J. Math. Soc. Japan
Vol. 49, No. 4, 1997

Remarques sur l'ensemble de zero d'une solution d'une équation parabolique en dimension d'espace 1

Par Kinji WATANABE

(Received Feb. 21, 1994)
(Revised Nov. 20, 1995)

1. Introduction.

Soit u une solution non triviale et à valeurs réelles de l'équation parabolique:

(1.1) $$u_t = u_{xx} + q(x, t)u \qquad \text{dans} \quad]0, 1[\times]0, T[$$

vérifiant

(1.2) $$u_x(j, t) + g_j(t)u(j, t) = 0 \qquad \text{sur} \quad \{j = 0, 1\} \times]0, T[.$$

Ici q(resp. g_j) appartient à $\boldsymbol{L}^\infty(]0, 1[\times]0, T[)$ (resp. $\boldsymbol{C}^1(]0, T[)$). L'étude sur l'ensemble de zero $Z(u)$ de u:

$$Z(u) = \{(x, t) \in [0, 1]\times]0, T[\,;\ u(x, t) = 0\}$$

et surtout la finitude et la décroissance du nombre des zeros de $u(\cdot, t)$ a été effectuée, par exemple, par Angenent [**2**] et Kunisch et Peichl [**5**] et appliquée aux dynamiques des équations paraboliques et semilinéaires, par exemple, par Angenent et Fiedler [**3**], Matano [**8**, **9**] et Nickle [**11**]. Nous nous intéressons aux propriétés géométriques de $Z(u)$ près d'un point de sa partie singulière $S(u)$:

$$S(u) = \{(x, t) \in Z(u)\,;\ u_x(x, t) = 0\}.$$

Précisons les notations que nous utilisons. Pour une courbe Γ dans $\boldsymbol{R}^2$ on dit qu'elle est une t-courbe (resp. x-courbe) de classe $\boldsymbol{C}^k$ et définie dans un segment I si $\Gamma = \{(\gamma(t), t)\,;\ t \in I\}$ (resp. $\{(x, \gamma(x))\,;\ x \in I\}$) pour certaine γ dans $\boldsymbol{C}^k(I)$. Dans ce cas γ s'appelle la fonction de définition de Γ. Soient $\lambda_{m,j}$, $|j| \leqq [m/2]$, les raçines du polynôme $H_m(z)$ d'Hermite de degré m et nous les arrengeons de la manière suivante.

$$\lambda_{m,-l} < \cdots < \lambda_{m,-1} < \lambda_{m,0} = 0 < \lambda_{m,1} < \cdots < \lambda_{m,l}.$$

Ici $l = [m/2]$ et nous avons d'éliminer $\lambda_{m,0}$ au cas de m pair.

Cette recherche a été partiellement supportée par "Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 0564187), Ministry of Education, Science and Culture".

Nos résultats principals sont les suivants.

THÉORÈME 1.1. *Soit u une solution non triviale de* (1.1), *vérifiant* (1.2) *et appartenant à*

$$\boldsymbol{C}(]0, T[\,; \boldsymbol{H}^2(0, 1))\cap\boldsymbol{C}^1(]0, T[\,; \boldsymbol{L}^2(0, 1)).$$

Alors il existe, pour chaque point (x_0, t_0) dans $S(u)$ avec $0<x_0<1$, un entier $m\geqq 2$, des constantes ε, $\delta>0$, une t-courbe Γ_0, continue et définie dans $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ et des t-courbes Γ_j, $0<|j|\leqq[m/2]=l$, continues et définies dans $[t_0-\delta, t_0]$ tels que l'on ait les suivants.

(i) *L'ensemble*

$$Z(u)\cap\{(x, t)\,;\ |x-x_0|<\varepsilon,\ |t-t_0|\leqq\delta\}$$

est égal à la réunion de Γ_j, $|j|\leqq l$, au cas de m impair et Γ_j, $0<|j|\leqq l$, au cas de m pair.

(ii) *Les fonctions de définition γ_j de Γ_j satisfont:*

$$\lim_{t\to t_0}\{\gamma_0(t)-x_0\}\,|t-t_0|^{-1/2}=0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{t\uparrow t_0}\{\gamma_j(t)-x_0\}\,|t-t_0|^{-1/2}=2\lambda_{m,j}, \qquad j\neq 0. \tag{1.4}$$

THÉORÈME 1.2. *Sous les mêmes hypothèses dans Théorème* 1.1, *il existe, pour chaque point $(0, t_0)$ dans $S(u)$, un entier $l\geqq 1$, des constantes ε, $\delta>0$ et des t-courbes Γ_j, $1\leqq j\leqq l$, continues et définies dans $[t_0-\delta, t_0]$ tels que l'on ait les suivants.*

(i) *L'ensemble*

$$Z(u)\cap\{(x, t)\,;\ 0\leqq x<\varepsilon,\ |t-t_0|\leqq\delta\}$$

est égal à la réunion de Γ_j, $1\leqq j\leqq l$.

(ii) *Les fonctions de définition γ_j de Γ_j satisfont:*

$$\lim_{t\uparrow t_0}\gamma_j(t)\,|t_0-t|^{-1/2}=2\lambda_{2l,j}. \tag{1.5}$$

Ces Théorèmes impliquent immédiatement que pour (x_0, t_0) dans $Z(u)$ avec $0<x_0<1$ il appartient à $S(u)$ si et seulement s'il existe au moins deux t-courbes Γ_j, $j=1, 2$, dans $Z(u)$, continues et définies dans $[t_0-\delta, t_0]$, $\delta>0$, telles que $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\{(x_0, t_0)\}$, de sorte que nous avons

COROLLAIRE 1.3. *$S(u)$ est un sous-ensemble discret de $[0, 1]\times]0, T[$.*

Les démonstrations des Théorèmes impliqent des résultats analogues pour des solutions des équations de la forme suivante:

$$u_t=a(x, t)u_{xx}+b(x, t)u_x+c(x, t)u \qquad \text{dans} \quad]0, 1[\times]0, T[\tag{1.6}$$

vérifiant l'une des conditions suivantes.

(1.7) $\qquad u(0, t)=u(1, t)=0 \quad$ dans $]0, T[$.

(1.8) $\qquad u(0, t)=u_x(1, t)+g(t)u(1, t)=0 \quad$ dans $]0, T[$.

(1.9) $\qquad u(0, t)=u(1, t), \quad u_x(0, t)=u_x(1, t) \quad$ dans $]0, T[$.

Parce que sous des hypothèses sur des régularités convenables des coefficients et sur $a(x, t)$ une certaine extension à $\boldsymbol{R}\times]a, b[$ d'une solution de (1.6), après d'un changement des coordonnés et de multiplier une fonction non zero, devient une solution de l'équation (2.1) dans le paragraphe 2 et donc Théorème 3.6 et 3.9 entraînent la nature de $Z(u)$.

Pour les démonstrations des Théorèmes nous allons utiliser et développer des méthodes prises par Angenent [**2**]. Dans le paragraphe prochain nous allons preuver, par des techniques un peu différentes à celles d'Angenent [**2**], un lemme de compacité qui joue un rôle important.

2. Lemme de compacité.

Dans ce paragraphe nous considérons, au lieu des solutions de (1.1), une solution de l'équation:

(2.1) $$U_t=U_{xx}+F(t, U(\cdot, t)) \quad \text{dans } \boldsymbol{R}\times]a, b[.$$

Ici $F(t, \cdot)$ est un opérateur de l'une des formes suivantes.

(2.2) $F(t, f)(x)=Q(x, t)f(x)$.

(2.3) $$F(t, f)(x)=Q(x, t)f(x) \quad \text{si } x>0, \quad Q(-x, t)f(-x)$$
$$+\int_x^0 \{R_1(y, t)+R_2(y, t)(x-y)\}\exp(R_3(y, t)(x-y))f(-y)dy, \text{ si } x<0.$$

Ici Q et R_j, $j=1, 2, 3$, appartiennent à $\boldsymbol{L}^\infty(\boldsymbol{R}\times]a, b[)$ et nous faisons les hypothèses suivantes.

(H.1) $\qquad U\in \boldsymbol{C}(]a, b[; H^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}))\cap \boldsymbol{C}^1(]a, b[; L^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}))$.

(H.2) $\qquad |U(x, t)|+|U_x(x, t)|\leqq M_1\exp(x^2/16) \quad$ dans $\boldsymbol{R}\times]a, b[$.

(H.3) $\qquad |U_{xx}(x, t)|\leqq M_1\exp(x^2/16) \quad$ dans $\{(x, t); |x|\geqq M_2, a<t<b\}$.

Ici M_j, $j=1, 2$, sont des constantes indépendantes de (x, t).

Considérons des fonctions en (ξ, τ) avec paramètre (x, t) dans $[0, 1]\times]a, b[$, définies par

(2.4) $$v(x, t; \xi, \tau)=\exp(-\xi^2/2)U(x+2e^{-\tau}\xi, t-e^{-2\tau})$$

et étudions des équations en (ξ, τ) que v satisfont.

Soit A la réalisation dans $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R})$ de

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\xi^2+1\right\}$$

donc le domaine de définition E_1 est égal à $\{f\,;\ f,\ \xi^2 f,\ f_{\xi\xi}\in \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R})\}$. Soient E_θ, $0<\theta<1$, le domaine de définition de la puissance fractionnaire A^θ de A munit de la norme $\|f\|+\|A^\theta f\|$ où $\|\cdot\|$ est la norme usuelle dans $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R})$.

Ensuite nous définissons des opérateurs $B(x, t\,;\tau)$ dans $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R})$ tels que, pour tout (x, t) dans $[0, 1]\times]a, b[$, $v(\tau)=v(x, t\,;\ \cdot, \tau)$ satisfont

$$v_\tau+Av=B(x, t\,;\ \tau)v \qquad \text{dans} \quad 2\tau>-\log(t-a). \tag{2.5}$$

Ces opérateurs B sont donnés par la manière suivante. Au cas de F de la forme (2.2),

$$B(x, t\,;\ \tau)f(\xi)=2e^{-2\tau}Q(x+2e^{-\tau}\xi,\ t-e^{-2\tau})f(\xi),$$

et au cas de F de la forme (2.3)

$$\begin{aligned} B(x, t\,;\ \tau)f(\xi) &= 2e^{-2\tau}Q(x+2e^{-\tau}\xi,\ t-e^{-2\tau})f(\xi) \qquad \text{si} \quad x+2e^{-\tau}\xi>0, \\ &= 2e^{-2\tau}\tilde{Q}\exp(xe^{2\tau}(x+2e^{-\tau}\xi)/2)f(-\xi-xe^{\tau})+4e^{-3\tau}\tilde{f} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si} \quad x+2e^{-\tau}\xi<0. \end{aligned}$$

Ici $\tilde{Q}=Q(-x-2e^{-\tau}\xi,\ t-e^{-2\tau})$,

$$\tilde{f}=\int_{\xi_1}^{\xi_0}\{\tilde{R}_1+2(x+e^{-\tau}(\xi-\eta))\tilde{R}_2\}\exp(2(x+e^{-\tau}(\xi-\eta))\tilde{R}_3+(\eta^2-\xi^2)/2)f(-\eta)d\eta,$$

$$\xi_0=xe^{\tau}/2, \quad \xi_1=\xi+xe^{\tau}, \quad \tilde{R}_j=R_j(-x+2e^{-\tau}\eta,\ t-e^{-2\tau}).$$

Dans ce paragraphe nous allons montrer sous les hypothèses (H.1)-(H.3) les lemmes suivants.

LEMMA 2.1. *Il existe une constante C telle que pour tout (x, t, τ, f) dans $[0, 1]\times]a, b[\times\{2\tau>-\log(t-a)\}\times\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R})$ on ait*

$$\|B(x, t\,;\ \tau)f\|\leqq Ce^{-2\tau}\|f\|. \tag{2.6}$$

PREUVE. Considérons des applications $f\to f^*$ définies par

$$f^*(\xi)=\chi(\xi)\int_{\xi+2c/\rho}^{c/\rho}\{1+\rho|\xi-\eta|\}\exp(d\rho|\xi-\eta|+(\eta^2-\xi^2)/2)|f(-\eta)|d\eta$$

où $\chi(\xi)=1$ si $\xi<-c/\rho$, $=0$ si $\xi>-c/\rho$. Alors (2.6) est une conséquence de l'affirmation suivante. Il existe, pour tout $d>0$, une constante $C(d)$ telle que pour tout (ρ, c, f) avec $0<\rho<d$, $0\leqq c\leqq 1$, on ait

$$\|f^*\|\leqq C(d)\|f\|. \tag{2.7}$$

Pour l'établir posons $h(\xi)=c/\rho$ si $\xi<-c/\rho-4d^2$, $=\max(0, -\xi-4d^2)$ si $-c/\rho-4d^2<\xi<-c/\rho$ et divisons f^* en trois parties:

$$f_1^*+f_2^*+f_3^* = \chi(\xi)\left\{\int_{\xi+2c/\rho}^{0}+\int_0^{h(\xi)}+\int_{h(\xi)}^{c/\rho}\right\}$$
$$\times(1+\rho|\xi-\eta|)\exp(d\rho|\xi-\eta|+(\eta^2-\xi^2)/2)|f(-\eta)|d\eta$$

Comme il est aisé de voir que $\eta^2-\xi^2$ est inférieur à $-(\xi-\eta)^2$ si $\xi+2c/\rho<\eta<0$, $-4d^2|\xi-\eta|$ si $0<\eta<h(\xi)$, 0 si $h(\xi)<\eta<c/\rho$ et que $0<\eta-\xi<2\eta+4d^2$ si $h(\xi)<\eta<c/\rho$, nous avons:

$$f_1^* \leqq \int_{-\infty}^{0}(1+d|\xi-\eta|)\exp(d^2|\xi-\eta|-(\xi-\eta)^2/2)|f(-\eta)|d\eta,$$

$$f_2^* \leqq \int_0^{\infty}(1+d|\xi-\eta|)\exp(-d^2|\xi-\eta|)|f(-\eta)|d\eta,$$

$$f_3^* \leqq \int_{c/\rho-4d^2}^{c/\rho}(3+4d^3)\exp(2d+4d^4)|f(-\eta)|d\eta,$$

ce qui entraînent (2.7).

LEMME 2.2. *Il existe* $\tau_0>0$ *tel que* $v(x, t; \cdot, \tau)\neq 0$ *pour tout* (x, t, τ) *dans* $[0, 1]\times]a, b[\times\{\tau>\tau_0\}$.

PREUVE. Fixons (x, t) et écrivons $v(\tau)=v(x, t; \cdot, \tau)$. En vertu du Lemme 2.1 et du fait que A est un générateur d'un semi-group de construction il est facile de voir qu'il existe τ_0 et C_θ, $0<\theta<1$, tels que

$$\|v(\tau_2)\| \leqq 2\|v(\tau_1)\| \tag{2.8}$$

$$\|A^\theta v(\tau_2)\| \leqq C_\theta\{1+(\tau_2-\tau_1)^{-\theta}\}\|v(\tau_1)\| \tag{2.9}$$

pour tout $\tau_0<\tau_1<\tau_2$. Ensuite nous montrons le suivant. Lorsque $v(\bar\tau)\neq 0$ à un point $\bar\tau>\tau_0$, $v(\tau)\neq 0$ pour tout $\tau>\tau_0$. En posant

$$Lv(\tau) = Av(\tau)-(Av(\tau), v(\tau))\|v(\tau)\|^{-2}v(\tau)$$
$$f(\tau) = \{(Av(\tau), v(\tau))+\|v(\tau)\|^2\}/2\|v(\tau)\|^2$$

nous obtenons avec une constante C_1

$$\frac{d}{d\tau}f(\tau) = \{-\|Lv(\tau)\|^2+(Lv(\tau), B(\tau)v(\tau))\}\|v(\tau)\|^{-2}$$
$$\leqq \|B(\tau)v(\tau)\|^2\|v(\tau)\|^{-2} \leqq C_1e^{-2\tau}f(\tau),$$

de sorte que nous avons avec d'autre constante C_2

$$f(\tau) \leqq C_2 f(\bar\tau), \qquad \tau>\bar\tau. \tag{2.10}$$

D'autre part comme

$$-\frac{d}{d\tau}\log\|v(\tau)\| = (Av(\tau)-B(\tau)v(\tau), v(\tau))\|v(\tau)\|^{-2}$$

est inférieur à Const. $f(\tau)$, nous obtenons avec d'autre constante C_2

$$\|v(\tau)\| \geqq \exp(-C_3 f(\bar{\tau})(\tau-\bar{\tau}))\|v(\bar{\tau})\|, \qquad \tau > \bar{\tau}. \tag{2.11}$$

Pour compléter la preuve supposons que $v(\bar{x}, \bar{t}\,;\, \cdot, \tau^*)=0$ à un point $(\bar{x}, \bar{t}, \tau^*)$. Lorsque nous posons

$$t^* = \inf\{t>a\,;\, v(\bar{x}, t\,;\, \cdot, \tau^*) = 0\},$$

nous avons au cas de $t^*>a$ que $v(\bar{x}, t^*;\, \cdot, \tau)=0$ pour tout $\tau>\tau_0$, de sorte qu'il résulte de définition (2.4) de v que pour $\varepsilon>0$ assez petit et pour tout (ξ, τ)

$$v(\bar{x}, t^*-\varepsilon\,;\, \xi, \tau) = v(\bar{x}, t^*\,;\, \bar{\xi}(\varepsilon, \xi, \tau), \bar{\tau}(\varepsilon)) \exp(\{\bar{\xi}(\varepsilon, \xi, \tau)^2-\bar{\tau}(\varepsilon)^2\}/2)$$

avec certaines $\bar{\tau}(\varepsilon)$, $\bar{\xi}(\varepsilon, \xi, \tau)$, ce qui est une contradiction que nous cherchons. Lorsque $t^* = a$, des arguments pareils impliquent que $U=0$ dans $\boldsymbol{R}\times]a, b[$, ce qui complète la preuve.

Nous donnons un lemme de compacité qui a été prouvé par Angenent [2] au cas de F de la forme (2.2). Pour $\sigma>0$ assez petit posons

$$h_0 = \min(\sqrt{\sigma}, \exp(-\tau_0)), \qquad D_\sigma = [0, 1]\times[a+\sigma, b-\sigma]$$

où τ_0 est la constante donnée dans Lemme 2.2 et considérons des fonctions dans $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R})$ définies par

$$w(x, t, h, \xi) = \exp(-\xi^2/2)U(x+2h\xi, t). \tag{2.12}$$

LEMMA 2.3. *L'ensemble*

$$\{w(x, t, h, \cdot)/\|w(x, t, h, \cdot)\|\,;\, (x, t) \in D_\sigma, 0<h<h_0\}$$

est précompacte dans E_θ *pour tout* $0<\theta<1$.

PREUVE. Par la définition de w

$$w(x, t, h, \xi) = v(x, t+h^2\,;\, \xi, -\log(h)),$$

nous obtenons du Lemme 2.2 que $w \neq 0$. En utilisant les notations dans la preuve du Lemme 2.2, nous prenons

$$\tau_1 = -\frac{1}{2}\log(2h^2), \qquad \tau_2 = -\log(h),$$

et appliquons (2.9)-(2.11). Alors nous avons avec d'autre constantes C_k, $k=1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}\|A^\theta w(x, t, h, \cdot)\| &\leqq C_\theta\{1+(\log\sqrt{2})^{-\theta}\}\|v(x, t+h^2\,;\, \tau_1)\| \\ &\leqq C_1\exp(C_2 f(\tau_1))\|v(x, t+h^2\,;\, \cdot, \tau_2)\| \\ &\leqq C_1\exp(C_3 f(\tau_0))\|w(x, t, h, \cdot)\|.\end{aligned}$$

Puisque $f(\tau_0)=f(x, t; \tau_0)$ est borné dans D_σ, nous avons pour une constante C indépendante de (x, t, h)

$$\|A^\theta w(x, t, h, \cdot)\| \leqq C\|w(x, t, h, \cdot)\|,$$

de sorte que la compacité de l'injection de E_θ dans $E_\phi (\theta>\phi)$ implique la conclusion.

Nous présentons un lemme dû à Angenent [**1**, **2**] qui est une conséquence du lemme de compacité et nous allons l'utiliser dans le paragraphe prochain. Posons

$$Z(U) = \{(x, t) \in \boldsymbol{R}\times]a, b[\,;\ U(x, t) = 0\},$$

$$S_\sigma(U) = \{(x, t) \in Z(U)\cap D_\sigma;\ U_x(x, t) = 0\}.$$

LEMME 2.4. *Soit $(x_0, t_0)\in S_\sigma(U)$. Lorsque τ tient vers ∞, la suite $\{v(x_0, t_0; \cdot, \tau)/\|v(x_0, t_0; \cdot, \tau)\|\}$ converge dans $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R})$ vers une fonction propre de A qui est un multiple de $H_n(\xi)\exp(-\xi^2/2)$ avec $n\geqq 1$. De plus cette suite, par le lemme de compacité, converge dans E_θ pour tout $0<\theta<1$ et donc dans $\boldsymbol{C}^1(\boldsymbol{R})$. Par conséquence il existe une t-courbe dans $Z(U)$, continue, définie dans $[t_0-\delta, t_0]$, $\delta>0$, et départant à partir de (x_0, t_0).*

3. Cas de solution sur $\boldsymbol{R}$.

Dans ce paragraphe nous considérons $Z(U)$ pour une solution non-triviale U de (2.1) vérifiant (H.1)-(H.3). Avant de le faire nous étudions une solution locale et $\boldsymbol{C}^\infty$, V, de l'équation:

(3.1) $$V_t = V_{xx}+r(x, t)V \qquad \text{dans} \quad B = \{(x, t);\ |x|+|t|<\varepsilon\}$$

vérifiant une hypothèse:

(H.4) V appartient à $\boldsymbol{C}^\infty(B)$ et elle s'annule à l'ordre fini à (0, 0).

Ici r appartient à $\boldsymbol{L}^\infty(B)$. Cette hypothèse signifie qu'il existe un entier $m\geqq 1$ tel que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j V|_{(0,0)} = 0 \qquad \text{pour tout} \quad i+2j < m,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta V|_{(0,0)} \neq 0 \qquad \text{pour certain} \quad \alpha+2\beta = m.$$

Dans ce cas on dit que V s'annule à (0, 0) à l'ordre de poids m et posons

$$V_k(x, t) = \sum_{i+2j=k} \frac{x^i t^j}{i!\,j!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j V|_{(0,0)},$$

$$P_N(x, t) = \sum_{k=m}^{m+N} V_k(x, t).$$

Alors il résulte de (3.1) que, pour $k=m, m+1$,

$$V_{k,t}=V_{k,xx}, \tag{3.2}$$

$$V_k(x,t)=d_k\prod_{j=1}^{l}\{x^2+4t\lambda_{k,j}^2\} \qquad \text{si} \quad k=2l, \tag{3.3}$$

$$=d_k x\prod_{j=1}^{l}\{x^2+4t\lambda_{k,j}^2\} \qquad \text{si} \quad k=2l+1,$$

où $$d_k=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k V|_{(0,0)}(k\,!)^{-1}.$$

Nous avons alors

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}V_m(x,t)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial t}V_m(x,t)\right||t|^{1/2}\geqq C\{x^2+|t|\}^{(m-1)/2}$$

avec une constante $C>0$ et cette estimation nous permet d'utiliser un cas spécial des résultats dûs aux Kuiper [4], Kuo [6] et Paunescu [12].

LEMMA 3.1. *Soit V une solution C^∞ de* (3.1) *s'annulant à* (0, θ) *à l'ordre de poids $m\geqq 2$. Alors il existe, pour tout $N\geqq 0$, C^{1+N} difféomorphisme Φ_N autour de* (0, 0) *tel que*

(i) $V(\Phi_N(x,t))=P_{2N+1}(x,t)$,

(ii) $\partial\Phi_N/\partial(x,t)|_{(0,0)}=$ *L'identité,*

(iii) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\Phi_N|_{(0,0)}=0$ *si* $2\leqq i+j\leqq 1+N$.

Les parties (ii) et (iii) n'ont pas été mentionnées dans les travaux ci-dessus. Mais elles sont clairs par la méthode de la construction de Φ_N qui est donnée par la manière suivante. Posons

$$F(x,t,s)=(1-s)P_{2N+1}(x,t)+sV(x,t)$$

et désignons par $\phi(s\,;\bar{x},\bar{t})$ la solution de l'équation:

$$\frac{d}{ds}\phi=-F_s(\phi)|\mathrm{grad}_{(x,t)}F(\phi,s)|^{-2}\,\mathrm{grad}_{(x,t)}F(\phi,s),$$

$$\phi(0)=(\bar{x},\bar{t}).$$

Alors Φ_N est donné par $\Phi_N(x,t)=\phi(1\,;x,t)$ et satisfait les conditions (i)-(iii) du Lemme.

LEMMA 3.2. *Sous les mêmes hypothèses que celles dans Lemme* 3.1, *il existe $\rho,\delta>0$, une t-courbe Γ_0, C^∞ et définie dans $[-\delta,\delta]$ et des x-courbes Γ_j, $1\leqq j\leqq[m/2]=l$, C^∞ et définies dans un voisinage de* 0 *tels que l'on ait les suivants.*

(i) *L'ensemble*

$$\{(x, t)\,;\ |x| \leqq \rho,\ |t| \leqq \delta,\ V(x, t) = 0\}$$

est égal à la réunion de Γ_j, $0 \leqq j \leqq l$, *au cas de* m *impair et* Γ_j, $1 \leqq j \leqq l$, *au cas de* m *pair.*

(ii) *les fonctions de définition* γ_j *de* Γ_j *satisfont*:

$$\gamma_0(0) = 0,\ \gamma_{0,t}(0) = -4\left\{d_{m+1}\prod_{j=1}^{l+1}\lambda_{m+1}^2\right\}\left\{d_m\prod_{j=1}^{l}\lambda_{m,j}^2\right\}^{-1}. \tag{3.4}$$

$$\gamma_j(0) = \gamma_{j,x}(0) = 0, \quad \gamma_{j,xx}(0) = -1/2\lambda_{m,j}^2, \quad j > 0. \tag{3.5}$$

PREUVE. En vertu du Lemme 3.1, il suffit d'étudier les ensembles de zero des P_{2N+1}. Considérons des équations:

$$y^{-m}P_{2N+1}(y,\ y^2\phi) = 0, \tag{3.6}$$

$$s^{-m}P_{2N+1}(s\psi,\ \pm s^2) = 0. \tag{3.7$_\pm$}$$

Du théorème de fonction implicite et de (3.3) l'équation (3.6) en ϕ possède l racines $\phi = \phi_j(y)$, $1 \leqq j \leqq l$, qui sont analytiquement dépendantes de y pour $|y|$ assez petit, telles que $\phi_j(0) = -1/4\lambda_{m,j}^2$. De plus au cas de m impair $(3.7)_\pm$ en ψ possède la seule racines $\psi = \psi_\pm(s)$, qui est holomorphiquement dépendante de s pour $|s|$ assez petit, telle que $\psi_\pm(0) = 0$. Puisque $\psi_+(s) = i\psi_-(is)$ et $\psi_\pm(s)$ est réel pour s réel, $\psi(s)$, définie par

$$\psi(s) = \sqrt{\pm s}\,\psi_\pm(\sqrt{\pm s}) \qquad \text{si} \quad \pm s > 0,$$

est analytique en s. Nous avons donc que les zeros de P_{2N+1} sont donnés par

$$t = x^2\phi_j(x), \qquad 1 \leqq j \leqq l,$$

et de plus au cas de m impair $x = \psi(t)$. En remarquant que $\psi_t(0) = \psi_{+,t}(0)$ et qu'elle est déterminée par (3.2), nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \to 0} s^{-m-1}P_{2N+1}(s\psi_+(s),\ s^2) \\ &= d_m\psi_t(0)\prod_{j=1}^{l} 4\lambda_{m,j}^2 + d_{m+1}\prod_{j=1}^{l+1} 4\lambda_{m+1,j}^2, \end{aligned}$$

ce qui implique (3.4).

Fixons (x_0, t_0) dans $S_{2\sigma}(U)$ et considérons des fonctions dans $\boldsymbol{C}([-1, \infty[\,;\ L^2(\boldsymbol{R}))$ avec paramètre h, $0 < h < \min(\sqrt{\sigma},\ \exp(-1-\tau_0))$, définies par

$$\omega(h\,;\ \xi,\ \tau) = C_h \exp(-\xi^2/2)U(x_0 + 2he^{-\tau}\xi,\ t_0 + h^2(1 - e^{-2\tau})), \tag{3.8}$$

où la constante C_h est déterminée telle que la norme dans $L^2(\boldsymbol{R})$ de $\omega(h\,;\ \cdot,\ -1)$ est égal à 1. Alors $\omega(h\,;\ \cdot,\ \cdot)$ est une solution de l'équation:

$$\omega_\tau + A\omega = B(h\,;\ \tau)\omega, \qquad \tau > -1. \tag{3.9}$$

Ici $B(h\,;\,\tau)$ sont des opérateurs définis par la manière suivante. Au cas de F de la forme (2.2),

$$B(h\,;\,\tau)f(\xi)=2h^2e^{-2\tau}Q(x_0+2he^{-\tau}\xi,\ t_0+h^2(1-e^{-2\tau}))f(\xi),$$

et au cas de F de la forme (2.3),

$$\begin{aligned} B(h\,;\,\tau)f(\xi) &= 2h^2e^{-2\tau}Q(x_0+2he^{-\tau}\xi,\ t_0+h^2(1-e^{-2\tau}))f(\xi) \qquad \text{si} \quad x_0+2he^{-\tau}\xi>0, \\ &= 2h^2e^{-2\tau}\exp(x_0e^{2\tau}\{x_0+2he^{-\tau}\xi\}/2h^2)\tilde{Q}f(-\xi-x_0e^{\tau}/h) \\ &\quad +4h^3e^{-3\tau}\tilde{f} \qquad \text{si} \quad x_0+2he^{-\tau}\xi<0. \end{aligned}$$

Ici $\tilde{Q}=Q(-x_0-2he^{-\tau}\xi,\ t_0+h^2(1-e^{-2\tau}))$,

$$\begin{aligned} \tilde{f} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \{\tilde{R}_1+2(x_0+he^{-\tau}(\xi-\eta))\tilde{R}_2\}\exp(2\{x_0+he^{-\tau}(\xi-\eta)\}\tilde{R}_3 \\ +(\eta^2-\xi^2)/2)f(-\eta)d\eta, \end{aligned}$$

$$\rho_1=\xi+x_0e^{\tau}/h, \quad \rho_2=x_0e^{\tau}/2h, \quad \tilde{R}_j=R_j(-x_0+2he^{-\tau}\eta,\ t_0+h^2(1-e^{-2\tau})).$$

Par des arguments dans la preuve du Lemme 2.1 nous avons les estimations suivantes.

$$\|B(h\,;\,\tau)f\| \leqq Ch^2e^{-2\tau}\|f\| \tag{3.10}$$

avec une constante C indépendante de $(x_0,\ t_0,\ h,\ \tau,\ f)$.

DEFINITION 3.3. Pour chaque $(x_0,\ t_0)$ dans $S_{2\sigma}(U)$ nous désignons par $\Lambda=\Lambda(x_0,\ t_0)$ l'ensemble des suites $\lambda=\{h_n\}$ nulles et décroissant telles que la suite $\{\omega(h_n\,;\,\cdot,\ -1)\}$ converge dans E_θ pour tout $0<\theta<1$.

En vertu du Lemme 2.3 Λ n'est pas vide. Comme ω est une solution de (3.9), il résulte de (3.10) que, pour chaque $\lambda=\{h_n\}$ dans Λ, $\{\omega(h_n\,;\,\cdot,\ \cdot)\}$ converge dans $\boldsymbol{C}([-1,\ \infty[\,;\ E_\theta)$ pour tout $0<\theta<1$ et donc dans $\boldsymbol{C}([-1,\ \infty[\,;\boldsymbol{C}^1(\boldsymbol{R}))$. Nous notons par ω_λ sa limite et elle est une solution analytique de l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\omega_\lambda+A\omega_\lambda=0, \qquad \tau>-1. \tag{3.11}$$

Nous démontrons une amélioration du Théorème B d'Angenent [**2**].

LEMME 3.4. *Soit* $(x_0,\ t_0)\in S_{2\sigma}(U)$. *Il existe alors un entier* $m\geqq 2$, *deux suites* $\{\varepsilon_n\}$, $\{\delta_n\}$, *nulles et strictement décroissant tels que l'on ait les suivants.*

(i) $U(x_0\pm\varepsilon_n,\ \cdot)\neq 0$ *sur* $[t_0-\delta_n,\ t_0+\delta_n]$.

(ii) *Sur* $I_n=[x_0-\varepsilon_n,\ x_0+\varepsilon_n]$, $U(\cdot,\ t_0+\delta_n)\neq 0$ *au cas de m pair et* $U(\cdot,\ t_0+\delta_n)$ *possède le seul zero, noté par* x_n, *au cas de m impair.*

(iii) *Sur* I_n, $U(\cdot,\ t_0-\delta_n)$ *possède exactement m zeros* $x_{n,j}$, $|j|\leqq[m/2]=l$, *tels que* $x_{n,-1}<x_{n,0}<x_{n,1}$,

$$x_{n,-l}<\cdots<x_{n,-1}<x_0<x_{n,1}<\cdots<x_{n,l}.$$

Ici on a d'éliminer $x_{n,0}$ au cas de m pair.

PREUVE. Fixons $\lambda=\{h_n\}$ dans $\Lambda(x_0, t_0)$. Puisque (x_0, t_0) est dans $S(U)$, ω_λ s'annule à (0, 0) à l'ordre de poids $m\geqq 2$ et nous appliquons Lemme 3.2 à ω_λ. Alors pour δ, δ', $\varepsilon>0$ assez petit avec $\exp(-2\delta)+\exp(2\delta')=2$, nous avons les suivants.

(i) $\omega_\lambda(\xi, \tau)\neq 0$ si $\varepsilon\leqq|\xi|\leqq 2\varepsilon$, $-\delta'\leqq\tau\leqq\delta$.

(ii) Sur $\{|\xi|\leqq\varepsilon\}$, $\omega_\lambda(\cdot, \delta)\neq 0$ au cas de m pair et elle possède le seul zero au cas de m impair.

(iii) $\omega_\lambda(\cdot, -\delta')$ possède exactement m zeros ξ_j, $|j|\leqq[m/2]=l$, sur $\{|\xi|\leqq\varepsilon\}$ tels que $\xi_{-1}<\xi_0<\xi_1$,

$$\xi_{-l}<\cdots<\xi_{-1}<0<\xi_1<\cdots<\xi_l.$$

Ici on a d'èliminer ξ_0 au cas de m pair. Lorsque nous posons

$$\delta_n = h_n^2(1-e^{-2\delta}), \qquad \varepsilon_n = 2\varepsilon h_n e^{\delta'},$$

la convergence de $\{\omega(h_n; \cdot, \cdot)\}$ vers ω_λ dans $\boldsymbol{C}([-1, \infty[; \boldsymbol{C}^1(\boldsymbol{R}))$ et les simplicités des zeros ci-dessus de ω_λ, qui sont une conséquence du Lemme 3.2, impliquent la conclusion.

Remarque du Lemme 3.4. Les parties (i) et (ii) entraînent que deux t-courbes Γ_j, $j=1, 2$, dans $Z(U)\cap D_{2\sigma}$, continues et définies dans $]t_1, t_2]$, ne possède aucun point commun si $\Gamma_1\cap\Gamma_2\cap\{t=t_2\}$ est vide.

Considérons d'abord des zeros de U dans $\{x>0\}$. Pour $0<\alpha<\beta<1$, nous notons par $z(\alpha, \beta; t)$ le nombre des zeros de $U(\cdot, t)$ sur $\alpha\leqq x\leqq\beta$.

LEMMA 3.5. *Supposons que*

$$U(\alpha, t)U(\beta, t)\neq 0 \qquad \textit{sur} \quad t_1\leqq t\leqq t_2$$

et que $1\leqq z(\alpha, \beta; t_1)<\infty$, $1\leqq z(\alpha, \beta; t_2)$. *Alors* $z(\alpha, \beta; \cdot)$ *est décroissant dans* $[t_1, t_2]$.

PREUVE. Comme $\{t\in]t_1, t_2[; z(\alpha, \beta; t)=0\}$ est ouvert, nous prenons une composant connexe $]t_3, t_4[$ de cet ensemble (s'il n'est pas vide) et appliquons Lemme 3.4 à U près de (x^*, t_4) où $U(x^*, t_4)=0$, $\alpha\leqq x^*\leqq\beta$. Nous avons alors $z(\alpha, \beta; t_4-\varepsilon)\geqq 1$ pour certain $\varepsilon>0$ assez petit et donc $z(\alpha, \beta; t)\geqq 1$ sur $t_1\leqq t\leqq t_2$. Pour montrer décroissance de $z(\alpha, \beta; \cdot)$ il suffit de preuver que $z(\alpha, \beta; t_1)\geqq z(\alpha, \beta; t_2)$. Mais c'est une conséquence du Lemme 2.4 et la remarque du Lemma 3.4.

THÉORÈME 3.6. *Soit U une solution non triviale de* (2.1) *vérifiant* (H.1)-(H.3) *et soit* $(x_0, t_0)\in S_{2\sigma}(U)$ *avec* $0<x_0<1$. *Alors la même conclusion que Théorème* 1.1 *pour $Z(U)$ dans un voisinage de (x_0, t_0) est vérifie.*

PREUVE. Nous utilisons les notations de la preuve du Lemme 3.4. Nous obtenons alors par la décroissance de $z(\alpha, \beta; \cdot)$ que pour $t_0-\delta_{n_0}\leqq t\leqq t_0-\delta_n$ et pour $n\geqq n_0$ (n_0 assez grand)

$$\begin{aligned} m &= z(x_0-\varepsilon_{n_0}, x_0+\varepsilon_{n_0}; t_0-\delta_{n_0}) \\ &\geqq z(x_0-\varepsilon_{n_0}, x_0+\varepsilon_{n_0}; t) \geqq z(x_0-\varepsilon_n, x_0+\varepsilon_n; t_0-\delta_n) = m, \end{aligned}$$

de sorte que $z(x_0-\varepsilon_{n_0}, x_0+\varepsilon_{n_0}; t)=m$ pour $t_0-\delta_{n_0}\leqq t<t_0$. Prenons $n_1>n_0$ assez grand tel que $z(x_0-\varepsilon_{n_1}, x_0+\varepsilon_{n_1}; t_0)=1$. Alors il résulte du Lemme 2.4 et de la décroissance de z que $z(x_0-\varepsilon_{n_1}, x_0+\varepsilon_{n_1}; t)$ est constante $\leqq 1$ sur $t_0<t\leqq t_0+\delta_{n_1}$, ce qui complete la preuve de la même conclusion que la partie (i) du Théorème 1.1. Pour démontrer le reste nous avons besoin de savoir préciséments des zeros de ω_λ, $\lambda\in\Lambda$. Notons par $z(\lambda; \tau)$ le nombre des zeros de $\omega_\lambda(\cdot, \tau)$ sur $\boldsymbol{R}$.

LEMME 3.7. *Soit* $(x_0, t_0)\in S_{2\sigma}(U)$ *avec* $0<x_0<1$. *Alors pour tout* $\mu\in\Lambda(x_0, t_0)$, ω_μ *s'annule à* $(0, 0)$ *au même ordre de poids. Lorsque nous le notons par* m, $z(\mu; \tau)=m$ *si* $-1<\tau<0$, 1 *si* $\tau=0$, 1 *et* m *est impair,* 0 *si* $\tau>0$ *et* m *est pair.*

PREUVE. Puisque l'ordre de poids d'annulation à $(0, 0)$ de ω_μ, $\mu=\{k_n\}\in\Lambda$, est égal au nombre des t-courbes dans $Z(U)$, continues et départant à partir de (x_0, t_0) dans la direction de la passé, il est indépendant de μ. Si $z(\mu; \tau_0)>m$ à un point τ_0 avec $-1<\tau_0<0$, il résulte du Lemme 3.2 que pour $\tau_0-\tau_1>0$ assez petit, $\omega_\mu(\cdot, \tau_1)$ possède au moins $m+1$ simples zeros sur $\boldsymbol{R}$, de sorte que $\omega(k_n; \cdot, \tau_1)$ aussi possède au moins $m+1$ zeros pour n assez grand. C'est une contradiction contre la partie (i). Nous avons donc par la décroissance de $z(\mu; \cdot)$ que

$$m\geqq z(\mu; \tau)\geqq z(\mu; -0)\geqq m, \qquad -1<\tau<0.$$

Par des arguments pareils nous peuvons déterminer les valeurs de $z(\mu; \tau)$ pour $\tau\geqq 0$.

Nous désignons les zeros de $\omega_\lambda(\cdot, \tau)$ sur $\boldsymbol{R}$ par $\xi_j(\lambda; \tau)$, $0<|j|\leqq l=[m/2]$, $-1<\tau\leqq 0$ et de plus $\xi_0(\lambda; \tau)$, $-1<\tau$, au cas de m impair et nous les arrengeons

$$\xi_j(\lambda, \tau)<\xi_k(\lambda, \tau), \qquad j<k, \qquad -1<\tau<0. \tag{3.12}$$

LEMMA 3.8. *Lorsque* $\{\omega_{\lambda_n}(\cdot, -1)\}$, $\lambda_n\in\Lambda$, *converge vers* $\omega_\lambda(\cdot, -1)$ *dans* E_θ, $\theta<1$, *pour chaque* $j\neq 0$, (*resp.* $j=0$), $\{\xi_j(\lambda_n; \cdot)\}$ *converge vers* $\xi_j(\lambda; \cdot)$ *dans* $\boldsymbol{C}([-\delta, 0])$, (*resp.* $\boldsymbol{C}([-\delta, \delta])$), *avec certaine constante* $\delta>0$.

PREUVE. Nous considérons des zeros complexes de ω_μ près de $(0, 0)$ et posons

$$f(\mu; \zeta, z)=\zeta^{-m}\omega_\mu(\zeta, \zeta^2 z), \qquad F(\mu; \zeta, z)=-f_\zeta/f_z. \tag{3.13}$$

Puisque ω_μ est une solution analytique de (3.11), il existe des fonctions $\phi_j(\mu; \cdot)$,

$1 \leqq j \leqq l$, holomorphes dans un voisinage de $\zeta=0$ dans $\boldsymbol{C}$ telles que

$$f(\mu\,;\ \zeta,\ \phi_j(\mu\,;\ \zeta)) = 0, \qquad \phi_j(\mu\,;\ 0) = -1/2\lambda_{m,j}^2,$$

de sorte que $\xi_j(\mu\,;\ \tau)$ et $\xi_{-j}(\mu\,;\ \tau)$ sont deux solutions de $\Phi_j(\mu\,;\ \xi)=\tau$ où $\Phi_j(\mu\,;\ \xi)=\xi^2\phi_j(\mu\,;\ \xi)$. Parce que ϕ_j est la solution de l'équation:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} = F(\mu\,;\ \zeta,\ \phi(\zeta)), \qquad \phi(0) = -1/2\lambda_{m,j}^2,$$

pour montrer la convergence de $\{\xi_j(\lambda_n,\ \cdot)\}$ il suffit de preuver la convergence uniforme de $\{f(\lambda_n\,;\ \cdot,\ \cdot)\}$ dans un voisinage de $(0,\ -1/2\lambda_{m,j}^2)$ dans $\boldsymbol{C}$. Pour le faire considérons l'équation (3.11) qui possède le bon noyau:

$$\begin{aligned} &\omega_\mu(\zeta,\ z) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\zeta,\ \eta,\ z+1)\omega_\mu(\eta,\ -1)d\eta\,, \\ &H(\zeta,\ \eta,\ z) = 2\exp(1+(\eta^2-\zeta^2)/2)G(2e(e^{-z}\zeta-\eta),\ e^2(1-e^{-2z})), \\ &G(x,\ t) = (4\pi t)^{-1/2}\exp(-x^2/4t). \end{aligned}$$

Alors il résulte de la convergence de $\{\omega_{\lambda_n}(\cdot,\ -1)\}$ que $\{\omega_{\lambda_n}(\cdot,\ \cdot)\}$ converge dans un voisinage de $(0,\ 0)$ dans $\boldsymbol{C}$ et donc nous avons la convergence de $\{f(\lambda_n\,;\ \cdot,\ \cdot)\}$. En utilisant, au lieu de (3.13),

$$g_\pm(\mu\,;\ \zeta,\ z) = z^{-m}\omega_\mu(z\zeta,\ \pm z^2), \qquad G_\pm(\mu\,;\ \zeta,\ z) = -g_{\pm,z}/g_{\pm,\zeta},$$

des arguments pareils entraînent la convergence de $\{\xi_0(\lambda_n,\ \cdot)\}$.

Preuve de la partie (ii) du Théorème 3.6. Soient Γ_j, $|j| \leqq [m/2]=l$, des t-courbes données par la partie (i) et γ_j ses fonctions de définition. Nous les arrengeons de la manière suivante.

$$\gamma_j(t) < \gamma_k(t), \qquad j<k, \qquad t_0-\delta \leqq t < t_0.$$

Fixons $\kappa \neq 0$ et prenons $\{t_n\}$ strictement croissant et convergeant vers t_0 telle que

$$\lim_{n\to\infty}\{\gamma_\kappa(t_n)-x_0\}(t_0-t_n)^{-1/2} = \limsup_{t\uparrow t_0}\{\gamma_\kappa(t)-x_0\}(t_0-t)^{-1/2}.$$

Nous notons cette constante par C_κ. Posons pour $-1<\rho<0$

$$k_n(\rho) = \{(t_0-t_n)(e^{-2\rho}-1)^{-1}\}^{1/2}.$$

Alors nous déduisons du Lemme 2.3 qu'il existe une sous-suite $\lambda(\rho)=\{k_{n(i)}\}$ de $\{k_n(\rho)\}$ telle que $\lambda(\rho)$ est dans Λ et que pour $-1<\tau<0$ et pour i assez grand $\omega(k_{n(i)}\,;\ \cdot,\ \tau)$ possède m zeros $\xi_{n(i),j}(\tau)$, $|j| \leqq l$, vérifiant

$$\lim_{i\to\infty}\xi_{n(i),j}(\tau) = \xi_j(\lambda(\rho)\,;\ \tau).$$

Par la conclusion de la partie (i) nous avons

$$\gamma_\kappa(t_{n(i)}) = x_0 + 2k_{n(i)} e^{-\rho} \xi_{n(i),\kappa}(\rho),$$

ce qui implique par tenant i vers ∞ que

$$C_\kappa = 2e^{-\rho}(e^{-2\rho}-1)^{-1/2}\xi_\kappa(\lambda(\rho), \rho), \qquad -1<\rho<0.$$

D'autre part comme $\{\omega_\lambda(\cdot, -1);\ \lambda\in\Lambda\}$ est compacte dans E_θ, $\theta<1$, il existe une suite $\{\rho_n\}$ strictement croissant et convergeant vers 0 telle que $\{\omega_{\lambda(\rho_n)}(\cdot, -1)\}$ converge vers certain $\omega_\mu(\cdot, -1)$, $\mu\in\Lambda$, dans E_θ, de sorte que nous avons du Lemme 3.8 les convergences uniformes de $\{\xi_\kappa(\lambda(\rho_n);\ \cdot)\}$ vers $\xi_\kappa(\mu;\ \cdot)$ et de $\{\phi_\kappa(\lambda(\rho_n);\ \cdot)\}$ vers $\phi_\kappa(\mu;\ \cdot)$. Par conséquence nous obtenons

$$\begin{aligned} C_\kappa &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\,\xi_\kappa(\lambda(\rho_n);\ \rho_n)|\rho_n|^{-1/2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\,\mathrm{sgn}(\kappa)|\phi_\kappa(\lambda(\rho_n);\ \xi_\kappa(\lambda(\rho_n);\ \rho_n))|^{-1/2} = 2\lambda_{m,\kappa}. \end{aligned}$$

Pour compléter la preuve remarquons que des arguments pareils impliquent aussi

$$\begin{aligned} C_\kappa &= \liminf_{t\uparrow t_0}\{\gamma_\kappa(t)-x_0\}(t_0-t)^{-1/2}, \\ &\lim_{t\to t_0}\{\gamma_0(t)-x_0\}|t_0-t|^{-1/2} = 0. \end{aligned}$$

Remarque du Théorème 3.6. Ce Théorème entraîne immédiatement le suivant. Lorsque U est une solution de (2.1) vérifiant (H.1)-(H.3) et

$$U(0, t) = 0 \qquad \text{dans} \quad]a, b[,$$

$Z(U)\cap\{x>0\}$, près d'un point fixé $(0, t_0)$ dans $S_{2\sigma}(U)$, consiste en $l(\geqq 1)$ t-courbes continues et définies dans $[t_0-\delta, t_0]$ telles que ses fonctions de définition γ_j, $1\leqq j\leqq l$, satisfont

$$\lim_{t\uparrow t_0}\gamma_j(t)|t_0-t|^{-1/2} = 2\lambda_{2l+1,j}.$$

Considérons finalement des zeros près de $x=0$ sous l'hypothèse suivante.

$$\text{(H.5)} \qquad U_x(0, t)+g(t)U(0, t) = 0 \qquad \text{dans} \quad]a, b[.$$

Ici g appartient à $C^1(]a, b[)$.

THÉORÈME 3.9. *Soit U une solution non triviale de* (2.1) *vérifiant* (H.1)-(H.3) *et* (H.5). *Alors pour chaque* $(0, t_0)$ *dans* $S_{2\sigma}(U)$ *la même conclusion que Théorème* 1.2 *pour* $Z(U)$ *près de* $(0, t_0)$ *est vérifie.*

La démonstration de ce Théorème est tout à fait analogue à celle du Théorème 3.6, en utlisant, au lieu du Lemme 3.5, le suivant. Nous notons par $z(0, \beta;\ t)$ le nombre des zeros de $U(\cdot, t)$ sur $0\leqq x\leqq\beta$.

LEMMA 3.10. *Supposons que*

$$U(\beta, t) \neq 0 \qquad \textit{sur} \quad t_1\leqq t\leqq t_2$$

et que $\infty > z(0, \beta; t_1) \geqq 1$, $z(0, \beta; t_2) \geqq 1$. *Alors* $z(0, \beta; \cdot)$ *est décroissant dans* $[t_1, t_2]$.

PREUVE. Puisque $Z(U) \cap \{x=0\}$ est contenu dans $S(U)$, pour tout $\lambda \in \Lambda(0, \bar{t})$, $(0, \bar{t}) \in S_{2\sigma}(U)$, nous avons $\omega_{\lambda, \xi}(0, \tau)=0$, de sorte que, par le théorème d'unicité des solutions du probleme de Cauchy à la surface initiale non caractéristique (voir, par exemple, Mizohata [**10**]), ω_λ est pair en ξ. Celà signifie que ω_λ s'annule à (0, 0) à l'ordre de poids pair. Nous avons alors des Lemme 2.4, 3.4 et du lemme de Zorn qu'il existe, pour chaque (x^*, t^*) dans $Z(U)$ avec $0<x^*<\beta$, $t_1<t^* \leqq t_2$, une t-courbe dans $Z(U) \cap \{x>0\}$, continue, définie dans $[t_1, t^*]$ et départant à partir de (x^*, t^*), ce qui implique la décroissance de $z(0, \beta; \cdot)$.

4. Preuves des Théorèmes 1.1 et 1.2.

Fixons un point (x_0, t_0) dans $S(u)$ avec $0 \leqq x_0 < 1$, $0 < t_0 < T$. Alors il résulte de l'unicité rétrograde des solutions du probleme (1.1)-(1.2), (voir Linos-Malgrange [**7**] et Watanabe [**13**]), qu'il existe x^* tel que $u(x^*, t_0) \neq 0$, $0<x^*<1$. Lorsque $0<x^*<x_0$, par le changement de coordonné $x \rightarrow 1-x$ nous supposons sans perte de généralité que $x_0<x^*<1$. Considérons une extension $\tilde{u}$ de u à $]0, \infty[\times]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$, $(\varepsilon>0$ assez petit), définie par $\tilde{u}(x, t)=u^*(\Phi_\varepsilon(x), t)$,

$$u^*(x, t) = \Psi_\varepsilon(x) u(x, t) + \chi_{5\varepsilon}(x-x^*) \iint_{R^2} \rho_\varepsilon(x-y, t-s) u(y, s) dy ds.$$

Ici $\rho_\varepsilon *$ est une régularisant dans $\boldsymbol{R}^2$, Φ_ε et Ψ_ε sont dans $C^\infty(\boldsymbol{R})$ telles que $\Phi_\varepsilon(x) = x$ si $x<x^*-3\varepsilon$, $|\Phi_\varepsilon(x)-x^*|<4\varepsilon$ si $x^*-3\varepsilon<x$, $\Psi_\varepsilon(x)=1$ si $x<x^*-8\varepsilon$, $0<\Psi_\varepsilon(x)<1$ si $x^*-8\varepsilon<x<x^*-5\varepsilon$, $\Psi_\varepsilon(x)=0$ si $x>x^*-5\varepsilon$. χ_ε est définie par $\chi_\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$ pour certaine χ dans $C^\infty(\boldsymbol{R})$ telle que $\chi(x)=1$ si $|x|<1$, $0<\chi(x)<1$ si $1<|x|<2$, $\chi(x)=0$ si $|x|>2$. Lorsque nous prenons ε assez petit, $\tilde{u}=u$ dans un voisinage de (x_0, t_0) dans $\{x \geqq 0\}$ et

$$\tilde{q}(x, t) = \{\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx}\}/\tilde{u}$$

est borné dans $]0, \infty[\times]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$. Ensuite nous considérons une extension de $\tilde{u}$ définie par

$$U(x, t) = \tilde{u}(-x, t) + 2g(t) \int_x^0 \exp((y-x)g(t)) \tilde{u}(-y, t) dy, \quad x<0.$$

Alors U est une solution de (2.1) au cas de F de la forme (2.3):

$$F(t, U(\cdot, t))(x) = \tilde{q}(x, t) U(x, t) \quad \text{si} \quad x>0, \quad \tilde{q}(-x, t) U(-x, t)$$
$$+ \int_x^0 2\{R_1 + (y-x) R_2\} \exp((y-x) g(t)) U(-y, t) dy \quad \text{si} \quad x<0.$$

Ici $R_1 = g(t)\tilde{q}(-y, t) + g_t(t)$, $R_2 = g(t) g_t(t)$. Par conséquence Théorèmes 3.6 et 3.9 impliquent Théorèmes 1.1 et 1.2.

Bibliographie

[1] S.B. Angenent, The Morse Smale property for a semilinear parabolic equation, J. D. Eqs., **62** (1986), 427-442.

[2] S.B. Angenent, The zero set of a solution of a parabolic equation, J. reine angew. Math., **390** (1988), 79-96.

[3] S.B. Angenent and B. Fiedler, The dynamics of rotating waves in scalar reaction diffusion equation, Trans. Amer. Math. Soc., **307** (1988), 545-568.

[4] N. Kuiper, C^1-equivalence of functions near isolated critical points, Symposium Infinite Dimensional Topology (Baton Rouge, 1967), Annals of Math. Studies, no. 69, 199-218, 1972.

[5] H. Kunisch and G. Peichl, On the shape of the solutions of second order parabolic partial differential equations, J. D. Eqs., **75** (1988), 329-353.

[6] T.C. Kuo, On C^0-sufficiency of jets of potential functions, Topology, **8** (1969), 167-171.

[7] J.L. Lions et B. Malgrange, Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques, Math. Scand., **8** (1960), 277-286.

[8] H. Matano, Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations, J. Math. Kyoto Univ., **18** (1978), 221-227.

[9] H. Matano, Asymptotic behavior of solutions of semilinear heat equations on S^1, in "Non linear Diffusion Equations and their Equilibrium States II", W.-M. Ni and al. Eds, MSRI Publications vol. 13, (1988), 139-162.

[10] S. Mizohata, Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, **31** (1958), 219-239.

[11] K. Nickle, Gestaltsaussagen über Lösungen parabolischen Differentialgeichungen, J. reine angew. Math., **211** (1962), 78-94.

[12] L. Paunescu, A weighted version of the Kuiper-Kuo-Bochnak-Lojasiewicz theorem, J. Algebraic Geometry, **2** (1993), 69-79.

[13] K. Watanabe, Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques; Cas de dimension 1, J. Math. Soc. Japan, **42** (1990), 377-386.

Kinji WATANABE
Département de Mathématiques
Hyogo Université d'Education
Yashiro, Hyogo, 673-14
Japon