$, $V \in \mathfrak{g}(l)$ et calculons $\pi(\exp T)a'$: pour $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$

$$\begin{aligned}
&\langle \pi(\exp T)\, a', \psi \rangle \\
&= \left\langle a', \psi\left(\exp\left(\sum_{j=1}^m x_jX_j\right)\exp\left(T - \sum_{j=1}^m x_j[X_j, T] + \tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^m x_jx_k[X_j, [X_k, T]]\right)\right)\right\rangle \\
&= \left\langle a', e^{-i\left\{l(T) - \sum_{j=1}^m x_j l([X_j, T]) + 1/2 \sum_{j,k=1}^m x_jx_k l([X_j,[X_k,T]])\right\}}\psi\right\rangle \\
&= \left\langle a', e^{-i\left\{l(T) - x_1 + 1/2 \sum_{j,k=1}^m d_{jk}x_jx_k\right\}}\psi\right\rangle,
\end{aligned}$$

là-dessus on a posé $d_{jk} = l([X_j, [X_k, T]])$.

D'après la semi-invariance de a', on en déduit

$$\left\langle a', \left(1 - e^{i(x_1 - 1/2 \sum_{j,k=1}^m d_{jk}x_jx_k)}\right)\psi\right\rangle = 0 \tag{20}$$

pour $\psi \in \mathscr{H}_\pi^\infty$ arbitraire. Mais il est évident que les deux relations requises (19), (20) révèlent une contradiction.

On peut cheminer tout à fait pareillement sous l'hypothèse $\dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi} < \infty$ (cf. A)).

II. Soit finalement $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} = \dim \mathfrak{p} \cap \mathfrak{z} = 1$, car on a supposé au début de la démonstration, en passant au quotient si besoin est, que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} \cap \ker f = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{z} \cap \ker l = \{0\}$. Posons $\mathfrak{q} = \{Y \in \mathfrak{p} : [\mathfrak{p}, Y] = \{0\}\}$. Il se voit aussitôt que $\mathfrak{q}$ est $\mathfrak{h}$-stable. Si $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}$, il existe $0 \neq Y \in \mathfrak{q}$ tel que $\{0\} \neq [\mathfrak{h}, Y] \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}$. On se trouve alors dans la situation traitée dans la seconde moitié du cas I, (i). A la fin, si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}$, on peut raisonner tout à fait comme dans le cas I, (ii) pour achever la démonstration du théorème 2. c.q.f.d.

D'après ce qu'on a expliqué au début de § 3, on retrouve dans le cas symétrique le théorème 1 et le corollaire 1.

COROLLAIRE 2. *Avec les notations introduites en* § 2, *on constate que* $\pi(\overline{X})a_\pi^k$ *est un multiple de* a_π^k $(1 \leq k \leq m(\pi))$ *pour tout* $X \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ *et par suite que l'algèbre* $D_\tau(G/H)$ *est commutative.*

Bibliographie

[1] Y. Benoist, Espaces symétriques exponentiels, Thèse de 3e cycle, Univ. de Paris VII, 1983.
[2] P. Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris, 1972.
[3] F. Bruhat, Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. Fr. **84** (1956), 97–205.
[4] L. J. Corwin, F. P. Greenleaf and G. Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicites for induced representations of nilpotent Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. **304** (1987), 549–583.
[5] L. J. Corwin and F. P. Greenleaf, Representations of nilpotent Lie groups and their applications, Part I, Cambridge Univ. Press, Cambridge/New York, 1989.
[6] L. J. Corwin and F. P. Greenleaf, Commutativity of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces with finite multiplicity, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 681–748.
[7] L. J. Corwin and F. P. Greenleaf, Spectral decomposition of invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous spaces, J. Func. Anal. **108** (1992), 374–426.
[8] M. Duflo, Opérateurs différentiels invariants et homologie des algèbres de Lie (l'Appendice du cours en Tunis), 1983.
[9] G. Grélaud, Sur les représentations des groupes de Lie résolubles, Thèse Univ. de Poitiers, 1984.
[10] G. Grélaud, On representations of simply connected nilpotent and solvable Lie groups, Prépublication n° 76, Univ. de Poitiers, 1993.
[11] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, Pacific J. Math. **127** (1987), 329–351.
[12] H. Fujiwara et S. Yamagami, Certaines représentations monomiales d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Adv. St. Pure Math. **14** (1988), 153–190.
[13] A. A. Kirillow, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspehi Mat. Nauk **17** (1962), 57–110.
[14] R. Lipsman, The Penney-Fujiwara Plancherel formula for symmetric spaces, Birkhäuser, Progress in Math. **82** (1990), 135–145.
[15] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, J. Func. Anal. **18** (1975), 177–190.
[16] N. S. Poulsen, On C^∞-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups, J. Func. Anal. **9** (1972), 87–120.
[17] M. Raïs, Représentations des groupes de Lie nilpotents et méthode des orbites, dans "Analyse harmonique", CIMPA (1982), 447–710.
[18] P. Torasso, Representations of simply connected nilpotent Lie groups, Prépublication n° 63, Univ. de Poitiers, 1992.

Hidenori FUJIWARA
Université de Kinki à Kyusyu
11-6, Kayanomori, Iizuka 820
JAPON