J. Math. Soc. Japan
Vol. 46, No. 3, 1994

Classes généralisées invariantes

By Georges GRAS

(Received Feb. 22, 1993)

Introduction.

Soit K/k une extension cyclique de corps de nombres, de groupe de Galois G, et soit L une extension abélienne finie de K, galoisienne sur k. Nous donnons une formule explicite pour $\#\mathrm{Gal}(L/K)^G$, qui est aussi le degré sur K du sous-corps maximal de L, abélien sur k (cf. (2.7) à (2.10)). Cette formule généralise celle de [**G**], [**H-L**], [**J**]. Une application standard d'une telle formule est la détermination de la structure d'un p-groupe de classes généralisé $C\ell_{K,\mathfrak{m}}$, dans une extension cyclique K/k de degré p, au moyen du calcul de la filtration $(M_i)_{i\geq 0}$ définie par $M_{i+1}/M_i=(C\ell_{K,\mathfrak{m}}/M_i)^G$ et $M_0=1$.

Notre approche diffère des approches connues dans la mesure où nous réalisons une "translation" d'une formule classique de classes invariantes (par ex. de C. Chevalley, Y. Furuta, $\cdots$) au moyen de la suite exacte (2.3).

0. Remarque préliminaire.

Nous adoptons ici un point de vue introduit dans [**J**] par J.-F. Jaulent qui raisonne en termes de classes de diviseurs des corps de nombres, les diviseurs étant en bijection avec les places, et qui parle de "complexification" de places réelles au lieu de ramification ; cependant, nous n'écrirons que des groupes de classes d'idéaux (ce qui est toujours possible, à condition de bien préciser le rôle des places à l'infini) et dirons qu'une place "complexe" au-dessus d'une place "réelle" a un degré résiduel égal à 2.

Il est commode, en dépit des habitudes prises, d'écrire le corps de classes selon ces définitions ; en particulier, pour un corps de nombres F, c'est le corps de classes de Hilbert (correspondant à la non ramification des idéaux premiers) qui joue un rôle pivot dans le treillis des extensions $F_S^{(\mathfrak{m})}$ de F qui sont les sous-extensions S-décomposées maximales des corps de rayons $F^{(\mathfrak{m})}$ au sens restreint, où S est un ensemble de places de F et $\mathfrak{m}$ un idéal entier non nul de F. Bien entendu, dans ce cadre, les invariants au sens ordinaire se retrouvent en imposant que S contienne l'ensemble des places à l'infini de F.

1. Groupes de classes généralisés.

Soit donc F un corps de nombres. Dans toute la suite, $\mathfrak{m}$ désigne un module fini de F, c'est-à-dire un idéal entier non nul de F, et T désigne l'ensemble des idéaux premiers divisant $\mathfrak{m}$. On désigne par S un ensemble de places de F, disjoint de T.

(1.1) Principales notations.

(i) On appelle Pl_F l'ensemble des places de F, qui est donc constitué des sous-ensembles $Pl_{F,0}$ (resp. $Pl_{F,\infty}$) des idéaux premiers (resp. des places à l'infini).

(ii) Pour toute place $\mathfrak{p}\in Pl_F$, on définit la valuation $v_{\mathfrak{p}}$ suivante :

—si $\mathfrak{p}\in Pl_{F,0}$, $v_{\mathfrak{p}}: F^{\times}\twoheadrightarrow \boldsymbol{Z}$ est la valuation $\mathfrak{p}$-adique normalisée usuelle ;

—si $\mathfrak{p}\in Pl_{F,\infty}$ est "réelle" (i.e. de degré résiduel 1), $v_{\mathfrak{p}}: F^{\times}\to \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ est définie par $v_{\mathfrak{p}}(x)=0$ (resp. 1) si $\sigma_{\mathfrak{p}}(x)>0$ (resp. <0) relativement au plongement $\sigma_{\mathfrak{p}}: F\hookrightarrow \boldsymbol{R}$, associé à $\mathfrak{p}$;

—si $\mathfrak{p}\in Pl_{F,\infty}$ est "complexe" (i.e. de degré résiduel 2), alors $v_{\mathfrak{p}}=0$.

(iii) On définit successivement :

$$U_{F,T}=\{x\in F^{\times},\ v_{\mathfrak{p}}(x)=0 \text{ pour tout } \mathfrak{p}\in T\cup Pl_{F,\infty}\},$$

qui est l'ensemble des éléments totalement positifs de $F^{\times}$, étrangers à T ;

$$U_{F,\mathfrak{m}}=\{x\in U_{F,T},\ x\equiv 1 \bmod \mathfrak{m}\}\ ;$$

$$E_F^S=\{x\in F^{\times},\ v_{\mathfrak{p}}(x)=0 \text{ pour tout } \mathfrak{p}\notin S\},$$

le groupe des S-unités ;

$$E_{F,\mathfrak{m}}^S=\{x\in E_F^S,\ x\equiv 1 \bmod \mathfrak{m}\}\ ;$$

I_F le groupe des idéaux fractionnaires de F;

$$I_{F,T}=\{\mathfrak{a}\in I_F,\ v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})=0 \text{ pour tout } \mathfrak{p}\in T\}\ ;$$

$$P_{F,\mathfrak{m}}=\{(x)\in I_F,\ x\in U_{F,\mathfrak{m}}\}\subseteq I_{F,T}\ ,$$

le rayon modulo $\mathfrak{m}$ au sens restreint ;

$$C\ell_{F,\mathfrak{m}}=I_{F,T}/P_{F,\mathfrak{m}}\ ,$$

le groupe des classes modulo $\mathfrak{m}$ au sens restreint ;

$c\ell_{F,\mathfrak{m}}$ l'application canonique $I_{F,T}\to C\ell_{F,\mathfrak{m}}$;

$$C\ell_{F,\mathfrak{m}}^S=C\ell_{F,\mathfrak{m}}/c\ell_{F,\mathfrak{m}}(S)\ ,$$

le groupe des S-classes modulo $\mathfrak{m}$ au sens restreint, où $c\ell_{F,\mathfrak{m}}(S)$ désigne le sous-groupe de $C\ell_{F,\mathfrak{m}}$ engendré par les classes des idéaux premiers $\mathfrak{p}\in S$ et, pour les $\mathfrak{p}\in S\cap Pl_{F,\infty}$, par les classes des idéaux $(x_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}})$, où $x_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}}\in F^{\times}$ vérifie les conditions suivantes :

$$x_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}}\equiv 1 \bmod \mathfrak{m}\ ,$$

$$v_{\mathfrak{q}}(x_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}})=\delta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \text{ pour tout } \mathfrak{q}\in Pl_{F,\infty} \text{ de degré résiduel } 1$$

$(\delta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$=symbole de Kronecker)

(il s'agit là de la seule incidence de la représentation des classes de "diviseurs" par des idéaux). On peut toujours supposer que S ne contient pas de places "complexes".

Afin de rapprocher ces définitions des notations standard, donnons une table de concordance (où Pl_∞ désigne $Pl_{F,\infty}$):

notation	signification usuelle
$U_{F,\varnothing}=U_{F,(1)}=U_F$	groupe $F^{\times +}$ des éléments totalement positifs $\neq 0$
$E_F^{\varnothing}=E_F$	groupe des unités totalement positives
$E_F^{Pl_\infty}$	groupe E_F^{ord} des unités au sens ordinaire
$P_{F,(1)}=P_F$	groupe des idéaux principaux au sens restreint
$Cl_{F,(1)}=Cl_F$	groupe des classes d'idéaux au sens restreint
$Cl_{F,(1)}^{Pl_\infty}=Cl_F^{Pl_\infty}$	groupe Cl_F^{ord} des classes d'idéaux au sens ordinaire
$Cl_{F,\mathfrak{m}}^{Pl_\infty}$	groupe $Cl_{F,\mathfrak{m}}^{\mathrm{ord}}$ des classes modulo $\mathfrak{m}$ au sens ordinaire

Table (1.2).

On remarque que le groupe P_F^{ord} des idéaux principaux au sens ordinaire n'apparaît pas dans la table précédente; si l'on considère un système de $(x_\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p}\in Pl_{F,\infty}$ (relativement à $\mathfrak{m}=(1)$), on a:

$$P_F^{\mathrm{ord}} = \langle (x_\mathfrak{p})\rangle P_F\,;$$

de même, on a

$$P_{F,\mathfrak{m}}^{\mathrm{ord}} = \langle (x_\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}})\rangle P_{F,\mathfrak{m}}\,,$$

en prenant ici les $x_\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}\equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$ pour tout $\mathfrak{p}\in Pl_{F,\infty}$.

La correspondance du corps de classes peut se résumer dans le tableau suivant, dans lequel on indique les dénominations classiques:

groupe de classes	corps	signification usuelle
$Cl_{F,(1)}=Cl_F$	$F^{(1)}=H_F$	corps de classes de Hilbert (extension abélienne maximale de F, non ramifiée pour les idéaux premiers)
$Cl_{F,(1)}^{Pl_\infty}=Cl_F^{Pl_\infty}$	H_F^{ord}	corps de classes absolu de Hilbert (extension abélienne maximale de F, non ramifiée pour les idéaux premiers et Pl_∞-décomposée)
$Cl_{F,(1)}^S=Cl_F^S$	$F_S^{(1)}=F_S$	corps des S-classes (extension abélienne maximale de F, non ramifiée pour les idéaux premiers et S-décomposée)
$Cl_{F,\mathfrak{m}}$	$F^{(\mathfrak{m})}$	corps de rayon modulo $\mathfrak{m}$ au sens restreint (i. e. modulo $\mathfrak{m}\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_\infty}\mathfrak{p}$)
$Cl_{F,\mathfrak{m}}^{Pl_\infty}$	$F^{(\mathfrak{m})\mathrm{ord}}$	corps de rayon modulo $\mathfrak{m}$ au sens ordinaire (i. e. Pl_∞-décomposé)
$Cl_{F,\mathfrak{m}}^S$	$F_S^{(\mathfrak{m})}$	extension abélienne S-décomposée maximale de F dans $F^{(\mathfrak{m})}$

Table (1.3).

2. Calcul de $\#(C\ell_{K,\mathfrak{m}}/\mathscr{H})^G$.

Soit K/k une extension cyclique de corps de nombres, de degré n, et de groupe de Galois G dont on fixe un générateur σ.

Fixons également un idéal entier non nul $\mathfrak{m}$ de k et posons $T=\{\mathfrak{p}\in Pl_{k,0},\ \mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{m}\}$. Par abus, on désigne encore par $\mathfrak{m}$ et T les étendus de $\mathfrak{m}$ et T à K.

Enfin on fixe un sous-G-module $\mathscr{H}$ de $C\ell_{K,\mathfrak{m}}$.

(2.1) REMARQUES.

(i) Comme $\mathfrak{m}$ est un module de k, G opère sur $C\ell_{K,\mathfrak{m}}$ et donc il opère par conjugaison sur $\mathrm{Gal}\,(K^{(\mathfrak{m})}/K)$ via l'isomorphisme d'Artin.

(ii) Si $\mathscr{H}$ est un sous-G-module de $C\ell_{K,\mathfrak{m}}$ il lui correspond un sous-corps L de $K^{(\mathfrak{m})}$ galoisien sur k (et réciproquement), et G opère de même sur $\mathrm{Gal}\,(L/K)$.

(iii) Si l'on prend $\mathscr{H}=c\ell_{K,\mathfrak{m}}(S)$ pour $S\subseteq Pl_K$, $S\cap T=\emptyset$, on obtient $C\ell_{K,\mathfrak{m}}/\mathscr{H} \simeq C\ell^S_{K,\mathfrak{m}}$ et $L=K^{(\mathfrak{m})}_S$.

On se propose de calculer

$$\#(\mathrm{Gal}\,(L/K))^G = \#(C\ell_{K,\mathfrak{m}}/\mathscr{H})^G\ ,$$

ce qui équivaut, compte-tenu de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(L/K)^G \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(L/K)^{1-\sigma} \longrightarrow 1\ ,$$

à donner le degré sur K de la sous-extension maximale de L/K, abélienne sur k.

La méthode employée ici est très simple et diffère, logiquement, de celles utilisées en général pour les calculs de "classes ambiges généralisées", car elle n'utilise qu'une seule formule de classes ambiges (celle donnant $\#C\ell^G_K$ par exemple); l'idée (essentiellement la proposition (2.3)) généralise un cas particulier donné dans [**B**]. La formule obtenue (cf. théorème (2.7) et corollaires) recouvre et généralise toutes les formules connues (cf. [**G**], [**H-L**], [**J**] et la bibliographie très complète de cette dernière référence).

(2.2) Groupe de nombres associé à $\mathscr{H}$. Posons:

$$\tilde{\mathscr{H}} = \{h\in C\ell_{K,\mathfrak{m}},\ h^{1-\sigma}\in\mathscr{H}\}\ ;$$

il est clair que

$$(C\ell_{K,\mathfrak{m}}/\mathscr{H})^G = \tilde{\mathscr{H}}/\mathscr{H}\ . \tag{2.2.1}$$

On a les suites exactes:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \longrightarrow C\ell^G_{K,\mathfrak{m}} \longrightarrow \tilde{\mathscr{H}} \xrightarrow{1-\sigma} \tilde{\mathscr{H}}^{1-\sigma} \longrightarrow 1\ , \\ 1 \longrightarrow \mathscr{H}^* \longrightarrow \mathscr{H} \xrightarrow{N} N\mathscr{H} \longrightarrow 1\ , \end{array}\right. \tag{2.2.2}$$

où $\mathscr{H}^*$ est le noyau, dans $\mathscr{H}$, de la norme arithmétique $N=N_{K/k}$ définie par

$$N(c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{A})) = c\ell_{k,\mathfrak{m}}(N\mathfrak{A}),$$

ce qui a bien un sens puisque $NP_{K,\mathfrak{m}} \subseteq P_{k,\mathfrak{m}}$.

Soit $\mathscr{I}$ un sous-G-module de $I_{K,T}$ tel que

$$\mathscr{I}P_{K,\mathfrak{m}}/P_{K,\mathfrak{m}} = \mathscr{H}, \tag{2.2.3}$$

et pour lequel on a donc

$$N\mathscr{H} = N\mathscr{I}P_{k,\mathfrak{m}}/P_{k,\mathfrak{m}}.$$

On a la suite exacte:

$$1 \longrightarrow E_{k,\mathfrak{m}} \longrightarrow U_{k,\mathfrak{m}} \xrightarrow{\psi} P_{k,\mathfrak{m}} \longrightarrow 1;$$

on pose alors

$$\Lambda = \psi^{-1}(N\mathscr{I} \cap P_{k,\mathfrak{m}}); \tag{2.2.4}$$

on a évidemment:

$$E_{k,\mathfrak{m}} \subseteq \Lambda \subseteq U_{k,\mathfrak{m}}.$$

(2.3) PROPOSITION. *On a la suite exacte*:

$$1 \longrightarrow (E_{k,\mathfrak{m}}NU_{K,\mathfrak{m}}) \cap \Lambda \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{\varphi} \mathscr{H}^*/\tilde{\mathscr{H}}^{1-\sigma} \longrightarrow 1,$$

où $\varphi(x)=c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{A})\tilde{\mathscr{H}}^{1-\sigma}$ *pour* $\mathfrak{A}\in\mathscr{I}$ *tel que* $(x)=N\mathfrak{A}$.

Démonstration. Si $x\in\Lambda$, $\psi(x)=(x)\in P_{k,\mathfrak{m}}$ est de la forme $N\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\in\mathscr{I}$, et donc $c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{A})\in\mathscr{H}^*$; si $(x)=N\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\in\mathscr{I}$, il existe $\mathfrak{C}\in I_K$ tel que $\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{C}^{1-\sigma}$.

(2.3.1) LEMME. *On peut choisir* $\mathfrak{C}$ *dans* $I_{K,T}$.

En effet, l'idéal $\mathfrak{D}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}$ est dans $I_{K,T}$ et est de norme (1); par conséquent, on peut écrire

$$\mathfrak{D} = \prod_{\mathfrak{p}\notin T} \mathfrak{D}_\mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{D}_\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}^{v_\mathfrak{P}(\mathfrak{D})};$$

on a $N\mathfrak{D}_\mathfrak{p}=(1)$ pour tout $\mathfrak{p}$, auquel cas

$$\mathfrak{D}_\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_0^\omega, \qquad \mathfrak{P}_0|\mathfrak{p},$$

où ω est dans l'idéal d'augmentation de $\boldsymbol{Z}[G]$; on peut donc prendre $\mathfrak{C}$ dans $I_{K,T}$.

On a donc $c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{C}^{1-\sigma})=(c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{C}))^{1-\sigma}=c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1})\in c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathscr{I})=\mathscr{H}$, et par conséquent, $c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{C})\in\tilde{\mathscr{H}}$, ce qui fait que $(c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{C}))^{1-\sigma}\in\tilde{\mathscr{H}}^{1-\sigma}$. D'où la définition de φ.

Si $\mathfrak{A}\in\mathscr{I}$ est tel que $N\mathfrak{A}=(a)\in P_{k,\mathfrak{m}}$, $a\in U_{k,\mathfrak{m}}$, alors $a\in\Lambda$ et c'est un antécédent pour $c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{A})$; d'où la surjectivité de φ.

Calculons enfin $\operatorname{Ker}\varphi$: si $x\in\Lambda$, $(x)=N\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\in\mathscr{I}$, et si $c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{A})\in\tilde{\mathscr{H}}^{1-\sigma}$, il existe $\mathfrak{B}\in I_{K,T}$ tel que $c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{B})\in\tilde{\mathcal{H}}$ et $c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{A})=c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{B})^{1-\sigma}$; donc il existe $u\in U_{K,\mathfrak{m}}$ tel que

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}^{1-\sigma}(u),$$

et il vient

$$(x)=N\mathfrak{A}=(Nu),$$

soit

$$x=\varepsilon Nu\,,\qquad \varepsilon\in E_k^{\mathrm{ord}}\,;$$

comme x et Nu sont dans $U_{k,\mathfrak{m}}$ on a $\varepsilon\in E_{k,\mathfrak{m}}$ et x est bien dans $E_{k,\mathfrak{m}}NU_{K,\mathfrak{m}}$.

Réciproquement, si $x\in\Lambda$ est de la forme εNu, $\varepsilon\in E_{k,\mathfrak{m}}$, $u\in U_{K,\mathfrak{m}}$, on a $(x)=N(u)=N\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\in\mathcal{J}$, ce qui conduit à $\mathfrak{A}=(u)\mathfrak{B}^{1-\sigma}$, $\mathfrak{B}\in I_{K,T}$ (cf. (2.3.1)) ; comme $(u)\in P_{K,\mathfrak{m}}$, $c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{A})=(c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{B}))^{1-\sigma}\in\tilde{\mathcal{H}}^{1-\sigma}$ puisque $c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{B}^{1-\sigma})=c\ell_{K,\mathfrak{m}}(\mathfrak{A})\in\mathcal{H}$.

D'où la suite exacte.

On a alors (cf. (2.2.2)) :

$$(\tilde{\mathcal{H}}:\mathcal{H})=\frac{\#C\ell_{K,\mathfrak{m}}^G\#\tilde{\mathcal{H}}^{1-\sigma}}{\#N\mathcal{H}\#\mathcal{H}^*}$$
$$=\frac{\#C\ell_{K,\mathfrak{m}}^G}{\#N\mathcal{H}(\mathcal{H}^*:\tilde{\mathcal{H}}^{1-\sigma})}\,;$$

d'où

$$\#(C\ell_{K,\mathfrak{m}}/\mathcal{H})^G=\frac{\#C\ell_{K,\mathfrak{m}}^G}{\#N\mathcal{H}(\Lambda:(E_{k,\mathfrak{m}}NU_{K,\mathfrak{m}})\cap\Lambda)}\tag{2.4}$$
$$=\frac{\#C\ell_{K,\mathfrak{m}}^G}{\#N\mathcal{H}(\Lambda NU_{K,\mathfrak{m}}:E_{k,\mathfrak{m}}NU_{K,\mathfrak{m}})}\,.$$

Appliquons cette formule à :

$$\mathcal{H}_0=P_{K,T}/P_{K,\mathfrak{m}}\,;$$

$\mathcal{H}_0$ est le sous-groupe de $C\ell_{K,\mathfrak{m}}$ qui correspond au corps de Hilbert H_K ; on a alors :

$$(C\ell_{K,\mathfrak{m}}/\mathcal{H}_0)^G\cong C\ell_K^G\,.\tag{2.4.1}$$

On pose alors :

$$\mathcal{J}_0=P_{K,T}\,,$$

d'où

$$N\mathcal{J}_0=NP_{K,T}\quad\text{et}\quad N\mathcal{H}_0=NP_{K,T}P_{k,\mathfrak{m}}/P_{k,\mathfrak{m}}\,,$$

et

$$\Lambda_0=\{x\in U_{k,\mathfrak{m}},\ (x)\in NP_{K,T}\}$$
$$=(E_kNU_{K,T})\cap U_{k,\mathfrak{m}}\,.$$

Il vient alors (via (2.4), (2.4.1)) :

(2.4.2) $$\#C\ell^G_{K,\mathfrak{m}} = \#C\ell^G_K \# N\mathcal{H}_0((E_k NU_{K,T}) \cap U_{k,\mathfrak{m}} : E_{k,\mathfrak{m}} NU_{K,\mathfrak{m}}).$$

Ensuite, $N\mathcal{H}_0$ s'interprète au moyen de la suite exacte:

$$1 \longrightarrow E_k U_{k,\mathfrak{m}}/U_{k,\mathfrak{m}} \longrightarrow E_k NU_{K,T} U_{k,\mathfrak{m}}/U_{k,\mathfrak{m}} \longrightarrow NP_{K,T} P_{k,\mathfrak{m}}/P_{k,\mathfrak{m}} \longrightarrow 1$$

qui donne:

(2.4.3) $$\#N\mathcal{H}_0 = \frac{(E_k NU_{K,T} : (E_k NU_{K,T}) \cap U_{k,\mathfrak{m}})}{(E_k : E_{k,\mathfrak{m}})}.$$

D'où:

$$\#C\ell^G_{K,\mathfrak{m}} = \#C\ell^G_K \frac{(E_k NU_{K,T} : E_{k,\mathfrak{m}} NU_{K,\mathfrak{m}})}{(E_k : E_{k,\mathfrak{m}})}.$$

On a les inclusions:

$$NU_{K,\mathfrak{m}} \subseteqq E_{k,\mathfrak{m}} NU_{K,\mathfrak{m}} \subseteqq E_k NU_{K,T},$$

qui conduisent à:

$$\#C\ell^G_{K,\mathfrak{m}} = \frac{\#C\ell^G_K (E_k NU_{K,T} : NU_{K,\mathfrak{m}})}{(E_k : E_{k,\mathfrak{m}})(E_{k,\mathfrak{m}} NU_{K,\mathfrak{m}} : NU_{K,\mathfrak{m}})},$$

soit:

(2.4.4) $$C\ell^G_{K,\mathfrak{m}} = \frac{\#C\ell^G_K (E_k NU_{K,T} : NU_{K,T})(NU_{K,T} : NU_{K,\mathfrak{m}})}{(E_k : E_{k,\mathfrak{m}})(E_{k,\mathfrak{m}} NU_{K,\mathfrak{m}} : NU_{K,\mathfrak{m}})}.$$

La formule donnant $\#C\ell^G_K$ (cf. [**G**, th. 4.1, p. 26], [**J**, p. 177]) est

(2.4.5) $$\#C\ell^G_K = \frac{\#C\ell_k \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_{k,0}} e_{\mathfrak{p}}}{[K : k](E_k : E_k \cap NK^\times)},$$

où $e_{\mathfrak{p}}$ est l'indice de ramification de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de k, dans K/k, et où l'indice $(E_k : E_k \cap NK^\times)$ peut s'écrire $(E_k : E_k \cap NU_{K,T}) = (E_k NU_{K,T} : NU_{K,T})$ en raison du résultat plus général suivant:

(2.5) LEMME. *On a* $U_{k,T} \cap NK^\times = NU_{K,T}$.

Soit $a = Nx$, $a \in U_{k,T}$, $x \in K^\times$. D'après [**G**, Prop. 1.1, p. 9] puisque $a \in k^{\times +}$, on peut déjà choisir $x \in K^{\times +}$; ensuite, comme pour (2.3.1), on écrit $(x) = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_{k,0}} \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ et on remarque que la condition $N(x) \in I_{k,T}$ entraîne $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}^{1-\sigma}$, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}} \in I_K$, pour tout $\mathfrak{p} \in T$; on a donc

$$(x) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{1-\sigma}, \qquad \mathfrak{A} \in I_{K,T}, \qquad \mathfrak{B} = \prod_{\mathfrak{p} \in T} \mathfrak{B}_{\mathfrak{p}} \in I_K.$$

On peut alors trouver $\mathfrak{C} \in I_{K,T}$ dans la classe de $\mathfrak{B}$ modulo P_K; on a donc

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}(\alpha), \qquad \alpha \in K^{\times +},$$

d'où

$$(x) = \mathfrak{A}\mathfrak{C}^{1-\sigma}(\alpha)^{1-\sigma};$$

il suffit de poser $y=x\alpha^{\sigma-1}$ pour constater que $Ny=Nx=a$ avec $y\in U_{K,T}$. On a donc obtenu (via (2.4.4), (2.4.5)):

$$\#C\ell_{K,\mathfrak{m}}^{G}=\frac{\#C\ell_{k}\prod_{\mathfrak{p}\in P\ell_{k,0}}e_{\mathfrak{p}}(NU_{K,T}:NU_{K,\mathfrak{m}})}{[K:k](E_{k}:E_{k,\mathfrak{m}})(E_{k,\mathfrak{m}}NU_{K,\mathfrak{m}}:NU_{K,\mathfrak{m}})},$$

d'où (cf. (2.4)):

$$\#(C\ell_{K,\mathfrak{m}}/\mathcal{H})^{G}=\frac{\#C\ell_{k}\prod_{\mathfrak{p}\in P\ell_{k,0}}e_{\mathfrak{p}}(NU_{K,T}:NU_{K,\mathfrak{m}})}{[K:k]\#N\mathcal{H}(E_{k}:E_{k,\mathfrak{m}})(ANU_{K,\mathfrak{m}}:NU_{K,\mathfrak{m}})}. \tag{2.6}$$

Etudions l'indice $(NU_{K,T}:NU_{K,\mathfrak{m}})$; pour cela posons

$$\mathcal{U}_{K,T}=\prod_{\mathfrak{P}\in T}\mathcal{U}_{\mathfrak{P}}\subset\mathcal{K}_{T}^{\times}=\prod_{\mathfrak{P}\in T}K_{\mathfrak{P}}^{\times}, \tag{2.6.1}$$

où $\mathcal{U}_{\mathfrak{P}}$ est le groupe des unités du complété $K_{\mathfrak{P}}$ de K en $\mathfrak{P}$, et appelons $\mathcal{U}_{K,\mathfrak{m}}$ l'adhérence de $U_{K,\mathfrak{m}}$ dans $\mathcal{U}_{K,T}$; la norme N se prolonge par continuité à $\mathcal{K}_{T}^{\times}$ et les groupes $N\mathcal{U}_{K,T}$, $N\mathcal{U}_{K,\mathfrak{m}}$ sont des sous-groupes ouverts compacts de $\mathcal{U}_{k,T}$. Par conséquent

$$NU_{K,T}\longrightarrow N\mathcal{U}_{K,T}/N\mathcal{U}_{K,\mathfrak{m}}$$

est surjective; déterminons son noyau: soit Nu, $u\in U_{K,T}$, tel que $Nu=N\alpha_{\mathfrak{m}}$, $\alpha_{\mathfrak{m}}\in\mathcal{U}_{K,\mathfrak{m}}$; puisque $Nu=N\alpha_{\mathfrak{m}}$ et que l'algèbre galoisienne $\mathcal{K}_{T}$ est telle que $H^{1}(G,\mathcal{K}_{T})=0$, il existe $\beta\in\mathcal{K}_{T}^{\times}$ tel que

$$u=\alpha_{\mathfrak{m}}\beta^{1-\sigma}.$$

Approchons β par $v\in U_{K}(=K^{\times+})$ et $\alpha_{\mathfrak{m}}$ par $u_{\mathfrak{m}}\in U_{K,\mathfrak{m}}$; on a donc:

$$u=u_{\mathfrak{m}}v^{1-\sigma}\xi,\qquad \xi \text{ proche de 1 dans } \mathcal{K}_{T}^{\times},$$

et en posant

$$u'=uv^{\sigma-1}$$

il vient

$$u'=u_{\mathfrak{m}}\xi\in U_{K,\mathfrak{m}}$$

et

$$Nu'=Nu\in NU_{K,\mathfrak{m}}.$$

Ainsi le noyau cherché est $NU_{K,\mathfrak{m}}$ et il vient:

$$(NU_{K,T}:NU_{K,\mathfrak{m}})=\frac{(\mathcal{U}_{k,T}:N\mathcal{U}_{K,\mathfrak{m}})}{(\mathcal{U}_{k,T}:N\mathcal{U}_{K,T})} \tag{2.6.2}$$

$$=\frac{(\mathcal{U}_{k,T}:\mathcal{U}_{k,\mathfrak{m}})(\mathcal{U}_{k,\mathfrak{m}}:N\mathcal{U}_{K,\mathfrak{m}})}{(\mathcal{U}_{k,T}:N\mathcal{U}_{K,T})};$$

par le corps de classes local, on a

$$(\mathcal{U}_{k,T}:N\mathcal{U}_{K,T})=\prod_{\mathfrak{p}\in T}e_{\mathfrak{p}} \tag{2.6.3}$$

(produit des indices de ramification, dans K/k, des éléments de T).

(2.6.4) REMARQUE. L'indice $(\mathcal{U}_{k,\mathfrak{m}} : N\mathcal{U}_{K,\mathfrak{m}})$ ne dépend que de la ramification supérieure dans K/k et peut se calculer, en fonction de $\mathfrak{m}$, au moyen des formules normiques sur la filtration habituelle des groupes $\mathcal{U}_{\mathfrak{P}}$ et $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ (cf. [**S**, Chap. V]).

En revenant à (2.6), on obtient la formule générale suivante, compte tenu de l'expression classique

$$\#C\ell_{k,\mathfrak{m}} = \#C\ell_k \frac{(U_{k,T} : U_{k,\mathfrak{m}})}{(E_k : E_{k,\mathfrak{m}})}:$$

(2.7) THÉORÈME. *Soit K/k une extension cyclique, de groupe de Galois G, soit $\mathfrak{m}$ un idéal entier non nul de k et $T=\{\mathfrak{p}\in P\ell_{k,0},\ \mathfrak{p}\mid\mathfrak{m}\}$. On désigne par $e_{\mathfrak{p}}$ l'indice de ramification, dans K/k, de la place finie $\mathfrak{p}$ de k. Pour tout sous-G-module $\mathcal{H}$ de $C\ell_{K,\mathfrak{m}}$, on a*:

$$\#(C\ell_{K,\mathfrak{m}}/\mathcal{H})^G = \frac{\#C\ell_{k,\mathfrak{m}} \prod_{\mathfrak{p}\notin T} e_{\mathfrak{p}} (\mathcal{U}_{k,\mathfrak{m}} : N\mathcal{U}_{K,\mathfrak{m}})}{[K:k]\#N\mathcal{H}(\Lambda : \Lambda\cap NU_{K,\mathfrak{m}})},$$

$\Lambda=\{x\in U_{k,\mathfrak{m}},\ (x)\in N\mathcal{I}\}$, où $\mathcal{I}$ est n'importe quel sous G-module de $I_{K,T}$ tel que $N\mathcal{I}P_{k,\mathfrak{m}}/P_{k,\mathfrak{m}}=N\mathcal{H}$ (pour les principales notations voir (1.1) *et* (2.6.1)).

Ce résultat simplifie et généralise l'étude que nous avions menée dans [**G**]:

(2.8) COROLLAIRE ([**G**, th. 4.3, p. 41]). *Pour $T=\emptyset$, on a*:

$$\#(C\ell_K/\mathcal{H})^G = \frac{\#C\ell_k \prod_{\mathfrak{p}\in P\ell_{k,0}} e_{\mathfrak{p}}}{[K:k]\#N\mathcal{H}(\Lambda : \Lambda\cap NK^\times)}.$$

(2.9) COROLLAIRE ([**H-L**]). *Si $\mathfrak{m}$ n'est divisible par aucun idéal premier ramifié dans K/k, alors on a*:

$$\#(C\ell_{K,\mathfrak{m}}/\mathcal{H})^G = \frac{\#C\ell_{k,\mathfrak{m}} \prod_{\mathfrak{p}\in P\ell_{k,0}} e_{\mathfrak{p}}}{[K:k]\#N\mathcal{H}(\Lambda : \Lambda\cap NK^\times)}.$$

(2.10) COROLLAIRE. *Si $T=\emptyset$ et $\mathcal{H}=c\ell_K(S)$, où S est un ensemble fini de places de K, on a*:

$$\#(C\ell_K^S)^G = \frac{\#C\ell_k \prod_{\mathfrak{p}\in P\ell_{k,0}} e_{\mathfrak{p}}}{[K:k]\#c\ell_k(NS)(E_k^{NS} : E_k^{NS}\cap NK^\times)},$$

où $E_k^{NS}=\{x\in E_k^{S_0},\ v_{\mathfrak{p}}(x)\equiv 0 \bmod f_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p}\in S_0\}$, S_0 désignant l'ensemble des places de k en-dessous de S et $f_{\mathfrak{p}}$ le degré résiduel de $\mathfrak{p}$ dans K/k.

On notera que NS est constituté des $\mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{p}}}$ pour $\mathfrak{p}\in S_0$; en particulier, on rappelle que $N\mathfrak{P}=\mathfrak{p}^2$ pour une place à l'infini $\mathfrak{p}\in S_0$ non totalement décomposée dans K/k, pour tout $\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}$, et par conséquent les éléments de E_k^{NS} (les "NS-

unités") sont positifs en les places à l'infini $\mathfrak{p}\in S_0$ non totalement décomposées dans K/k.

Ce dernier corollaire fournit une expression différente de celle donnée par J.-F. Jaulent dans [**J**, p. 177], où l'on a:

$$\#(C\ell_K^S)^G = \frac{\#C_k^{S_0} \prod_{\mathfrak{p}\in S_0} d_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}\notin S_0} e_{\mathfrak{p}}}{[K:k](E_k^{S_0} : E_k^{S_0}\cap NK^\times)}, \tag{2.11}$$

où $d_{\mathfrak{p}}=e_{\mathfrak{p}}f_{\mathfrak{p}}$ est l'ordre du groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$ dans K/k, formule qui suppose que S contienne toutes les places de K au-dessus de S_0.

Nous laissons au lecteur le soin de voir, à titre d'exercice, que l'on passe d'une formule à l'autre par des considérations élémentaires.

Bibliographie

[B] Th. Berthier, Classes d'idéaux des corps abéliens (en préparation).

[G] G. Gras, Sur les l-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **23, 3** (1973), 1-48; **23, 4** (1973), 1-44.

[H-L] A. Harnchoowong and W.-C. W. Li, Sylow subgroups of ideal class group with moduli, J. Number Theory, **36** (1990), 354-372.

[J] J.-F. Jaulent, L'arithmétique des l-extensions (thèse), Publ. Math. Fac. Sci. Besançon (Théorie des Nombres), Années 1984/85-1985/86 (1986).

[S] J.-P. Serre, Corps locaux, Hermann, Paris, 1968.

Georges GRAS
U.F.R. Sciences et Techniques
Laboratoire de Mathématiques
U.R.A. au C.N.R.S. 0741
F-25030 Besançon Cedex
France