J. Math. Soc. Japan
Vol. 50, No. 1, 1998

Majorations explicites du résidu au point 1 des fonctions zêta de certains corps de nombres

By Stéphane LOUBOUTIN

(Received Dec. 19, 1994)
(Revised Dec. 22, 1995)

1. Majoration du résidu au point 1 des fonctions zêta des corps de nombres totalement réels.

Le résultat suivant améliore notablement [**Sun**, Lemma 2.1]. C'est par soucis de concision et parce que nous n'envisageons de ne l'utiliser que sous cette hypothèse que nous supposons $\boldsymbol{K}$ totalement réel.

THÉORÈME 1. *Soit* $\boldsymbol{K}$ *un corps de nombres totalement réel de degré* $n \geq 2$, *de discriminant* $d_{\boldsymbol{K}}$, *de régulateur* $R_{\boldsymbol{K}}$, *de nombre de classes d'idéaux* $h_{\boldsymbol{K}}$ *et de résidu au point* 1 *de sa fonction zêta de Dedekind noté* $\operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}})$. *Alors*, $d_{\boldsymbol{K}}^{1/n} \geq e$ *pour* $\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$, *et*

$$\operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}) \leq \left(\frac{e \log d_{\boldsymbol{K}}}{2(n-1)}\right)^{n-1} \quad \textit{et} \quad h_{\boldsymbol{K}} R_{\boldsymbol{K}} \leq \sqrt{d_{\boldsymbol{K}}} \left(\frac{e \log d_{\boldsymbol{K}}}{4(n-1)}\right)^{n-1}.$$

PREUVE. La minoration $d_{\boldsymbol{K}}^{1/n} \geq e$ pour $\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ découle des résultats de [**Odl**]. Nous posons

$$s_0 \stackrel{def}{=} 1 + \frac{2n-2}{\log d_{\boldsymbol{K}}}$$

et remarquons que nous avons donc $1 < s_0 \leq 3$. Soit $s > 1$. D'après [**Lan**, preuve du **Th. 4**, page 261], nous avons

$$s(s-1) d_{\boldsymbol{K}}^{(s-1)/2} \Gamma^n(s/2) \pi^{-ns/2} \zeta_{\boldsymbol{K}}(s) \geq \operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}).$$

Puisque $\zeta_{\boldsymbol{K}}(s) \leq (\zeta(s))^n \leq (s/(s-1))^n$, nous avons:

$$\operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}) \leq \frac{d_{\boldsymbol{K}}^{(s-1)/2}}{(s-1)^{n-1}} f_n(s) \quad \text{avec} \quad f_n(s) = s^{n+1} \pi^{-ns/2} \Gamma^n(s/2).$$

Nous remarquons que le premier terme de cette majoration est minimal pour $s = s_0$ et qu'il est alors égal au majorant de $\operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}})$ donné à ce Théorème 1. Nous majorons donc maintenant $f_n(s_0)$ par 1. Pour cela, nous notons $\gamma = 0.577\ldots$ la constante d'Euler et remarquons que le produit infini de la fonction Γ donne

$$\frac{2s}{n} \frac{f_n'}{f_n}(s) = \frac{2}{n} - s(\log \pi + \gamma) + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{s}{k} - \frac{s}{k + (s/2)}\right) \stackrel{def}{=} g_n(s).$$

Mathematics Subject Classification. Primary 11R42; Secondary 11R29, 11R21.
Keywords. zeta function, CM-field, class number.

Maintenant, il est facile de voir que l'on a $g_n(s) \leq 0$ pour $1 < s \leq 3$, ce qui avec $1 < s_0 \leq 3$ implique $f_n(s_0) \leq f_n(1) = 1$ comme souhaité. En effet, on a

$$g_n'(s) = -(\log \pi + \gamma) + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{(k + (s/2))^2} \right),$$

de sorte que g_n' est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$, et que g_n est donc convexe sur cet intervalle $]0, +\infty[$. Mais alors, pour $1 < s \leq 3$ et $n \geq 2$, nous avons donc

$$g_n(s) \leq \max(g_n(1), g_n(3)) = \max\left(\frac{2}{n} + 2 - (\log(4\pi) + \gamma), \frac{2}{n} + 8 - 3(\log(4\pi) + \gamma) \right) < 0. \quad \bullet$$

De telles majorations de résidus permettent d'abord d'obtenir des minorations explicites sur les nombres de classes des corps à multiplication complexe, puis ensuite d'en déduire des majorations explicites des discriminants des corps à multiplication complexe de nombre de classes d'idéaux donné. Par exemple, on obtient ainsi de bonnes minorations des nombres de classes relatifs des corps à multiplication complexe galoisiens de groupe de Galois $\boldsymbol{G}$ un groupe dicyclique d'ordre $4p$ avec p premier impair (de présentation par générateurs et relations $\boldsymbol{G} = \langle a, b; a^{2p} = 1, a^p = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$). Nous remarquons également qu'un corps à multiplication complexe, non-abélien, galoisien, de degré $4p$ avec p un nombre premier impair est ou bien de groupe de Galois ce groupe dicyclique d'ordre $4p$, auquel cas il n'est jamais de nombre de classes d'idéaux égal à 1 (voir **[L-O-O]**), ou bien de groupe de Galois le groupe diédral d'ordre $4p$. Nous verrons au dernier paragraphe de cet article que de meilleures majorations du résidu des fonctions zêta de corps de nombres totalement réels permettent de déterminer les corps à multiplication complexe, diédraux de degré 12, et de nombres de classes d'idéaux égaux à 1.

2. Notations.

Soit $\boldsymbol{E}$ un corps de nombres de degré n, de valeur absolue de discriminant $d_{\boldsymbol{E}}$, et soient r_1 le nombre de plongements réels de $\boldsymbol{E}$, et $2r_2$ le nombre de plongements complexes deux à deux conjugués de $\boldsymbol{E}$, de sorte que $n = r_1 + 2r_2$. Nous posons

$$A_{\boldsymbol{E}} = \frac{\sqrt{d_{\boldsymbol{E}}}}{2^{r_2}\pi^{n/2}}, \quad \Gamma_{\boldsymbol{E}}(s) = \Gamma^{r_1}(s/2)\Gamma^{r_2}(s), \quad \text{et} \quad F_{\boldsymbol{E}}(s) = A_{\boldsymbol{E}}^s \Gamma_{\boldsymbol{E}}(s)\zeta_{\boldsymbol{E}}(s).$$

Notez que $F_{\boldsymbol{E}}$ vérifie $F_{\boldsymbol{E}}(1 - s) = F_{\boldsymbol{E}}(s)$ et est méromorphe dans tout le plan complexe, avec deux pôles, simples, en $s = 0$ et $s = 1$. Nous posons finalement

$$\lambda_{\boldsymbol{E}} \stackrel{def}{=} \operatorname{Res}_{s=1}(F_{\boldsymbol{E}}) = \frac{\sqrt{d_{\boldsymbol{E}}}}{(2\pi)^{r_2}} \operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{E}}) \quad \text{et} \quad \mu_{\boldsymbol{E}} \stackrel{def}{=} \lim_{s \searrow 1} \left\{ \frac{1}{\lambda_{\boldsymbol{E}}} F_{\boldsymbol{E}}(s) - \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) \right\}.$$

D'où

$$(s - 1)F_{\boldsymbol{E}}(s) = \lambda_{\boldsymbol{E}}(1 + (\mu_{\boldsymbol{E}} - 1)(s - 1) + O((s - 1)^2)). \tag{1}$$

LEMME 2. *Soit $\gamma = 0.577215664\ldots$ la constante d'Euler. Si $\boldsymbol{Q}$ désigne le corps des rationnels, alors $\mu_{\boldsymbol{Q}} = (2 + \gamma - \log(4\pi))/2 \approx 0.023\ldots$ Si $\boldsymbol{k}$ désigne un corps quadratique et si $L_{\boldsymbol{k}}$ désigne la fonction L associée au caractère du corps quadratique $\boldsymbol{k}$, donc telle que $\zeta_{\boldsymbol{k}}(s) = \zeta(s)L_{\boldsymbol{k}}(s)$, alors*

$$\mu_{\boldsymbol{k}} = 1 + \frac{L_{\boldsymbol{k}}'}{L_{\boldsymbol{k}}}(1) + \begin{cases} \log(\sqrt{d_{\boldsymbol{k}}}/2\pi) & \text{si } \boldsymbol{k} \text{ est imaginaire,} \\ \log(\sqrt{d_{\boldsymbol{k}}}/4\pi) & \text{si } \boldsymbol{k} \text{ est réel.} \end{cases}$$

PREUVE. Remarquer que $\mu_{\boldsymbol{k}} = 1 + \log(A_{\boldsymbol{k}}) + (\Gamma_{\boldsymbol{k}}'/\Gamma_{\boldsymbol{k}})(1) + (L_{\boldsymbol{k}}'/L_{\boldsymbol{k}})(1) + \gamma$ et utiliser $(\Gamma'/\Gamma)(1) = -\gamma$, et $(\Gamma'/\Gamma)(1/2) = -\gamma - \log 4$ et $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1)$. ●

3. Majoration au point 1 de certaines séries de Dirichlet: le Théorème principal.

Soit $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres. Dans toute la suite, Φ désignera une fonction holomorphe dans tout le plan complexe admettant pour $\Re(s) > 1$ un développement en série de Dirichlet

$$\Phi(s) = \sum_{n \geq 1} \phi_n n^{-s},$$

où les ϕ_n sont supposés vérifier $|\phi_n| \leq z_n$ lorsque les z_n sont définis par

$$\zeta_{\boldsymbol{k}}(s) = \sum_{n \geq 1} z_n n^{-s}.$$

Nous supposons, de plus, qu'il existe $A_\Phi > 0$ et W_Φ un nombre complexe de module 1 tels que

$$F(s, \Phi) = A_\Phi^s \Gamma_{\boldsymbol{k}}(s) \Phi(s)$$

vérifie $W_\Phi F(s, \tilde{\Phi}) = F(1 - s, \Phi)$ où $\tilde{\Phi}(s) = \overline{\Phi(\bar{s})}$, de sorte que $\tilde{\Phi}(s) = \sum_{n \geq 1} \bar{\phi}_n n^{-s}$ pour $\Re(s) > 1$. Nous posons $f_\Phi = A_\Phi / A_{\boldsymbol{k}}$. Nous remarquons que Φ satisfait ces hypothèses dès lors que $\Phi(s) = L(s, \chi, \boldsymbol{K}/\boldsymbol{k})$ est une série L abélienne attachée à un caractère d'Artin $\chi \neq 1$ d'une extension abélienne $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{k}$ non ramifiée aux places infinies. Nous en déduirons aux Corollaires 5C et 5D des majorations du quotient $\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}})/\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{k}})$ lorsque $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{k}$ est une telle extension abélienne. Nous donnerons également aux Corollaires 5E et 5F des exemples de majorations de $\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}})$ pour $\boldsymbol{K}$ un corps totalement réel non abélien (en fait non galoisien) sur le corps des rationnels. Nous verrons au cours de la preuve du Théorème 3 ci-dessous qu'il est essentiel de supposer que la fonction Φ vérifie une équation fonctionnelle dans laquelle intervient comme produit de fonctions Gamma le facteur $\Gamma_{\boldsymbol{k}}$. Cela nous empêche donc d'appliquer directement cette méthode à la majoration de $|L(1, \chi)|$ (en choisissant $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{Q}$) lorsque χ désigne un caractère de Dirichlet impair (puisqu'alors $\Gamma_{\boldsymbol{k}}(s) = \Gamma(s/2)$ alors que le facteur Gamma intervenant dans l'équation fonctionnelle de $L(s, \chi)$ est $\Gamma(s)$). Nous énonçons et prouvons maintenant le résultat principal de cet article.

THÉORÈME 3. *Soit Φ vérifiant les propriétés précédentes. Nous avons alors*

$$|\Phi(1)| \leq \left(1 - \frac{1}{f_\Phi}\right) \log f_\Phi + \left(1 + \frac{1}{f_\Phi}\right)\mu_k$$

et

$$|\Phi(1)| \leq \begin{cases} \mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k)(\log f_\Phi + 2\mu_k) & si\, f_\Phi \geq 1, \\ \mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k)(\log f_\Phi + \mu_k) & si\, f_\Phi \geq e^{\mu_k}, \\ \mu_k \,\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k) & si\, f_\Phi = 1. \end{cases}$$

PREUVE. Pour $x > 0$ et $c > 0$, nous posons

$$H_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma_k(s) x^{-s}\, ds,$$

qui est à valeurs positives et décroissance rapide (procéder par récurrence sur $r_1 + r_2$). Nous posons ensuite

$$S(x, \Phi) = \sum_{n\geq 1} \phi_n H_k\left(\frac{nx}{A_\Phi}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s, \Phi) x^{-s}\, ds \quad (c > 1)$$

et

$$S_k(x) = \sum_{n\geq 1} z_n H_k\left(\frac{nx}{A_k}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_k(s) x^{-s}\, ds \quad (c > 1).$$

Notons que $S_k(x) \geq 0$ pour $x > 0$, et que

(2) $$S_Q(x) = 2 \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 x^2}.$$

Par considération des pôles $s = 0$ et $s = 1$ et de leurs résidus pour le cas de l'intégration de la fonction méromorphe F_k, par déplacement de cette droite verticale d'intégration $\Re(s) = c$ vers la gauche en $\Re(s) = 1 - c$ et par utilisation des équations fonctionnelles satisfaites par ces fonctions $F(\,.\,, \Phi)$ et F_k, nous obtenons les équations fonctionnelles suivantes satisfaites par S_k et $S(\,.\,, \Phi)$:

(3) $$S_k(x) = \frac{1}{x} S_k\left(\frac{1}{x}\right) - \lambda_k + \frac{\lambda_k}{x}.$$

et

$$S(x, \Phi) = \frac{W_\Phi}{x} S\left(\frac{1}{x}, \tilde{\Phi}\right)$$

D'après la formule d'inversion de Mellin, nous avons alors

(4a) $$F(s, \Phi) = \int_0^\infty S(x, \Phi) x^s \frac{dx}{x} = \int_1^\infty S(x, \Phi) x^{s-1}\, dx + \int_1^\infty W_\Phi S(x, \tilde{\Phi}) x^{-s}\, dx$$

et

(4b) $$F_k(s) = \int_1^\infty S_k(x) x^{s-1}\, dx + \int_1^\infty S_k(x) x^{-s}\, dx + \lambda_k \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right).$$

Posons

$$I_k(f) = \int_1^\infty S_k(x/f)\,dx + \int_1^\infty S_k(x/f)\,\frac{dx}{x} \qquad (f > 0). \tag{5}$$

D'après (4b), (5) et la définition de μ_k, nous avons $I_k(1) = \lambda_k \mu_k$. Vu les hypothèses faites sur les coefficients du développement en série de Dirichlet de la fonction Φ, nous avons $|S(x,\Phi)| \leq S_k(x/f_\Phi)$ et $|W_\Phi S(x,\tilde{\Phi})| \leq S_k(x/f_\Phi)$, avec $f_\Phi = A_\Phi/A_k$, de sorte que (4a) et (5) donnent $|F(1,\Phi)| \leq I_k(f_\Phi)$. Nous avons de plus

$$|\Phi(1)| = \left| \frac{\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k)}{\lambda_k} \frac{F(1,\Phi)}{f_\Phi} \right| \leq \mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k) \frac{I_k(f_\Phi)}{\lambda_k f_\Phi}.$$

Le Lemme suivant permet alors de terminer la preuve de ce Théorème 3. ●

LEMME 4. *Posons*

$$R_k(f) = \int_f^\infty S_k(x)\,dx + f \int_f^\infty S_k(x) \frac{dx}{x} \leq 2 \int_f^\infty S_k(x)\,dx,$$

de sorte que $R_k(f) \geq 0$, *que* $R_k(f)$ *tend vers* 0 *lorsque* f *tend vers l'infini et que* $R_k(1) = I_k(1)$. *Nous avons alors*

$$\frac{I_k(f)}{\lambda_k f} = \log f + \mu_k + \frac{\mu_k - \log f}{f} - \frac{1}{\lambda_k f} R_k(f),$$

qui pour $f = 1$ *s'écrit*

$$\frac{I_k(f)}{\lambda_k f} = \mu_k.$$

PREUVE. En utilisant (3) nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_k(f) &= f \int_{1/f}^\infty S_k(x)\,dx + \int_{1/f}^\infty S_k(x) \frac{dx}{x} \\
&= f \int_1^\infty S_k(x)\,dx + \int_1^\infty S_k(x) \frac{dx}{x} + f \int_1^f S_k(1/x) \frac{dx}{x^2} + \int_1^f S_k(1/x) \frac{dx}{x} \\
&= f \int_1^\infty S_k(x)\,dx + \int_1^\infty S_k(x) \frac{dx}{x} + f \int_1^f S_k(x) \frac{dx}{x} + \int_1^f S_k(x)\,dx + \lambda_k (f-1) \log f \\
&= (f+1) I_k(1) - R_k(f) + \lambda_k (f-1) \log f \quad ●
\end{aligned}$$

4. Corollaires au Théorème principal.

Ce Théorème 3 peut premièrement s'appliquer au choix $\boldsymbol{k}$ égal au corps $\boldsymbol{Q}$ des nombres rationnels et Φ égale à une fonction L attachée à un caractère χ de Dirichlet pair et primitif modulo f_χ, fonction Φ pour laquelle $f_\Phi = \sqrt{f_\chi}$. Nous l'avions fait dans [**Lou 1**], et cela conduit au premier résultat du corollaire ci-dessous en remarquant que $f_\chi \geq 2$ implique $f_\Phi = \sqrt{f_\chi} \geq e^{\mu_Q}$. Mais alors, en majorant la moyenne géométrique des

$n-1$ valeurs $|L(1,\chi)|$ par leur moyenne arithmétique et par utilisation de la formule du conducteur-discriminant, nous obtenons le second résultat de ce corollaire amendant notablement celui du Théorème 1:

COROLLAIRE 5A.
(a). *Si χ est un caractère de Dirichlet pair et primitif modulo $f_\chi \geq 2$, alors*

$$|L(1,\chi)| \leq \frac{1}{2}\log f_\chi + \mu_{\boldsymbol{Q}}.$$

(b). *Si $\boldsymbol{K}$ est un corps réel abélien de degré $n \geq 2$, alors*

$$\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}) \leq \left(\frac{\log d_{\boldsymbol{K}}}{2(n-1)} + \mu_{\boldsymbol{Q}}\right)^{n-1}.$$

Ce Théorème 3 peut deuxièmement être appliqué à la majoration de $\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{k}})$ lorsque $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{k}$ est une extension quadratique d'un corps quadratique $\boldsymbol{k}$, en supposant de plus $\boldsymbol{K}$ totalement réel lorsque $\boldsymbol{k}$ est quadratique réel. En effet, nous prenons alors $\Phi = \zeta_{\boldsymbol{K}}/\zeta_{\boldsymbol{k}}$ et $f_\Phi = \sqrt{d_{\boldsymbol{K}}/d_{\boldsymbol{k}}^2}$ et remarquons que $\Phi(1) = \mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}})/\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{k}})$. On retrouverait ainsi de manière bien plus satisfaisante certains des résultats de [**Lou 2**] et [**Lou 3**]. Des illustrations de ce choix sont données au Corollaire 5B ci-dessous, et au Corollaire 6A.

COROLLAIRE 5B. *Soit $\boldsymbol{k}$ un corps quadratique fixé. Soient $\boldsymbol{k}_1$ et $\boldsymbol{k}_2$ deux corps quadratiques, non tous deux imaginaires, de conducteurs et caractères respectifs f_1, χ_1, et f_2, χ_2 tels que $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{Q}(\sqrt{\chi_1\chi_2(-1)f_1f_2})$. Alors, $L(1,\chi_1)L(1,\chi_2) = O_{\boldsymbol{k}}(\log(f_1f_2))$ où les constantes intervenant dans ce $O_{\boldsymbol{k}}$ ne dépendent que de $\boldsymbol{k}$.*

Notons que si χ désigne un caractère de Dirichlet primitif modulo f, alors on a $|L(1,\chi)| = O(\log f)$ (Corollaire 5A). Ce Corollaire 5B montre que l'on peut espérer mieux qu'un tel résultat. Nous déduisons également du Théorème 3 le résultat suivant qui apporte un amendement au Théorème 1 du même ordre que celui que lui apportait ce Corollaire 5A.

COROLLAIRE 5C. *Soit $\boldsymbol{k}$ un corps quadratique réel fixé. Alors, il existe une constante $\nu_{\boldsymbol{k}}$ ne dépendant que de $\boldsymbol{k}$ telle que quel que soit $\boldsymbol{K}$ totalement réel qui soit une extension abélienne de $\boldsymbol{k}$ de degré relatif $n = [\boldsymbol{K}:\boldsymbol{k}]$ nous ayons*

$$\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}) \leq \left(\frac{\log d_{\boldsymbol{K}}}{2(2n-1)} + \nu_{\boldsymbol{k}}\right)^{2n-1}.$$

PREUVE. On sait que

$$\zeta_{\boldsymbol{K}}(s) = \zeta_{\boldsymbol{k}}(s)\prod_{\chi\neq 1} L(s,\chi)$$

où χ parcourt les caractères de degré un du groupe de Galois abélien $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{k})$. D'où

$$\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}) = \mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{k}})\prod_{\chi\neq 1}|L(1,\chi)|.$$

Chacune de ces fonction $s \mapsto L(s,\chi) = \Phi(s)$ est entière et vérifie les hypothèses sous lesquelles on peut appliquer le Théorème 3 (car $\phi_n = \sum_I \chi(I)$ et $z_n = \sum_I 1$ où ces sommations portent sur les idéaux entiers I de norme n du corps k), et ce avec $f_\Phi = \sqrt{f_\chi}$ où $f_\chi \stackrel{def}{=} N_{k/Q}(\mathscr{F}_\chi)$ avec $\mathscr{F}_\chi$ désignant le conducteur de χ, qui est un idéal de k (voir [**Coh**]). Le Théorème 3 majore donc chaque $|L(1,\chi)|$ par $\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k)(1/2)\log f_\chi + 2\mu_k)$, et le Corollaire 5A majore $\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k)$ par $(1/2)\log d_k + \mu_Q$. Puisque

$$\prod_{\chi\neq 1} f_\chi = \prod_{\chi\neq 1} N_{k/Q}(\mathscr{F}_\chi) = d_K/d_k^n$$

(voir par exemple [**Hei**, page 218]), la concavité de la fonction logarithme, i.e.

$$A^n B_1 B_2 \dots B_{n-1} \leq ((nA + B_1 + B_2 + \dots + B_{n-1})/(2n-1))^{2n-1},$$

donne le résultat désiré en prenant pour v_k un majorant des

$$\frac{n\mu_Q + 2(n-1)\mu_k}{2n-1}, \quad n \geq 2. \quad \bullet$$

De plus, cette preuve conduit au résultat suivant:

Corollaire 5D. *Soit K/k une extension abélienne non ramifiée aux places infinies, soit $n = [K:k]$ et soit $d_{K/k} = d_K/d_k^n$ la norme du discriminant relatif de l'extension K/k. Alors,*

$$\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_K) \leq (\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k))^n \left(\frac{\log d_{K/k}}{2(n-1)} + 2\mu_k\right)^{n-1}.$$

Si K/k est de plus non ramifiée aux places finies, alors

$$\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_K) \leq (\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k))^n \mu_k^{n-1}.$$

Corollaire 5E. (voir [**Bar-Lou**]) *Soient $p \geq 3$ un nombre premier impair fixé, $\zeta_p = \exp(2\pi i/p)$ et $k = Q(\zeta_p)$ et $K = Q(\sqrt[p]{m})$ (avec $m \geq 2$ n'étant pas une puissance p-ième). Alors,*

$$\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_K) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k)(\log(d_K/d_k) + c_k) = O_p(\log d_K),$$

où $c_k = 4\mu_k$, et même $c_k = 2\mu_k$ pour $d_K \geq e^{2\mu_k}$.

Preuve. Si $N = Q(\zeta_p, \sqrt[p]{m})$, alors N/k est cyclique de degré p, les caractères non triviaux χ de l'extension N/k sont donc de même conducteur $\mathscr{F}_\chi = \mathscr{F}_{N/k}$, et en posant $f_{N/k} = N_{k/Q}(\mathscr{F}_\chi)$ on a $f_{N/k}^{p-1} = d_N/d_k^p$. La factorisation $\zeta_N/\zeta_k = (\zeta_K/\zeta)^{p-1}$ donne $d_N/d_k = d_K^{p-1}$, soit $f_{N/k} = d_K/d_k$ (voir [**Bar-Lou**, Corollaire 6]). D'où

$$\begin{aligned}(\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_K))^{p-1} = \frac{\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_N)}{\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_k)} &= \prod_{\chi\neq 1} |L(1,\chi)| \\ &\leq \prod_{\chi\neq 1} \frac{1}{2}(\log f_{N/k} + c_k) = \frac{1}{2^{p-1}}(\log(d_K/d_k) + c_k)^{p-1}. \quad \bullet\end{aligned}$$

COROLLAIRE 5F. *Soit $\boldsymbol{K}$ un corps cubique totalement réel et non galoisien. Soit $\boldsymbol{L}$ le sous-corps quadratique réel de la clôture normale $\boldsymbol{N}$ de $\boldsymbol{K}$, de sorte que $\boldsymbol{N}/\boldsymbol{Q}$ est diédrale de degré* 6. *Alors,*

$$\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}) \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{L}})(\log(d_{\boldsymbol{K}}/d_{\boldsymbol{L}}) + c_{\boldsymbol{L}}),$$

avec $c_{\boldsymbol{L}} = 4\mu_{\boldsymbol{L}}$, et même $c_{\boldsymbol{L}} = 2\mu_{\boldsymbol{L}}$ pour $d_{\boldsymbol{K}} \geq d_{\boldsymbol{L}} e^{2\mu_{\boldsymbol{L}}}$.

PREUVE. Similaire à la précédente en utilisant $\zeta_{\boldsymbol{N}}/\zeta_{\boldsymbol{L}} = (\zeta_{\boldsymbol{K}}/\zeta)^2$ (voir [**Hei**, p. 227]). ●

5. Majoration de μ_k pour k un corps quadratique réel.

Notons que le résultat suivant est (grosso modo trois fois) plus fort que celui que l'on déduirait de l'expression de $\mu_{\boldsymbol{k}}$ donnée au Lemme 2 et de l'existence de constantes c_1 et c_2 telles que l'on ait les majorations $L_{\boldsymbol{k}}(1) = \mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{k}}) \leq (1/2)\log d_{\boldsymbol{k}} + c_1$ et $L'_{\boldsymbol{k}}(1) \leq (1/8)(\log d_{\boldsymbol{k}} + c_2)^2$, cette seconde majoration se prouvant de la même façon que cette première majoration est prouvée dans [**Nar**, Lemma 8, page 336].

PROPOSITION 6. *Soit $\boldsymbol{k}$ un corps quadratique réel. Alors,*

$$\mu_{\boldsymbol{k}}\,\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{k}}) \leq \frac{1}{8}\log^2 d_{\boldsymbol{k}}.$$

PREUVE. Posons

$$F(s) = F_{\boldsymbol{Q}}(s) - \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) = \int_1^\infty S_{\boldsymbol{Q}}(x)(x^{s-1} + x^{-s})\,dx,$$

$$G(s) = F(s, L_{\boldsymbol{k}}) = \frac{F_{\boldsymbol{k}}}{F_{\boldsymbol{Q}}}(s) = \frac{\lambda_{\boldsymbol{k}}}{\lambda_{\boldsymbol{Q}}}(1 + (\mu_k - \mu_{\boldsymbol{Q}})(s-1) + O((s-1)^2))$$

(utiliser (1) pour $F_{\boldsymbol{k}}$ et $F_{\boldsymbol{Q}}$), et posons finalement $f = \sqrt{d_{\boldsymbol{k}}}$. Nous avons donc

$$\frac{G'(1)}{fL_{\boldsymbol{k}}(1)} = \frac{G'}{G}(1) = \mu_{\boldsymbol{k}} - \mu_{\boldsymbol{Q}}, \tag{6}$$

$$\int_1^\infty (x+1)S_{\boldsymbol{Q}}(x)\frac{dx}{x} = F(1) = \lambda_{\boldsymbol{Q}}\mu_{\boldsymbol{Q}} = \mu_{\boldsymbol{Q}} = \frac{2+\gamma-\log(4\pi)}{2} = 0.0230957\cdots, \tag{7a}$$

et par utilisation du logiciel Maple pour obtenir le développement de Taylor l'ordre 1 de F nous obtenons

$$\int_1^\infty (x-1)S_{\boldsymbol{Q}}(x)\frac{\log x}{x}\,dx = F'(1) = 0.000248\cdots \tag{7b}$$

(on peut évidemment donner une formule explicite pour $F'(1)$, mais elle trop longue et sans intérêt pour être copiée ici). La majoration $|S_{\boldsymbol{k}}(x)| \leq S_{\boldsymbol{Q}}(x/f)$ et la dérivation de

(4a) donnent $|G'(1)| \leq J(f)$ où

(8) $$J(f) \stackrel{def}{=} \int_1^\infty (x+1) S_Q(x/f) \frac{\log x}{x} \, dx.$$

Notons que (6), (7a), (8), le Corollaire 5A(a), $\mu_Q = F(1)$ et $f^2 = d_k$ impliquent

(9) $$\begin{aligned} f\mu_k \operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_k) &= G'(1) + f\mu_Q L_k(1) \\ &\leq J(f) + fF(1)(\log f + F(1)) \\ &= J(f) + (f \log f)F(1) + fF^2(1) \end{aligned}$$

Reste maintenant à majorer $J(f)$ en fonction de f. Rappelons que S_Q vérifie l'équation fonctionnelle $S_Q(1/x) = xS_Q(x) + x - 1$ (d'après (3) et en remarquant que $\lambda_Q = 1$), et remarquons que

(10) $$\begin{aligned} K(f) &\stackrel{def}{=} \int_1^f \left(1 + \frac{f}{z}\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) \log(f/z) \, dz \\ &= \frac{f-1}{2} \log^2 f + 2f - 2 - (f+1) \log f. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} J(f) &= \int_{1/f}^\infty (fy+1) S_Q(y) \frac{\log(fy)}{y} \, dy \\ &= \int_{1/f}^1 (fy+1) S_Q(y) \frac{\log(fy)}{y} \, dy + \int_1^\infty (fy+1) S_Q(y) \frac{\log(fy)}{y} \, dy \\ &= \int_1^f ((f/z)+1) S_Q(1/z) \frac{\log(f/z)}{z} \, dz + \int_1^\infty (fz+1) S_Q(z) \frac{\log(fz)}{z} \, dz \\ &= K(f) + \int_1^f (f+z) S_Q(z) \frac{\log(f/z)}{z} \, dz + \int_1^\infty (fz+1) S_Q(z) \frac{\log(fz)}{z} \, dz \\ &= K(f) - \int_f^\infty (f+z) S_Q(z) \frac{\log(f/z)}{z} \, dz \\ &\quad + \int_1^\infty (f+z) S_Q(z) \frac{\log(f/z)}{z} \, dz + \int_1^\infty (fz+1) S_Q(z) \frac{\log(fz)}{z} \, dz \\ &= K(f) + \int_f^\infty (f+z) S_Q(z) \frac{\log(z/f)}{z} \, dz \\ &\quad + (f-1) \int_1^\infty (z-1) S_Q(z) \frac{\log z}{z} \, dz + (f+1) \log f \int_1^\infty (z+1) S_Q(z) \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

soit, d'après (7a) et (7b),

(11) $$J(f) = K(f) + R(f) + (f-1)F'(1) + ((f+1)\log f)F(1),$$

où nous avons posé

$$R(f) \overset{def}{=} \int_f^{\infty} (f+z) S_Q(z) \frac{\log(z/f)}{z}\, dz = f \int_1^{\infty} (1+z) S_Q(fz) \frac{\log z}{z}\, dz.$$

D'après (2), nous avons

$$R(f) \leq 2f \int_1^{\infty} S_Q(fz) \log z\, dz = 4f \sum_{n\geq 1} \int_1^{\infty} e^{-\pi n^2 f^2 z^2} \log z\, dz.$$

En remarquant que pour $a > 0$ nous avons

$$\begin{aligned} 4\int_1^{\infty} e^{-az^2} \log z\, dz &\leq \frac{2}{a}\int_1^{\infty} 2aze^{-az^2} \log z\, dz \\ &= \frac{2}{a}\int_1^{\infty} e^{-az^2} \frac{dz}{z} = \frac{1}{a}\int_1^{\infty} e^{-aZ} \frac{dZ}{Z} \leq \frac{1}{a^2} e^{-a}, \end{aligned}$$

nous obtenons donc

$$R(f) \leq f \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\pi^2 f^4 n^4} e^{-\pi n^2 f^2} \leq \frac{e^{-\pi f^2}}{\pi^2 f^3} \zeta(4) = \frac{\pi^2 e^{-\pi f^2}}{90 f^3} \tag{12}$$

En tenant compte de (9–12), nous obtenons

$$\begin{aligned} f\mu_k \operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_k) \leq (f-1)F'(1) &+ ((2f+1)\log f)F(1) + fF^2(1) \\ &+ \frac{f-1}{2}\log^2 f + 2f - 2 - (f+1)\log f + \frac{\pi^2 e^{-\pi f^2}}{90 f^3}. \end{aligned} \tag{13}$$

En tenant compte de (7a), (7b), nous obtenons bien $f\mu_k \operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_k) \leq (f/2)\log^2 f$. ●

REMARQUE. De plus, (7a), (7b) et (13) montrent que $f^2 = d_k > 5$ implique

$$\mu_k \operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_k) \leq \frac{1}{8} \log d_k \log(d_k - 4).$$

COROLLAIRE 7A. *Soit $\boldsymbol{K}$ un corps totalement réel de degré $2n$ qui est une extension abélienne d'un corps quadratique réel $\boldsymbol{k}$. Alors,*

$$\operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}) \leq \frac{(\log d_k + 0.05)^n}{2(4n-4)^{n-1}} \log^{n-1}(d_{\boldsymbol{K}}/d_k).$$

Si $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{k}$ est de plus non ramifiée, alors,

$$\operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}) \leq \frac{1}{2^{3n-2}} (\log d_k + 0.05) \log^{2n-2} d_k.$$

PREUVE. Prouvons la première inégalité. Des Corollaires 5D et 5A(a) et de la Proposition 6 nous déduisons:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_K) &\leq \operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_k)\left(\frac{\log d_{K/k}}{2(n-1)}\operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_k) + 2\mu_k \operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_k)\right)^{n-1} \\
&\leq \frac{\log d_k + 2\mu_Q}{2}\left(\frac{\log d_{K/k}}{4(n-1)}(\log d_k + 2\mu_Q) + \frac{1}{4}\log^2 d_k\right)^{n-1} \\
&\leq \frac{(\log d_k + 2\mu_Q)^n}{2(4n-4)^{n-1}}(\log d_{K/k} + (n-1)\log d_k)^{n-1} \\
&\leq \frac{(\log d_k + 0.05)^n}{2(4n-4)^{n-1}}\log^{n-1}(d_K/d_k).
\end{aligned}$$

Prouvons maintenant la seconde inégalité. Des Corollaires 5D et 5A(a) et de la Proposition 6 nous déduisons:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_K) &\leq \operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_k)(\mu_k \operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_k))^{n-1} \\
&\leq \frac{\log d_k + 2\mu_Q}{2}\left(\frac{1}{8}\log^2 d_k\right)^{n-1} \leq \frac{\log d_k + 0.05}{2^{3n-2}}\log^{2n-2} d_k. \quad \bullet
\end{aligned}$$

COROLLAIRE 7B. (Amende [**Lou 4**, Th. 3]) *Soit $\boldsymbol{k}$ un corps quadratique réel. Si $L_k(\beta) = 0$ pour un $\beta \in [(1/2), 1[$, alors $L_k(1) < ((1-\beta)/8)\log^2 d_k$. En conséquence, pour $d_k > 24$ la fonction $s \mapsto L_k(s)$ ne s'annule pas sur $[1 - (8/\sqrt{d_k}\log d_k), 1[$.*

PREUVE. Supposons $L_k(\beta) = 0$. Alors $F_k(\beta) = 0$. D'après (4b) et (5), et puisque pour $x \geq 1$ la fonction $s \mapsto x^{s-1} + x^{-s}$ est croissante sur $[(1/2), +\infty[$ et que S_k est à valeurs positives ou nulles, nous avons

$$\frac{\lambda_k}{\beta(1-\beta)} = \int_1^\infty S_k(x)(x^{\beta-1} + x^{-\beta})\,dx \leq \int_1^\infty S_k(x)(1 + x^{-1})\,dx = I_k(1) = \lambda_k \mu_k$$

Puisque

$$\lambda_k = \sqrt{d_k}\operatorname{Res}_{s=1}(\zeta_k) = \sqrt{d_k}L_k(1)$$

pour $\boldsymbol{k}$ quadratique réel, d'après la Proposition 6 nous avons alors

$$\frac{\sqrt{d_k}L_k(1)}{1-\beta} = \frac{\lambda_k}{1-\beta} \leq \frac{\lambda_k}{\beta(1-\beta)} \leq I_k(1) \leq \frac{\sqrt{d_k}}{8}\log^2 d_k$$

et le premier résultat. Le second résulte de ce que la Remarque précédente permet de remplacer le terme $\log^2 d_k$ de ce premier résultat par $\log d_k \log(d_k - 4)$, de ce que la formule analytique du nombre de classes donne $L_k(1) = (2h_k \log \varepsilon_k)/\sqrt{d_k}$ (où $h_k \geq 1$ et $\varepsilon_k > 1$ désignent le nombre de classes d'idéaux et l'unité fondamentale de $\boldsymbol{k}$) et de ce que $\varepsilon_k = (x + y\sqrt{d_k})/2$ avec $x \geq 1$ et $y \geq 1$ tels que $x^2 - d_k y^2 = \pm 4$ vérifie $\varepsilon_k \geq \sqrt{d_k - 4}$. $\bullet$

6. Une application de ces majorations.

Soit N un corps à multiplication complexe, galoisien mais non abélien et de degré $4p$ (p un nombre premier impair), et soit N^+ le sous-corps totalement réel maximal de N. Le groupe de Galois de N est alors le groupe dicyclique d'ordre $4p$ ou le groupe diédral d'ordre $4p$. Nous avons dit au premier paragraphe que le Théorème 1 est amplement suffisant pour minorer les nombres de classes relatifs des corps à multiplication complexe dicycliques de degré $4p$. Pour le cas diédral, ce Théorème 1 est nettement insuffisant pour obtenir de bonnes majorations des discriminants des corps à multiplication complexe diédraux de degré $4p$ et de nombres de classes relatifs égaux à 1, même seulement diédraux de degré 12 et de nombres de classes relatifs égaux à 1. Pour la détermination de ces derniers, nous utilisons le Corollaire 7A de la manière suivante. Nous remarquons que si M désigne le seul sous-corps biquadratique bicyclique d'un corps diédral à multiplication complexe de degré 12 et de nombres de classes relatifs égaux à 1, alors M est imaginaire et de nombre de classes relatif égal à 1. Mais on sait prouver qu'il existe précisément 147 tels corps M, et les discriminants des sous-corps quadratiques réels L de ces 147 corps M vérifient $d_L \leq 65689$. Puisque N^+/L est cubique cyclique, le Corollaire 7A majore $\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{N^+})$ par $11\log^2 d_{N^+}$, majoration nettement meilleure que celle impliquée par le Théorème 1. Nous renvoyons à **[L-O-O]** pour l'utilisation de cette majoration à la détermination de tous les corps à multiplication complexe diédraux de degré 12 de nombres de classes d'idéaux égaux à 1: il y a précisément 9 tel corps de nombres.

References

[Bar-Lou] P. Barrucand et S. Louboutin, Majoration et minoration du nombre de classes d'idéaux des corps réels purs de degré premier, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 533–540.

[Coh] H. Cohn, A Classical Invitation to Algebraic Numbers and Class Fields, Chapter 19, The Zeta-function; Springer-Verlag.

[Hei] H. Heilbronn Zeta-functions and L-functions, in J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, Algebraic Number Theory, Chapter VIII, Academic Press.

[Lan] S. Lang, Algebraic Number Theory, Springer-Verlag, Grad. Texts Math. **110**, Chapter XIII.

[Lou 1] S. Louboutin, Majorations explicites de $|L(1,\chi)|$, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **316**, Série I, p. 11–14, 1993.

[Lou 2] S. Louboutin, Majoration au point 1 des fonctions L associées aux caractères de Dirichlet primitifs, ou au caractère d'une extension quadratique d'un corps quadratique imaginaire principal, J. reine angew. Math. **419** (1991), 213–219.

[Lou 3] S. Louboutin, L-functions and class numbers of imaginary quadratic fields and of quadratic extensions of an imaginary quadratic field, Math. Comp. **59** (1992), 213–230.

[Lou 4] S. Louboutin, Lower bounds for relative class numbers of CM-fields, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 425–434.

[L-O-O] S. Louboutin, R. Okazaki and M. Olivier, The class number one problem for some non-abelian normal CM-fields, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 3657–3678.

[Lou-Oka] Determination of al non-normal quartic CM-fields and of all non-abelian normal octic CM-fields with class number one, Acta Arith. **67** (1994), 47–62.

[Nar] W. Narkiewicz, Elementary and analytic theory of algebraic numbers, Second edition, Springer-Verlag.

[Odl] A. M. Odlyzko, On conductors and discriminants, in A. Fröhlich, Algebraic Number Fields (L-functions and Galois properties), Academic Press 1977.

[Sun] J. S. Sunley, Class numbers of totally imaginary quadratic extensions of totally real fields, Trans. Amer. Math. Soc. **175** (1973), 209–232.

Stéphane LOUBOUTIN

Université de Caen, U.F.R. Sciences
Département de Mathématiques
Esplanade de la Paix
14032 Caen Cedex, FRANCE.
email loubouti@math.unicaen.fr