J. Math. Soc. Japan
Vol. 46, No. 1, 1994

Estimation des fonctions d'aire sur les variétés riemanniennes à courbure non positive

par Noël LOHOUE

(Reçu le 17 déc., 1991)
(Revisé le 1 octobre, 1992)

Dans notre travail [2] "Estimation des fonctions de Littlewood-Paley-Stein sur les variétés riemanniennes à courbure non positive" nous nous sommes occupés des estimées d'une famille à un paramétre g_α de fonctions de Littlewood-Paley-Stein, qui nous ont conduit à l'étude des fonctions d'aire. Cette introduction à la fonction d'aire n'avait été qu'à peine esquissée et nous n'avions obtenu de majoration de normes que pour $p \geqq 2$ et sous certaines hypothèses sur la courbure.

Le but de ce travail est de poursuivre notre étude plus en détail et de la compléter.

Décrivons un peu le genre de résultat que l'on peut obtenir, par exemple dans le cas d'un espace symétrique de rang un, qu'on note M. Si P_t est le noyau de Poisson au-dessus de M, pour toute fonction $f: M \to \boldsymbol{C}$, C^∞ à support compact, on note $f(x, t) = \int_M f(y) P_t(x, y) d\sigma(y)$ où $d\sigma$ est la mesure riemannienne sur M, $\nabla_x f$ le gradient riemannien de f en la variable x.

On s'intéresse à la fonction

$$S_\alpha^2(f)(x) = \int_{\delta(x, y) \leq \alpha t} dt |B_y(t)|^{-1} \left(\|\nabla_x f\|^2(y, t) + \left| \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) \right|^2 \right) d\sigma(y)$$

où $|B_y(t)|$ est le volume riemannien de la boule de centre y et de rayon t. On désire prouver des estimations du style

$$\|S_\alpha(f)\|_p \simeq \|f\|_p$$

où $1 < p < \infty$ dépend éventuellement de α.

La fonction S_α dans le cas de $\boldsymbol{R}$ a été introduite par Lusin pour formuler des énoncés du théorème de Fatou.

Dans le cas des espaces euclidiens elle est étudiée en long et en large au chapitre VII de [7] pour démontrer des théorèmes de multiplications à la Hörmander et caractériser les classes de Hardy H^p à la Stein et Weiss.

Fixons les notations et les énoncés des résultats.

Notations et énoncés des résultats.

On note M une variété riemannienne de dimension n, simplement connexe, complète, à courbure non positive. On note $d\sigma$ l'élément de volume induit par la structure riemannienne. Si $1<p<\infty$, on note, pour toute fonction $f: M\to \boldsymbol{C}$, mesurable

$$\|f\|_p^p = \int_M |f(x)|^p d\sigma(x).$$

$L^p(M)$ est le complété de l'espace $\mathcal{D}(M)$ des fonctions C^∞ à support compact pour la norme $\| \ \|_p$. On pose:

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} |f(x)|.$$

$L^\infty(M)$ est l'espace classique pour la norme $\| \ \|_\infty$; si $1\leqq p<\infty$ on note p' l'exposant conjugué de p, $1/p+1/p'=1$. Δ désigne le laplacien sur M et $\Delta_0=-\Delta$, ∇ est l'opérateur gradient qui transforme les fonctions C^∞ en champs de vecteurs. $\mathcal{P}_t$ désigne la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur M, P_t le noyau de Poisson qui se déduit de $\mathcal{P}_t$ par la formule

$$P_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathcal{P}_{t^2/4u}(x, y)e^{-u}u^{-1/2}du.$$

Par la suite on suppose que la courbure de M est bornée, ainsi que ses deux premières dérivées covariantes; on supposera dans l'énoncé du théorème que

$$\operatorname*{Inf}_{\|f\|_2=1} \langle \Delta_0 f, f\rangle = \mu.$$

Soit $x\in M$ et soit $0<t<\infty$ un nombre réel, on note $B_x(t)$ la boule géodésique de centre x et de rayon t, $|B_x(t)|$ le volume riemannien de $B_x(t)$. On notera $\mathbf{1}_t$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, t]$ de la droite numérique.

Soit $\alpha>0$ et soit $f: M\to \boldsymbol{C}$ une fonction C^∞ à support compact, on note

$$f(x, t) = \int_M P_t(x, y)f(y)d\sigma(y) \text{ son intégrale de Poisson}$$

$$S_\alpha(f)(x) = \left\{\int_{\delta(x,y)\leqq \alpha t} t\,dt\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 + \|\nabla_y f(y, t)\|^2\right\}|B_y(t)|^{-1}d\sigma(y)\right\}^{1/2}$$

où $\delta(x, y)$ désigne la distance géodésique de x à y.

Le premier énoncé que l'on veut prouver est le suivant:

THEOREME I. *On suppose que* $\mu>0$. *On suppose,* $\alpha<1$, *que*

$$\sup_{x,y} |B_x(t)|\,|B_y(t)|^{-1} < C.$$

On pose

$$e^{-\gamma_x(t)} = |B_x(t)|^{-1}|B_x(\alpha t)|.$$

Alors il existe une constante C telle que si

$$\sup_x \int_{1000}^{+\infty} e^{-\gamma x(t)} e^{2\alpha C(\theta)t} dt < \infty$$

où $C(\theta)$ est une constante que l'on va déterminer

$$\|S'_\alpha(f)\|_p \leqq C\|f\|_p$$

pour tout $1<p<\infty$.

Alors si $2\leqq p$ et si M est un espace symétrique

$$\|S_\alpha(f)\|_p \leqq C\|f\|_p$$

$1<\alpha<2+4/\sqrt{pp'}$

$$\|f\|_{p'} \leqq C\|S_\alpha(f)\|_{p'}.$$

Démonstration du théorème I.

Nous allons considérer la quantité:

$$\int_M \int_0^\infty t|B_y(t)|^{-1}\|\nabla f(y, t)\|^2 \mathbf{1}_{\alpha t\circ\delta}(x, y) d\sigma(y) dt$$

et nous occuper de:

$$\int_M \int_{1000}^\infty t|B_y(t)|^{-1}\|\nabla f(y, t)\|^2 \mathbf{1}_{\alpha t\circ\delta}(x, y) d\sigma(y) dt.$$

D'après l'inégalité de Harnack, si l'on a supposé $f\geqq 0$ ce que nous ferons

$$\|\nabla f(y, t)\| \leqq Cf(y, t) \qquad t\geqq 1000.$$

D'autre part la même inégalité de Harnack montre que

$$|f(y, t)| \leqq e^{C\delta(x, y)} f(x, t)$$

où C est une constante positive supérieure à 1. Alors:

$$\int_M \int_{1000}^\infty t|B_y(t)|^{-1}\|\nabla f(y, t)\|^2 \mathbf{1}_{\alpha t\circ\delta}(x, y) d\sigma(y) dt$$

$$\leqq C\int_{1000}^\infty t\int_{\delta(x, y)\leqq \alpha t} |B_y(t)|^{-1} e^{2C\delta(x, y)} d\sigma(y) f^2(x, t) dt$$

$$\leqq C\int_{1000}^\infty t|B_y(t)|^{-1}|B_x(\alpha t)| e^{2\alpha Ct} f^2(x, t) dt$$

$$\leqq Cf^{**2}(x)\int_{1000}^\infty t|B_y(t)|^{-1}|B_x(\alpha t)| e^{2\alpha Ct} dt$$

où

$$f^{**}(x) = \sup_{t>0} |f(x, t)| \leqq C\int_{1000}^\infty te^{-\gamma x(t)} e^{2\alpha Ct} dt\, f^{2**}(x).$$

Il s'en suit que:

$$\left\|\left\{\int_M\int_{1000}^{\infty} t|B_y(t)|^{-1}\|\nabla f(y,t)\|^2 \mathbf{1}_{\alpha t}\circ\delta(x,y)d\sigma(y)dt\right\}^{1/2}\right\|_p \leqq C\|f^{**}\|_p \leqq C\|f\|_p .$$

Le lemme principal reste le suivant:

LEMME 1. *Soit*

$$h^2(x)=\int_0^{1000} t\int_{\delta(x,y)\leqq\alpha t}|B_y(t)|^{-1}\|\nabla f(y,t)\|^2 d\sigma(y)dt .$$

Alors:

$$\|h\|_p \leqq C\|f\|_p, \qquad \textit{pour tout } 1<p<\infty .$$

Dégageons d'abord la partie élémentaire du lemme:

LEMME 2. *Soit β choisi comme dans* [3], *c'est-à-dire tel que*

i) *pour tout x dans M le laplacien lu en coordonnées exponentielles en x sur la boule $B_x(16\beta)$ soit uniformément elliptique avec des constantes d'ellipticités contrôlées uniformément en x.*

ii) *Les coefficients du laplacien dans ces coordonnées sont bornées ainsi que ces deux premières dérivées uniformément en x sur $B_x(16\beta)$.*

iii) *Il existe une famille $\{P_i\}_{0=1}^{\infty}$ de points de M telle que $\bigcup_{i=1}^{\infty}B_{P_i}(\beta/2)=M$ et pour tout $x\in M$ le cardinal de l'ensemble de i tel que x appartienne à B_{P_i} est borné indépendamment de x. (Un tel choix est possible, voir* [3].)

Soit

$$h_1^2(x)=\int_{\alpha\beta}^{1000} t\int_{\delta(x,y)\leqq\alpha t}|B_y(t)|^{-1}\|\nabla f(y,t)\|^2 d\sigma(y)dt .$$

Alors pour tout $1<p<\infty$, il existe $C(p,\alpha)$ telle que

$$\|h_1\|_p \leqq C(p,\alpha)\|f\|_p .$$

Preuve du lemme. Puisque f est positive, que $r\geqq\alpha\beta$, il existe une constante $C(\alpha,\beta)>0$ telle que $\|\nabla f(y,t)\|\leqq Cf(y,t)$ d'après l'inégalité de Harnack (pour une argumentation analogue, voir [2] page 510) et si $\alpha\beta\leqq t\leqq 1000$, $t\|\nabla f(y,t)\| \leqq 1000Cf(y,t)=C_1f(y,t)$; par ailleurs la même inégalité montre que:

$$|f(y,t)| \leqq Cf(x,t)$$

et

$$f(x,t)\leqq f^{**}(x).$$

Il s'en suit que:

$$\int_{\alpha\beta}^{1000}\int_{\delta(x,y)\leqq\alpha t} t|B_y(t)|^{-1}\|\nabla f(y,t)\|^2 d\sigma(y)dt \leqq Cf^{**2}(x)$$

et

$$\|h_1\|_p \leqq C\|f^{**}\|_p \leqq C\|f\|_p.$$

Le lemme suivant qui permet de terminer la preuve du lemme 2 est:

LEMME 3. *Pour tout* $1<p<\infty$, *il existe une constante* $C(p, \alpha)$ *telle que*

$$\left\|\left\{\int_{\delta(x,y)\leq\alpha t\leq\alpha\beta}\|\nabla f(y, t)\|^2 t|B_y(t)|^{-1}dtd\sigma(y)\right\}^{1/2}\right\|_p \leqq C(p, \alpha)\|f\|_p.$$

Preuve du lemme. Soit $\varphi_0: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ une fonction C^∞ qui vaut 1 sur $[-\beta, \beta]$ à support dans $[-1, 1]$. β sera choisi après

$$\begin{aligned} f(y, t) &= \int_M P_t(y, z)f(z)d\sigma(z) \\ &= \int_M P_t(y, z)\varphi_0\circ\delta^8(y, z)f(z)d\sigma(z) \\ &\quad + \int_M P_t(y, z)[1-\varphi\circ\delta^8(y, z)]f(z)d\sigma(z) = A(y, t)+B(y, t). \end{aligned}$$

On va étudier $B(y, t)$; on pose $\psi=1-\varphi$ où $\varphi=\varphi_0\circ\delta^8$

$$\nabla B(y, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}B(y, t), \nabla_y B(y, t)\right)$$

et

$$\|\nabla B\|^2(y, t) = \left|\frac{\partial}{\partial t}B(y, t)\right|^2 + \|\nabla_y B(y, t)\|^2.$$

On a le lemme suivant:

LEMME 3'. *Soit*

$$h_1^2(x) = \int_0^{1000} t|B_y(t)|^{-1}\int_{\delta(x,y)\leq\alpha t}|\nabla B(y, t)|^2 d\sigma(y)dt.$$

Alors pour tout $1<p<\infty$, *il existe une constante* C *telle que*

$$\|h\|_p \leqq C\|f\|_p.$$

Preuve du lemme. Soit

$$h_2^2(x) = \int_\beta^{1000} t|B_y(t)|^{-1}\int_{\delta(x,y)\leq\alpha t}\|\nabla B(y, t)\|^2 d\sigma(y)dt.$$

Alors comme

$$t\|\nabla f(y, t)\| \leqq C|f(y, t)| \qquad \text{si} \quad \beta \leqq t \leqq 1000$$

il est facile de voir, d'après l'inégalité de Harnack que

$$h_2^2(x) \leqq Cf^{**}(x)^2.$$

Ce qui prouve que

$$\|h_2\|_p \leqq C\|f\|_p.$$

Quant à $h(x)$ examinons de plus près les termes qu'elle comporte.

Soit

$$L_1(y, t) = \int_0^{t^2/4}\int_M \mathcal{P}_{t^2/(4u)}(y, z)\psi(y, z)f(z)e^{-u}u^{-1/2}dt\,d\sigma(z)$$

$$= \frac{t}{2}\int_M\int_0^1 \mathcal{P}_{1/v}(y, z)e^{-t^2v}/4\psi(y, z)f(z)du\,d\sigma(z)$$

$$= \frac{t}{2}\int_M\int_1^\infty \mathcal{P}_s(y, z)e^{-t^2/(4s)}s^{-3/2}\psi(y, z)f(z)ds\,d\sigma(z).$$

Soit $K_0(x, v)=C_n\varphi_0\circ\delta^2(x, v)/[\delta(x, v)]^{n-2}$ où C_n est une constante; on a vu dans [3] qu'il existe un noyau $K_1(x, v)$ tel que:

$$\mathcal{P}_s(x, v) = \int_M K_0(x, u)\Delta_u\mathcal{P}_s(u, v)d\sigma(u)+\int_M K_1(x, v)\mathcal{P}_s(u, v)d\sigma(u).$$

Alors

$$L_1(y, t) = \frac{t}{2}\int_M\int_1^\infty\int_M K_0(y, u)\Delta_u\mathcal{P}_s(u, z)\psi(y, z)f(y)e^{-t^2/(4s)}s^{-3/2}d\sigma(z)d\sigma(u)ds$$

$$+\frac{t}{2}\int_M\int_M\int_1^\infty K_1(y, u)\mathcal{P}_s(u, z)\psi(y, z)f(z)e^{-t^2/(4s)}s^{-3/2}d\sigma(z)d\sigma(u)ds$$

$$\frac{\partial}{\partial t}L_1(y, t) = \frac{1}{2}\int_M\int_M\int_1^\infty K_0(y, u)\Delta_u\mathcal{P}_s(u, z)\psi(y, z)f(z)e^{-t^2/(4s)}s^{-3/2}d\sigma(z)d\sigma(u)ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_M\int_M\int_1^\infty K_1(y, u)\mathcal{P}_s(u, z)\psi(y, z)f(z)e^{-t^2/(4s)}s^{-3/2}d\sigma(z)d\sigma(u)ds$$

$$-\frac{t^2}{4}\int_M\int_M\int_1^\infty K_0(y, u)\Delta_u\mathcal{P}_s(u, z)\psi(y, z)f(z)e^{-t^2/(4s)}s^{-5/2}d\sigma(z)d\sigma(u)ds$$

$$-\frac{t^2}{4}\int_M\int_M\int_1^\infty K_1(y, u)\mathcal{P}_s(u, z)\psi(y, z)f(z)e^{-t^2/(4s)}s^{-5/2}d\sigma(z)d\sigma(u)ds$$

$$= \frac{t^2}{8}\int_M\int_M\int_1^\infty \mathcal{P}_s(u, z)e^{-t^2/(4s)}s^{-7/2}ds\,K_0(y, u)\psi(y, z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)$$

$$+\frac{3t}{4}\int_M\int_M\int_1^\infty K_0(y, u)\mathcal{P}_s(u, z)e^{-t^2/(4s)}s^{-7/2}\psi(y, z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)ds$$

$$+\frac{t}{2}\int_M\int_M \mathcal{P}_1(u, z)K_0(y, u)\psi(y, z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)$$

$$-\frac{t^2}{8}\int_M\int_M K_0(y, u)\mathcal{P}_1(u, z)\psi(y, z)d\sigma(z)d\sigma(u)$$

$$-\frac{3t^3}{16}\int_M\int_M\int_1^\infty K_0(y, u)\mathcal{P}_s(u, z)e^{-t^2/(4s)}s^{-7/2}\psi(y, z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)ds$$

$$-\frac{t^4}{16}\int_M\int_M\int_1^\infty \mathcal{P}_s(u, z)e^{-t^2/(4s)}s^{-5/2}ds\,K_0(y, u)\psi(y, z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)ds$$

$$+\int_M\int_M\int_1^\infty K_1(y,\ u)\Big(\frac{1}{2}-\frac{t^2}{4}\Big)\cdot\mathcal{P}_s(u,\ z)\psi(y,\ z)f(z)e^{-t^2/(4s)}s^{-3/2}d\sigma(z)d\sigma(u)ds\,.$$

On remarque, d'après la construction de K_0 et de K_1, qu'il existe des constantes telles que:

$$K_1(x,\ y)\leqq C_1G_\lambda(x,\ y)\qquad \|\nabla K_0(x,\ y)\|\leqq C_3G_\lambda(x,\ y)$$

$$K_0(x,\ y)\leqq C_2G_\lambda(x,\ y)\qquad \|\nabla K_1(x,\ y)\|\leqq C_4G_\lambda(x,\ y)$$

où $G_\lambda(x,\ y)$ désigne la résolvante d'indice $\lambda>0$ de Δ, $G_\lambda=(\Delta-\lambda)^{-1}$. D'autre part:

$$\begin{aligned}
&\nabla_yL_1(y,\ t)\\
&=\frac{t}{2}\int_M\int_M\int_1^\infty s^{-3/2}\nabla_yK_0(y,\ u)\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{P}_s(u,\ z)\psi(y,\ z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)e^{-t^2/(4s)}ds\\
&\quad+\frac{t}{2}\iint_M\int_1^\infty ds\,s^{-3/2}K_0(y,\ u)\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{P}_s(u,\ z)\nabla_y\psi(y,\ z)f(z)e^{-t^2/(4s)}d\sigma(z)d\sigma(u)\\
&\quad+\frac{t}{2}\iint_M\int_1^\infty\nabla_yK_1(y,\ u)\mathcal{P}_s(u,\ z)\psi(y,\ z)f(z)e^{-t^2/(4s)}s^{-3/2}d\sigma(y)d\sigma(z)ds\\
&\quad+\frac{1}{2}\iint_M\int_1^\infty K_1(y,\ u)\mathcal{P}_s(u,\ z)\nabla_y\psi(y,\ z)f(z)e^{-t^2/(4s)}s^{-3/2}d\sigma(y)d\sigma(z)ds\\
&=\frac{t^2}{8}\int_M\int_M\int_1^\infty\mathcal{P}_s(u,\ z)e^{-t^2/(4s)}s^{-7/2}ds\nabla_yK_0(y,\ u)\psi(y,\ z)f(z)d\sigma(u)d\sigma(z)\\
&\quad+\frac{t}{2}\int_M\int_M\nabla_yK_0(y,\ u)\mathcal{P}_1(u,\ z)\psi(y,\ z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)\\
&\quad+\int_1^\infty\int_M\int_M\Big(\frac{t^2}{8}s^{-7/2}+\frac{3t}{4}s^{-5/2}\Big)e^{-t^2/(4s)}K_0(y,\ u)\mathcal{P}_s(u,\ z)\nabla_y\psi(y,\ z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)ds\\
&\quad+\frac{t}{2}\int_M\int_M K_0(y,\ u)\mathcal{P}_1(u,\ z)\nabla_y\psi(y,\ z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)\\
&\quad+\frac{t}{2}\iint_M\int_1^\infty\mathcal{P}_s(u,\ z)e^{-t^2/(4s)}s^{-3/2}\nabla_yK_1(y,\ u)\psi(y,\ z)f(z)d\sigma(y)d\sigma(z)ds\\
&\quad+\frac{1}{2}\iint_M\int_1^\infty K_1(y,\ u)\mathcal{P}_s(u,\ z)\nabla_y\psi(y,\ z)f(z)e^{-t^2/(4s)}s^{-3/2}d\sigma(y)d\sigma(z)ds\,.
\end{aligned}$$

La remarque (*) permet d'estimer les différents termes:

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial}{\partial t}L_1\Big|(y,\ t)\leqq p(t)\iint_M G_\lambda(y,\ u)\int_1^\infty\mathcal{P}_s(u,\ z)f(z)s^{-3/2}ds\,d\sigma(z)d\sigma(u)\\
+\iint_M G_\lambda(y,\ u)\mathcal{P}_1(u,\ z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)
\end{aligned}$$

où $p(t)$ est un polynôme en t

$$\int_M G_\lambda(y, u)\mathcal{P}_s(u, z)d\sigma(u) = \int_s^\infty \mathcal{P}_{s'}(y, z)ds'$$

et

$$\int_M G_\lambda(y, u)\int_1^\infty \mathcal{P}_s(u, z)s^{-3/2}ds\,d\sigma(u) \leqq \int_1^\infty \mathcal{P}_{s'}(y, z)\frac{ds'}{(s')^{3/2}}.$$

D'après Harnack il existe une constante C telle que

$$P_{\theta t}(y, z) \leqq CP_{(t+1)\theta}(x, z)$$

avec $0<\theta<1$, $\delta(x, y)\leqq\beta$

$$\int_1^\infty \mathcal{P}_{s'}(y, z)\frac{ds'}{(s')^{3/2}} = \int_{1/\theta}^\infty \mathcal{P}_{\theta s'}(y, z)\frac{ds'}{(s')^{3/2}}$$

$$\leqq C\int_{1/\theta}^\infty \mathcal{P}_{(s'+1)\theta}(x, z)\frac{ds'}{(s')^{3/2}} = C\Big(\mathcal{P}_\theta\circ\int_1^\infty \mathcal{P}_{s'}\frac{ds'}{(s')^{3/2}}\Big)(x, z) = K_0'(x, z).$$

De même

$$\int_M G_\lambda(y, u)\mathcal{P}_1(u, z)d\sigma(u) \leqq c\int_1^\infty \mathcal{P}_t(y, z)e^{-t\lambda}dt$$

$$\leqq C\Big(\mathcal{P}_\theta\circ\int_1^\infty \mathcal{P}_t e^{-t\lambda}dt\Big)(y, z) = K_0''(x, z).$$

On en déduit que:

$$\left|\frac{\partial L_1}{\partial t}(y, t)\right| \leqq \int_M K_0'(x, z)f(z)d\sigma(z)+\int_M K_0''(x, z)f(z)d\sigma(z)$$

et

$$\Big(\int_0^\beta\Big(\int_{\delta(x, y)\leqq\alpha t}\left|\frac{\partial L_1}{\partial t}\right|^2(y, t)d\sigma(y)\Big)t|B(t)|^{-1}dt\Big)^{1/2} \leqq C\int_M (K_0'+K_0'')(x, z)f(z)d\sigma(z).$$

Comme K_0' et K_0'' donnent lieu à des opérateurs bornés sur $L^p(M)$, $1\leqq p\leqq\infty$, on en déduit que:

$$\left\|\left\{\int_{\delta(x, y)\leqq\alpha t\leqq\alpha\beta}\left|\frac{\partial L_1}{\partial t}\right|^2 d\sigma(y)dt\right\}^{1/2}\right\|_p \leqq C\|f\|_p.$$

Par ailleurs:

$$\|\nabla_y L_1(y, t)\| \leqq \frac{t^2}{8}\iint_M\int_1^\infty \mathcal{P}_s(u, z)s^{-7/2}G_\lambda(y, u)\psi(y, z)f(z)d\sigma(u)d\sigma(z)ds$$

$$+\frac{t}{2}\iint_M G_\lambda(y, u)\mathcal{P}_1(u, z)\psi(y, z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u)$$

$$+p_1(t)\iint_M\int_1^\infty G_\lambda(y, u)\mathcal{P}_s(u, z)\psi(y, z)f(z)d\sigma(z)s^{-5/2}ds\,d\sigma(u)$$

$$+p_2(t)\iint_M\int_1^\infty G_\lambda(y,\ u)\mathcal{P}_s(u,\ z)\psi(y,\ z)f(z)s^{-3/2}d\sigma(z)d\sigma(u)ds$$

où p_1 et p_2 sont des polynômes en t.

Par conséquent

$$\|\nabla_y L_1(y,\ t)\| \leqq p(t)\iint_M\int_1^\infty \mathcal{P}_s(u,\ z)G_\lambda(y,\ u)f(z)s^{-3/2}d\sigma(u)d\sigma(z)ds$$

$$+\frac{t}{2}\iint_M G_\lambda(y,\ u)\mathcal{P}_1(u,\ z)f(z)d\sigma(z)d\sigma(u).$$

On procède comme précédemment pour les estimations. Ce qui prouve que

$$\left\|\left\{\int_{\delta(x,\ y)\leq\alpha t\leq\alpha\beta}|B(t)|^{-1}\|\nabla L_1\|^2(y,\ t)d\sigma(y)t\,dt\right\}^{1/2}\right\|_p \leqq C(p)\|f\|_p, \qquad 1<p<\infty.$$

On considère maintenant $L_2(y,\ t)$ qui vaut:

$$L_2(y,\ t)=\int_{t^2/4}^\infty\int_M \mathcal{P}_{t^2/(4u)}(y,\ z)f(z)d\sigma(z)e^{-u}u^{-1/2}du$$

$$=\frac{t}{2}\int_M\int_1^\infty u^{-1/2}e^{-t^2/(4u)}\mathcal{P}_{1/u}(u,\ z)\psi(y,\ z)f(z)d\sigma(z)du$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial t}(y,\ t)=\frac{1}{2}\int_M\int_0^1 e^{-t^2/(4s)}\mathcal{P}_s(y,\ z)\psi(y,\ z)f(z)\frac{ds}{s^{3/2}}d\sigma(z)$$

$$+\frac{t^3}{8}\int_M\int_0^1 e^{-t^2/(4s)}\mathcal{P}_s(y,\ z)\psi(y,\ z)f(z)\frac{ds}{s^{7/2}}d\sigma(z).$$

Puisque $\delta(x,\ y)\geqq\beta^2/4$, $\mathcal{P}_s(y,\ z)\leqq e^{-\delta^2(y,\ z)/(8s)}$. Comme la courbure sectionnelle de M est minorée par $-k^2$ d'après les calculs faits dans [2]:

$$Ce^{-(k-\varepsilon)\delta(x,\ y)}\leqq\int_1^\infty \mathcal{P}_s^{-k^2}\circ\delta(y,\ z)\frac{ds}{s^{7/2}}\leqq\int_1^\infty \mathcal{P}_s(y,\ z)\frac{ds}{s^{7/2}}.$$

Alors

$$\left|\int_M\int_0^1\frac{e^{-t^2/(4s)}}{s^{3/2}}\mathcal{P}_s(y,\ z)f(z)\frac{ds}{s^{3/2}}d\sigma(z)\right|$$

$$\leqq\int_M e^{-\delta^2(y,\ z)/8}f(z)d\sigma(z)\leqq\int_M f(z)\int_1^\infty \mathcal{P}_s(y,\ z)\frac{ds}{s^{7/2}}d\sigma(z).$$

Et l'argument précédent montre que:

$$\left\|\left\{\int_{\delta(x,\ y)\leq\alpha t\leq\alpha\beta}t|B(t)|^{-1}\left|\frac{\partial L_2}{\partial t}(y,\ t)\right|^2 d\sigma(y)dt\right\}^{1/2}\right\|_p\leqq C\|f\|_p.$$

D'autre part:

$$\|\nabla_y L_2(y, t)\| \leqq \frac{t}{2}\left\|\int_M\int_0^1 e^{-t^2/(4s)}\nabla_y \mathcal{P}_s(y, z)\psi(y, z)f(z)d\sigma(z)\frac{ds}{s^{5/2}}\right\|$$
$$+\frac{t}{2}\left\|\int_M\int_0^1 e^{-t^2/(4s)}\mathcal{P}_s(y, z)\nabla_y\psi(y, z)f(z)d\sigma(z)\frac{ds}{s^{3/2}}\right\|.$$

Mais $\|\nabla_y \mathcal{P}_t(y, z)\| \leqq Ce^{-\delta^2(y, z)/(8s)}$ si $\delta(z, y) \geqq \beta$. Il s'en suit que:

$$\|\nabla_y L_2(y, t)\| \leqq Ct\int_M\left(\int_1^\infty \mathcal{P}_s(y, z)\frac{ds}{s^{7/2}}\right)f(z)d\sigma(z).$$

Ce qui prouve encore que:

$$\left\|\left(\int_{\delta(x, y)\leq at\leq\alpha\beta} t|B(t)|^{-1}\|\nabla_y L_2\|^2(y, t)d\sigma(y)dt\right)^{1/2}\right\|_p \leqq C\|f\|_p$$

et termine la preuve de l'inégalité:

$$\left\|\left(\int_{\delta(x, y)\leq at\leq\alpha\beta} t|B(t)|^{-1}\|\nabla B(y, t)\|^2 d\sigma(y)dt\right)^{1/2}\right\|_p \leqq C\|f\|_p.$$

On veut estimer la norme de:

LEMME 4.

$$\left\|\left\{\int_{\delta(x, y)\leq at} t|B_y(t)|^{-1}\|\nabla A(y, t)\|^2 d\sigma(y)dt\right\}^{1/2}\right\|_p \leqq C\|f\|_p.$$

Pour cela considérons un point 0 et la boule B_0 de centre 0 et de rayon β dont nous notons $\mathbf{1}_\beta$ la fonction caractéristique; on veut estimer:

$$\int_M \mathbf{1}_\beta(x)\left\{\int_{\delta(x, y)\leq at} t|B_y(t)|^{-1}\|\nabla A(y, t)\|^2 d\sigma(y)dt\right\}^{p/2} d\sigma(x).$$

Par définition de $A(y, t)$, si $x \in B_0$,

$$\mathbf{1}_\beta(x)\int_{\delta(x, y)\leq at} t|B_y(t)|^{-1}\|\nabla A(y, t)\|^2 d\sigma(y)dt$$
$$=\mathbf{1}_\beta(x)\int_{\delta(x, y)\leq at} t|B_y(t)|^{-1}\left\|\nabla\int_M P_t(y, z)\varphi(y, z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)\right\|^2 d\sigma(y)dt$$

où $\mathbf{1}_{2\beta}$ est la fonction caractéristique de la boule de centre 0 et de rayon 2β. Nous sommes donc amenés à étudier la fonction

$$h_4(y, t) = \int_M P_t(y, z)\varphi(y, z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z).$$

Mais comme précédemment:

$$P_t(y, z) = \int_{t^2/4}^\infty \mathcal{P}_{t^2/(4u)}(y, z)e^{-u}u^{-1/2}du + \int_0^{t^2/4} \mathcal{P}_{t^2/(4u)}(y, z)e^{-u}u^{-1/2}du.$$

Examinons la contribution du second terme dans l'expression à estimer:

$$h_{4,1}(y,t)=\int_M\Big(\int_0^{t^2/4}\mathcal{P}_{t^2/(4u)}(y,z)e^{-u}u^{-1/2}du\Big)\varphi(y,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$=\frac{t}{2}\int_M\int_0^1\mathcal{P}_{1/u}(y,z)e^{-t^2u/4}u^{-1/2}du\,\varphi(y,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$\nabla h_{4,1}(y,t)=\frac{t}{2}\nabla_y\Big(\int_M\int_0^1 du\,\mathcal{P}_{1/u}(y,z)e^{-t^2u/4}u^{-1/2}\varphi(y,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)\Big)$$

$$\left.\begin{aligned}&+\frac{1}{2}\int_M\int_0^1\mathcal{P}_{1/u}(y,z)e^{-t^2u/4}u^{-1/2}du\,\varphi(y,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)\\&-\frac{t^2}{4}\int_M\int_0^1\mathcal{P}_{1/u}(y,z)e^{-t^2u/4}u^{1/2}du\,\varphi(y,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)\end{aligned}\right\}\frac{\partial}{\partial t}=H_1+H_2$$

$$\|H_2\|(y,t)\leqq C\int_M\int_1^\infty\mathcal{P}_s(y,z)\frac{ds}{s^{3/2}}\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$\leqq C\int_M K_0'(x,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

et

$$\int_{\delta(x,y)\leqq\alpha t}t|B_y(t)|^{-1}\|H_2(y,t)\|^2d\sigma(y)dt\leqq C(K_0'[\mathbf{1}_{2\beta}(f)])^2(x)$$

$$H_1(y,t)=\frac{t}{2}\nabla_y\int_1^\infty\mathcal{P}_s(y,z)e^{-t^2/(4s)}\frac{ds}{s^{5/2}}\varphi(y,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$+\frac{t}{2}\int_M\int_1^\infty\mathcal{P}_s(y,z)e^{-t^2/(4s)}\frac{ds}{s^{5/2}}\nabla_y\varphi(y,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)=H_{1,1}(y,t)+H_{1,2}(y,t)$$

$$\|H_{1,2}(y,t)\|\leqq CK_0'(\mathbf{1}_{2\beta}f)(x)$$

$$H_{1,1}(y,t)=\frac{t}{2}\int_M\varphi(y,z)\nabla_y\int_1^\infty ds\frac{e^{-t^2/(4s)}}{s^{3/2}}\mathcal{P}_s(y,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$=\frac{t}{2}\int_M d\sigma(z)\varphi(y,z)\nabla_y\int_1^\infty\frac{ds}{s^{3/2}}e^{-t^2/(4s)}K_0(y,v)\frac{\partial\mathcal{P}_s}{\partial s}(v,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(v)$$

$$+\frac{t}{2}\int_M d\sigma(z)\varphi(y,z)\nabla_y\int_1^\infty\frac{ds}{s^{3/2}}e^{-t^2/(4s)}K_1(y,v)\mathcal{P}_s(v,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(v).$$

Dans [2] il est prouvé que

$$\Big\|\frac{t}{2}\int_M d\sigma(z)\varphi(y,z)\nabla_y\int_1^\infty\frac{ds}{s^{3/2}}e^{-t^2/(4s)}K_0(y,v)\frac{\partial\mathcal{P}_s}{\partial s}(v,z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(v)\Big\|$$

$$\leqq\int_M\int_M\Big(\mathcal{P}_1(v,z)+\int_1^\infty\mathcal{P}(v,z)\frac{ds}{s^{7/2}}\Big)\|\nabla_yK_0(y,v)\|d\sigma(v)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

ce qui ne dépasse pas

$$\leqq C_1K_\theta'(\mathbf{1}_{2\beta}f)+C_2K_\theta''(\mathbf{1}_{2\beta}f).$$

D'autre part:

$$\left\|\frac{t}{2}\int_M d\sigma(z)\varphi(y, z)\nabla_y\int_1^\infty \frac{ds}{s^{3/2}}e^{-t^2/(4s)}K_1(y, v)\mathcal{P}_s(v, z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(v)\right\|$$

$$\leqq C\frac{t}{2}\int_M\int_M \|\nabla_y K(y, v)\|\int_1^\infty \mathcal{P}_s(v, z)\frac{ds}{s^{3/2}}d\sigma(v)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

d'après [2] page 512

$$\leqq C\frac{t}{2}K'_\theta(\mathbf{1}_{2\beta}f)(x).$$

Il s'en suit que:

$$\int_M \mathbf{1}_\beta(x)\Big(\int_{\delta(x, y)\leqq \alpha t} t|B_y(t)|^{-1}\|\nabla h_{4,1}(y, t)\|^2 d\sigma(y)dt\Big)^{p/2}d\sigma(x)$$

$$\leqq C\int_M \mathbf{1}_{2\beta}(y)|f(y)|^p d\sigma(y).$$

On étudie alors:

$$h_{4,2}(y, t)=\int_M\Big(\int_{t^2/4}^\infty \mathcal{P}_{t^2/(4u)}(y, z)e^{-u}u^{-1/2}du\Big)\varphi(y, z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z).$$

Soit $\mathcal{P}_t^0$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur dans la boule $B_0(8\beta)$ de centre 0 et de rayon 8β. On sait qu'il existe une mesure γ_z telle que si y, z sont dans $B_0(2\beta)$

$$\mathcal{P}_t(y, z)=\mathcal{P}_t^0(y, z)+\int_{[0, t[\times\partial B_0(4\beta)}\mathcal{P}_{t-s}^0(y, z)d\gamma_z(s, v)$$

avec $\sup_{M\to z, t<1}\|d\gamma_z\|<\infty$. Alors

$$h_{4,2}(y, t)=\int_M\Big(\int_{t^2/4}^\infty \mathcal{P}_{t^2/(4u)}^0(y, z)e^{-u}u^{-1/2}du\Big)\varphi(y, z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$+\int_M\int_{t^2/4}^\infty\int_{]0, t^2/(4u)[\times\partial B_0(4\beta)} e^{-u}u^{-1/2}du\,\mathcal{P}_{t^2/(4u)-s}^0(y, v)d\gamma_z(s, v)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$h_{4,3}(y, t)=\int_M\Big(\int_{t^2/4}^\infty \mathcal{P}_{t^2/(4u)}^0(y, z)e^{-u}u^{-1/2}du\Big)\varphi(y, z)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z).$$

Mais si $s\leqq 1$

$$\mathcal{P}_s^0(y, z)=\theta^{-1/2}(y, z)e^{-\delta^2(y, z)/(4s)}\{s^{-n/2}+s^{-n/2+1}H(s, y, z)\}$$

où θ est la densité de volume dans le plan tangent T_zM avec $\|\nabla H(s, y, z)\|\leqq C$; $|H(s, y, z)|+|\partial/\partial s\{H(s, y, z)\}|\leqq C$ (voir [2])

$$\int_{t^2/4}^\infty \mathcal{P}_{t^2/(4u)}^0(y, z)e^{-u}u^{-1/2}du=\frac{\theta^{-1/2}(y, z)}{t^n}\int_{t^2/4}^\infty e^{-u\delta^2(y, z)/t^2}e^{-u}u^{(n-1)/2}du$$

$$+\frac{\theta^{-1/2}(y,z)}{t^{n-1}}\int_{t^2/4}^{\infty}H\Big(\frac{t^2}{4s},y,z\Big)e^{-s^{\delta^2(y,z)/t^2}}e^{-s}s^{(n-2)/2}ds$$

$$=\frac{\theta^{-1/2}(y,z)t}{[t^2+\delta^2(y,z)]^{(n+1)/2}}\int_{\delta^2+t^2}^{+\infty}e^{-s}s^{(n-1)/2}ds$$

$$+\frac{\theta^{-1/2}(y,z)}{t^{n-1}}\int_{t^2/4}^{\infty}H\Big(\frac{t^2}{4s},y,z\Big)e^{-s^{\delta^2(y,z)/t^2}}e^{-s}s^{(n-2)/2}ds$$

$$=\frac{\theta^{-1/2}(y,z)t}{[t^2+\delta^2(y,z)]^{(n+1)/2}}-\frac{\theta^{-1/2}(y,z)t}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{(n+1)/2}}\int_0^{t^2+\delta^2(y,z)}e^{-s}s^{(n-1)/2}ds$$

$$+\frac{\theta^{-1/2}(y,z)}{t^{n-1}}\int_{t^2/4}^{\infty}H\Big(\frac{t^2}{4s},y,z\Big)e^{-s^{\delta^2(y,z)/t^2}}e^{-s}s^{(n-2)/2}ds$$

$$=\frac{\theta^{-1/2}(y,z)t}{[t^2+\delta^2(y,z)]^{(n+1)/2}}-\frac{\theta^{-1/2}(y,z)t}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{(n+1)/2}}\int_0^1 e^{-(t^2+\delta^2(y,z))v}v^{(n-2)/2}(t^2+\delta^2)^{(n-1)/2}dv$$

$$+t\theta^{-1/2}(y,z)\int_1^{\infty}H\Big(\frac{1}{u},y,z\Big)e^{-u^{\delta^2(y,z)/4}}u^{(n-2)/2}e^{-(t^2/4)u}du$$

$$=\frac{\theta^{-1/2}(y,z)t}{[t^2+\delta^2(y,z)]^{(n+1)/2}}-\frac{\theta^{-1/2}(y,z)t}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{1/2}}\int_0^1 e^{-t^2v}e^{-\delta^2(y,z)v}v^{(n-2)/2}dv$$

$$+t\theta^{-1/2}(y,z)\int_1^{\infty}H(u^{-1},y,z)e^{-u/4(\delta^2(y,z)+t^2)}u^{(n-2)/2}du\,.$$

Examinons le terme:

$$h_{4,5}(y,t)=\int_M\frac{\theta^{-1/2}(y,z)t}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{1/2}}\int_0^1 e^{-t^2v}e^{-\delta^2(y,z)v}v^{(n-2)/2}dv\,\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h_{4,5}(y,t)$$

$$=\int_M\Big(\frac{\theta^{-1/2}(y,z)}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{1/2}}-\frac{\theta^{-1/2}(y,z)t^2}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{3/2}}\int_0^1 e^{-t^2v}e^{-\delta^2(y,z)v}v^{(n-2)/2}dv\Big)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$-\int_M\frac{\theta^{-1/2}(y,z)2t^2}{M(\delta^2(y,z)+t^2)^{1/2}}\int_0^1 e^{-t^2v}e^{-\delta^2(y,z)v}v^{n/2}dv\,\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$\nabla_y h_{4,5}(y,t)$$

$$=\int_M\Big(t\frac{\nabla_y\theta^{-1/2}(y,z)}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{1/2}}-\frac{\delta(y,z)\nabla_y\delta(y,z)\theta^{-1/2}(y,z)t}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{3/2}}\int_0^1 e^{-v(t^2+\delta^2(y,v))}v^{(n-2)/2}dv\Big)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$-2\int_M\frac{t\theta^{-1/2}(y,z)}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{1/2}}\nabla_y\delta(y,z)\delta(y,z)\int_0^1 e^{-tv}e^{-\delta^2(y,z)v}v^{n/2}dv\,\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)\,.$$

Alors:

$$t\left|\frac{\partial h_{4,5}(y,t)}{\partial t}\right|^2=C\left|\int_M\frac{1}{\delta(x,z)}\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)\right|^2$$

$$t\|\nabla_y h_{4,5}(y,t)\|^2 \leqq C\left|\int_M \frac{1}{\delta(x,z)}\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)\right|^2.$$

Etudions $\nabla h_{4,6}(y,t)$

$$\frac{\partial h_{4,6}(y,t)}{\partial t}=\int_M \theta^{-1/2}(y,z)\int_1^\infty H(u^{-1},y,z)e^{-u/4(\delta^2(y,z)+t^2)}u^{(n-2)/2}du\,\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$-\int_M \frac{t^2}{2}\theta^{-1/2}(y,z)\int_1^\infty H(u^{-1},y,z)e^{-u/4(\delta^2(y,z)+t^2)}u^{n/2}du\,\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$\nabla_y h'_{4,6}(y,t)=t\nabla_y\theta^{-1/2}(y,z)\int_1^\infty H(u^{-1},y,z)e^{-u/4(\delta^2(y,z)+t^2)}u^{(n-2)/2}du$$

$$-\frac{t}{2}\theta^{-1/2}(y,z)\int_1^\infty \nabla_y\delta(y,z)\delta(y,z)H(u^{-1},y,z)u^{n/2}e^{-u/4(\delta^2(y,z)+t^2)}du$$

$$t\left|\frac{\partial h_{4,6}}{\partial t}\right|^2 \leqq \left|\int_M\left(C_1\frac{t^{1/2}(\delta^2+t^2)^{1/2}}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{(n+1)/2}}+C_2\frac{t}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{(n+1)/2}}\right)\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)\right|^2$$

$$\leqq C\left(\int_M \frac{\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{(n-1/2)/2}}\right)^2 \leqq C\left(\int_M \frac{\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)}{[\delta(x,z)]^{n-1/4}}\right)^2.$$

On en déduit les estimations de

$$\int_M\left|\mathbf{1}_\beta(x)\int_{\delta(x,y)\leqq\alpha t\leqq\alpha\beta} t|B_y(t)|^{-1}(\|\nabla h'_{4,5}(y,t)\|^2+\|\nabla h'_{4,6}(y,t)\|^2)d\sigma(y)\right|^{p/2}d\sigma(x)$$

$$\leqq C\int_M \mathbf{1}_{2\beta}(y)|f(y)|^p d\sigma(y)$$

où

$$h'_{4,5}(y,t)=\int_M \frac{\theta^{-1/2}(y,z)\varphi(y,z)}{(\delta^2(y,z)+t^2)^{1/2}}\int_0^1 e^{-t^2v}e^{-\delta^2(y,z)v}v^{(n-2)/2}d\sigma\,\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$h'_{4,6}(y,t)=\int_M t\theta^{-1/2}(y,z)\varphi(y,z)\int_1^\infty H\left(\frac{1}{u},y,z\right)e^{-u^{\delta^2(y,z)/4}}u^{(n-2)/2}e^{-t^2u/4}du.$$

Des calculs analogues à ceux faits dans [2] en se ramenant au cas euclidien montrent que si, d'après les calculs classiques [7],

$$h'_{4,4}(y,t)=\int_M \frac{\varphi(y,z)\theta^{-1/2}(y,z)t}{[t^2+\delta^2(y,z)]^{(n+1)/2}}\mathbf{1}_{2\beta}(z)f(z)d\sigma(z)$$

$$\int_M\left|\mathbf{1}_\beta(x)\int_{\delta(x,y)\leqq\alpha t\leqq 1000\alpha} t|B_y(t)|\,\|\nabla h'_{4,4}(y,t)\|^2 d\sigma(y)dt\right|^2 \leqq C\int_M \mathbf{1}_{2\beta}(y)|f(y)|^p d\sigma(y).$$

Considérons maintenant comme dans [3] un recouvrement de M par des boules B^i de centre P_i, de rayon β avec $\alpha\beta<1$ fixé tel que Δ soit uniformément elliptique sur la boule de centre P_i et de rayon 16β avec des constantes d'uniforme ellipticité contrôlables et pour tout p et toute f

$$\sum_i \|\mathbf{1}_{\beta,P_i}f\|_p^p \simeq \|f\|_p^p$$

où $\mathbf{1}_{\beta, p_i}$ la fonction caractéristique de la boule de centre P_i et de rayon β. On a l'équivalence suivante

$$\int_M \left\{ \int_{\delta(x, y) \leq \alpha t} t|B_y(t)|^{-1} \left\| \nabla \int_M \varphi(y, z) P_t(y, z) f(z) d\sigma(z) \right\|^2 d\sigma(y) dt \right\}^{p/2} d\sigma(x)$$

$$\simeq \sum_i \int_M \left| \mathbf{1}_{\beta, p_i}(x) \int_{\delta(x, y) \leq \alpha t} dt\, t|B_y(t)|^{-1} \left\| \nabla \int_M P_t(y, z) \varphi(y, z) f(z) d\sigma(z) \right\|^2 d\sigma(y) \right|^{p/2} d\sigma(x).$$

Pour tout i, on fait jouer à P_i le rôle de 0 dans le raisonnement précédent. Alors

$$\sum_i \int_M \left\{ \mathbf{1}_{\beta, p_i}(x) \int_{\delta(x, y) \leq \alpha t} t|B_y(t)|^{-1} \left\| \nabla \int_M P_t(y, z) \varphi(y, z) f(z) d\sigma(z) \right\|^2 d\sigma(y) \right\}^{p/2} d\sigma(x)$$

$$\leqq C \sum_i \int_M \mathbf{1}_{2\beta, p_i}(x) |f(x)|^p d\sigma(x) \simeq \|f\|_p^p.$$

Ce qui prouve, avec le lemme 1, que

$$\|S_\alpha(f)\|_p \leqq C\|f\|_p, \qquad 1 < p < \infty.$$

Il faut maintenant montrer que, si $\alpha > 1$,

$$\|f\|_p \leqq \|S_\alpha(f)\|_p.$$

Soient f et g deux fonctions C^∞ à support compact positives

$$\langle f, g \rangle = \int_M f(x) g(x) d\sigma(x) = C \int_0^\infty t \int_M \Delta_x f(x, t) g(x, t) d\sigma(x) dt$$

$$= \int_M \int_0^\infty t|B_y(t)|^{-1} |B_y(t)|\, |B_y(\alpha t)|^{-1} \int_{B_y(\alpha t)} d\sigma(x) \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) \frac{\partial g}{\partial t}(y, t) d\sigma(y) dt$$

$$\leqq \int_M \left(\int_M \int_0^\infty t|B_y(t)|^{-1} \mathbf{1}_{B_y(\alpha t)}(x) \left| \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) \right|^2 d\sigma(y) dt \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\int_M \int_0^\infty dt\, t|B_y(t)|^{-1} \mathbf{1}_{B_y(\alpha t)}(x) \left| \frac{\partial g}{\partial t}(y, t) \right|^2 d\sigma(y) dt \right)^{1/2} d\sigma(x)$$

$$\leqq C\|S_\alpha(f)\|_p \|S_\alpha(g)\|_p \leqq C\|S_\alpha(f)\|_p \|g\|_{p'}$$

d'où

$$\|f\|_{p'} \leqq C\|S_\alpha(f)\|_{p'}.$$

On a indiqué dans [4] comment prouver les inégalités [1] et [2]. Contentons nous d'estimer $S_\alpha(f)$ dans le cas d'un espace symétrique et $p \geqq 2$. Si φ est une fonction de $\mathcal{D}(M)$

$$\int_M S_\alpha(f)^2(x) \varphi(x) d\sigma(x) = \int_M Q_1(x) \varphi(x) d\sigma(x) + \int_M Q_2(x) \varphi(x) d\sigma(x)$$

$$\int_M Q_2(x)\varphi(x)d\sigma(x)$$

$$=\int_M\int_1^\infty e^{\beta t}\|\nabla_y f(y,\ t)\|^2 e^{-\beta t}\int_M |B_y(t)|^{-1}\varphi(x)\mathbf{1}_{\alpha t}\circ\delta(x,\ y)d\sigma(x)dt\,d\sigma(y)\,;$$

$$e^{-\beta t}\int_M |B_y(t)|^{-1}\varphi(x)\mathbf{1}_{\alpha t}\circ\delta(x,\ y)d\sigma(x)$$

$$\leqq\int_M e^{-\beta/\alpha\delta(x,\ y)}\operatorname{Inf}\left\{\left(\alpha,\ \left|B_y\left(\frac{\delta(x,\ y)}{\alpha}\right)\right|^{-1}\right)\right\}\varphi(x)d\sigma(x)\leqq\int_M K_\beta^0(x,\ y)\varphi(x)d\sigma(x)\,.$$

Comme $|B_y(t)|\geqq Ce^{+|\rho|t},\ t\to\infty$

$$K_\beta^0(x,\ y)\leqq\alpha\quad\text{si}\quad\delta(x,\ y)\leqq\alpha$$

$$K_\beta^0(x,\ y)\leqq Ce^{-\{2|\rho|\delta(x,\ y)/\alpha+\beta/\alpha\delta(x,\ y)\}}\leqq Ce^{-\delta(x,\ y)/\alpha\{2|\rho|+\beta\}}\,.$$

Alors K_β^0 est dans $L^{p'}$ si $p'>2|\rho|\alpha/(2|\rho|+\beta)$. K_β^0 est le noyau d'un opérateur borné sur $L^{p_1}(M)$ si

$$2p\alpha/2\rho+\beta<p'\leqq 2\,.$$

Alors d'après les calculs faits dans [**2**] il existe une constante $C(\alpha)$ telle que

$$\|S_\alpha(f)\|_p\leqq C(\alpha,\ p)\|f\|_p$$

si $p\geqq 2$ et $\alpha<2+4/\sqrt{pp'}$.

Cas des espaces symétriques de rang un.

Nous allons maintenant étudier un cas particulier, celui des espaces riemanniens symétriques de rang un, de type non compact pour lequel on peut faire des calculs assez explicites.

Pour cela nous adoptons quelques notations. Soit $M=G/K$ un espace symétrique de rang un, de type non compact où G est un groupe de Lie semi-simple connexe, de centre fini et K un sous-groupe compact maximal. On note $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathcal{G}=k\oplus p$ une décomposition de Cartan de $\mathcal{G}$ où k est l'algèbre de Lie de K. Soit $\mathcal{A}$, de dimension un, un sous-espace abélien de $\mathcal{P}$. On note $\{\alpha,\ 2\alpha\}=\Sigma^+$ un système de racines positives correspondant au choix d'une direction positive sur $\mathcal{A}$. On pose $p_0=\dim\mathcal{G}_\alpha$ resp. $q_0=\dim\mathcal{G}_{-2\alpha}$ où $\mathcal{G}_{-\alpha}$ resp. $\mathcal{G}_{-2\alpha}$ désigne l'espace radiciel correspondant à $-\alpha$ resp. -2α; soit $\rho=p_0+2q_0$. Comme d'habitude n désignera la dimension de M. On veut essentiellement prouver le résultat suivant.

THEOREM II.

a) *Si* $\alpha<1/3$ *ou si* $2\leqq p<\alpha/(\alpha-1)$, *alors*

$$\|S_\alpha(f)\|_p \leqq C(\alpha, p)\|f\|_p$$

et

$$\|f\|_{p'} \leqq C^{-1}\|S_\alpha(f)\|_p .$$

b) *Si* $\alpha<1/3$,

$$\|S_\alpha(f)\|_p \simeq C\|f\|_p \qquad 1<p<\infty$$

et

$$\|S_\alpha(f)\|_p \simeq \|f\|_p$$

si p *est assez voisin de* 2.

Démonstration du théorème II. Nous utiliserons pour le moment les remarques suivantes sur la S. F. D. E. C. sur les espaces symétriques de rang un, d'après [6]

$$\mathcal{P}_t(x, y) \cong \frac{[\delta(x, y)]^{(p_0+2q_0)/2}}{[\mathrm{Sh}\,\delta(x, y)]^{p_0/2}[\mathrm{Sh}\,2\delta(x, y)]^{q_0/2}} \frac{e^{-\delta^2(x, y)/(4t)}}{t^{n/2}} e^{-\rho^2 t} \quad \text{si} \quad 0<t<1$$

$$\mathcal{P}_t(x, y) \cong \frac{\delta(x, y)^{p_0/2}}{[\mathrm{Sh}\,\delta(x, y)]^{p_0/2}} \frac{[\delta(x, y)]^{q_0/2}}{[\mathrm{Sh}\,2\delta(x, y)]^{q_0/2}} \frac{e^{-\delta^2(x, y)/(4t)}}{t^{3/2}} e^{-\rho^2/t}$$

$$\mathcal{P}_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t^2/4} \mathcal{P}_{t^2/(4u)}(x, y)e^{-u}u^{-1/2}du + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t^2/4}^{\infty} \mathcal{P}_{t^2/(4u)}(x, y)e^{-u}u^{-1/2}du .$$

(*) Si $t>1$,

$$\mathcal{P}_t(x, y) \simeq [\delta(x, y)]^{(p_0+q_0)/2}(\mathrm{Sh}\,[\delta(x, y)])^{-p_0/2}[\mathrm{Sh}\,(2\delta(x, y))]^{-q_0/2} \times \frac{e^{-\rho^2 t}}{t^{3/2}} e^{-\delta^2(x, y)/(4t)} .$$

Si $0<t<1$

$$\mathcal{P}_t(x, y) \leqq \frac{C[\delta(x, y)]^{(p_0+q_0)/2}e^{-100\rho^2 t}e^{-\delta^2(x, y)/(4t)}}{t^{n/2}(\mathrm{Sh}\,[\delta(x, y)])^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,[2\delta(x, y)])^{q_0/2}}$$

$$P_t(x, y) \leqq \frac{C\delta(x, y)^{(p_0+q_0)/2}t^{-3}\int_0^{t^2/4} e^{-\rho^2 t^2/(4u)}e^{(-u/t^2)\delta^2(x, y)}e^{-u}u\,du}{(\mathrm{Sh}\,[\delta(x, y)])^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,[2\delta(x, y)])^{q_0/2}}$$

$$+\frac{C[\delta(x, y)]^{(p_0+q_0)/2}t^{-n}\int_{t^2/4}^{\infty} e^{-100\rho^2 t^2/(4u)}e^{-u/t^2\delta^2(x, y)}u^{(n-1)/2}e^{-u}du}{[\mathrm{Sh}\,\delta(x, y)]^{p_0/2}\{\mathrm{Sh}\,(2\delta(x, y))\}^{q_0/2}}$$

$$\mathcal{P}_t(\delta) \leqq Ce^{\rho\delta_0}\frac{(\delta+\delta_0)^{(p_0+q_0)/2}t^{-3/2}}{(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q_0/2}}\int_0^{t^2/4} e^{-\rho^2 t^2/(4u)}e^{-u/t^2(\delta-\delta_0)^2}e^{-u}u\,du$$

$$+C\frac{e^{\rho\delta_0}(\delta+\delta_0)^{(p_0+q_0)/2}t^{-n}\int_{t^2/4}^{\infty} e^{-25(\rho^2 t^2)/u}e^{-u/t^2(\delta-\delta_0)^2}u^{(n-1)/2}e^{-u}du}{(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q_0/2}}$$

où $\delta=\delta(0, u)$ et $\delta_0=\delta(x, 0)$.

On pose $:=I_1^{x,t}(\delta)+I_2^{x,t}(\delta)$

$$\int_0^\infty I_1^{x,t}(\delta)\mathrm{Sh}^{p_0}(\delta)^{q_0}(2\delta)d\delta$$

$$\leqq C\frac{e^{\rho\delta_0}}{t^3}\int_0^\infty(\delta_0^{(p_0+q_0)/2}+\delta^{(p_0+q_0)/2})\int_0^{t^2/4}e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-(\delta-\delta_0)^2u/t^2}e^{-u}u\,du\,\mathrm{Sh}^{p_0/2}\delta\,\mathrm{Sh}^{q_0/2}(2\delta)d\delta$$

$$=Ce^{\rho\delta_0}\frac{(\delta_0)^{(p_0+q_0)/2}}{t^3}\int_{\delta_0}^\infty\Big(\int_0^{t^2/4}e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-\delta^2u/t^2}e^{-u}u\,du\Big)|\mathrm{Sh}(\delta-\delta_0)|^{p_0/2}\mathrm{Sh}^{q_0/2}(2(\delta-\delta_0))d\delta$$

$$+C\frac{e^{\rho\delta_0}}{t^3}\int_{\delta_0}^\infty\delta^{(p_0+q_0)/2}\Big(\int_0^{t^2/4}e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-v^2u/t^2}e^{-u}u\,du\Big)\mathrm{Sh}^{p_0/2}(\delta-\delta_0)\,\mathrm{Sh}^{q_0/2}(2(\delta-\delta_0))d\delta$$

$$=I_1^2+I_1^3$$

$$t^3I_1^3\leqq Ce^{\rho\delta_0}\int_{\delta_0}^\infty\delta^{(p_0+q_0)/2}\Big(\int_0^{t^2/4}e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-\delta^2u/t^2}e^{-u}u\,du\Big)(\mathrm{Sh}\,\delta\,\mathrm{Ch}\,\delta_0-\mathrm{Ch}\,\delta\,\mathrm{Sh}\,\delta_0)$$

$$\times(\mathrm{Sh}\,2\delta\,\mathrm{Ch}\,2\delta_0-\mathrm{Ch}\,2\delta\,\mathrm{Sh}\,2\delta_0)d\delta$$

$$\leqq Ce^{\rho\delta_0}\int_{\delta_0}^\infty\delta^{(p_0+q_0)/2}|\mathrm{Sh}\,\delta|^{p_0/2}|\mathrm{Sh}\,\delta_0|^{p_0/2}|\mathrm{Sh}\,2\delta|^{q_0/2}|\mathrm{Ch}\,2\delta_0|^{q_0/2}$$

$$\times\int_0^{t^2/4}e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-\delta^2u/t^2}e^{-u}u\,du\,d\delta+I_1^{3,2}+I_1^{3,3}+I_1^{3,4}.$$

Ces derniers termes se majorent comme les premiers:

$$\frac{I_1^{3,1}}{t^3}\leqq C\frac{e^{2\rho\delta_0}}{t^3}\int_{\delta_0}^\infty\delta^{(p_0+q_0)/2}(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q_0/2}\int_0^{t^2/4}e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-\delta^2u/t^2}e^{-u}u\,du\,d\delta$$

$$\leqq Ce^{2\rho\delta_0}\int_0^\infty P_t(\delta)(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q_0/2}d\delta\leqq Ce^{2\rho\delta_0}.$$

Ce qui prouve que $I_1^{3,1}\leqq Ce^{2\rho\delta_0}$.

Pour:

$$\frac{1}{t^3}\int_{\delta_0}^\infty\delta^{(p_0+q_0)/2}(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q_0/2}\int_0^{t^2/4}e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-\delta^2u/t^2}e^{-u}u\,du\,d\delta$$

$$\leqq\frac{C}{t^3}\int_0^\infty\delta^{(p_0+q_0)/2}(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,(2\delta))^{q_0/2}\int_0^{t^2/4}e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-\delta^2u/t^2}e^{-u}u\,du\,d\delta$$

$$+\frac{1}{t^3}\int_0^{\delta_0}\delta^{(p_0+q_0)/2}(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q_0/2}\int_0^{t^2/4}e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-\delta^2u/t^2}e^{-u}u\,du\,d\delta.$$

On majore la première expression comme précédemment.

Pour la seconde, elle ne dépasse pas

$$C\delta_0^{(p_0+q_0)/2}e^{\rho\delta_0}\int_0^\infty\frac{te^{-\rho\sqrt{\delta^2+t^2}}}{(t^2+\delta^2)^{5/4}}d\delta<\infty\leqq C\delta_0^{(p_0+q_0)/2}e^{\rho\delta_0}$$

d'après (*) et [4] page 85.

Il s'en suit que:

$$\int_M I_1^{x,t}(y)d\sigma(y) \leqq C(1+\delta_0^{p_0+q_0})e^{2\rho\delta_0}.$$

Si l'on examine le terme de la forme:

$$\frac{e^{\rho\delta_0}}{t^3}\delta_0^{(p_0+q_0)/2}\int_0^\infty\Big(\int_0^{t^2/4} e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-(\delta-\delta_0)^2u/t^2}e^{-u}u\,du\Big)(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Ch}\,2\delta)^{q_0/2}d\delta$$

$$\leqq \frac{e^{\rho\delta_0}}{t^3}\delta_0^{(p_0+q_0)}\int_0^{\delta_0}\Big(\int_0^{t^2/4} e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-(\delta-\delta_0)^2u/t^2}e^{-u}u\,du\Big)(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Ch}\,2\delta)^{q_0/2}d\delta$$

$$+\frac{e^{\rho\delta_0}}{t^3}\delta_0^{(p_0+q_0)/2}\int_{\delta_0}^\infty\Big(\int_0^{t^2/4} e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-(\delta-\delta_0)^2u/t^2}e^{-u}u\,du\Big)(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Ch}\,2\delta)^{q_0/2}d\delta.$$

Mais

$$\frac{1}{t^3}\int_0^{t^2/4} e^{-\rho^2t^2/(4u)}e^{-\delta^2u/t^2}e^{-u}u\,du \leqq C\frac{te^{-\rho(t^2+\delta^2)^{1/2}}}{(t^2+\delta^2)^{5/4}}$$

d'après [**4**] et:

$$\int_0^{\delta_0}(\quad)d\delta \leqq C\int_0^{\delta_0}\frac{t\,d\delta}{t^2+\delta^2} = Ct^{-3/4}.$$

De même

$$\int_{\delta_0}^\infty(\quad)d\delta \leqq Ct^{-3/4}.$$

Quantités qui sont bornées si $t>1$.

$$I_2^{x,t}(\delta) \leqq \frac{c_1\delta^{(p_0+q_0)/2}}{(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q/2}}t^{-n}\int_{t^2/4}^{+\infty} e^{-25\rho^2t^2/u}e^{-u/t^2(\delta-\delta_0)^2}u^{(n-1)/2}e^{-u}du$$

$$+C_2\frac{\delta_0^{(p_0+q_0)/2}t^n}{(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q_0/2}}\int_{t^2/4}^{+\infty} e^{-25\rho^2t^2/u}e^{-u/t^2(\delta-\delta_0)^2}u^{(n-1)/2}e^{-u}du = I_2^{2,1}+I_2^{2,2}$$

$\int_0^\infty I_2^{2,1}(\delta)\mathrm{Sh}\,\delta^{p_0}\mathrm{Sh}\,2\delta^{q_0}d\delta$ se décompose comme précédemment en plusieurs morceaux:

$$\int_{\delta_0}^\infty \delta^{(p_0+q_0)/2}\Big(t^{-n}\int_{t^2/2}^{+\infty} e^{-100\rho^2t^2/(4u)}e^{-\delta^2u/t^2}u^{(n-1)/2}e^{-u}du\Big)(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q_0/2}d\delta$$

$$\leqq C\int_0^\infty \delta^{(p_0q_0)/2}\frac{t}{[t^2+\delta^2(x,\,y)]^{(n+2)/4}}e^{-10\rho(t^2+\delta^2)^{1/2}}(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q_0/2}d\delta$$

$$\leqq C\int_0^\infty \delta^{(p_0+q_0)/2}e^{-10\rho\delta}e^{\rho\delta}d\delta < C.$$

Ce qui prouve par un examen analogue des autres termes que:

$$\int_0^\infty I_2^{x,t}(\delta)(\mathrm{Sh}\,\delta)^{p_0/2}(\mathrm{Sh}\,2\delta)^{q_0/2}d\delta \leqq C(1+\delta_0^{(p_0+q_0)/2})e^{\rho\delta_0}.$$

On veut estimer la quantité:

$$\int_{1000}^\infty\int_{\delta(x,\,y)\leqq\alpha t}|B(t)|^{-1}\|\nabla f\|^2(y,\,t)d\sigma(y)dt.$$

Pour cela on veut établir l'inégalité :

$$|f(y, t)| \leqq C f^*(x) e^{2\rho\delta(x, y)}(\delta(x, y)+1)^{p_0+q_0}$$

où f^* désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood. Mais l'on a vu précédemment que :

$$\sup_{\delta(0, y)=\delta} P_t(x, y) \leqq I_1^{x, t}(\delta)+I_2^{x, t}(\delta)$$

avec

$$\int_M I_1^{x, t}(u) d\sigma(u) \leqq C_1 e^{2\rho\delta(x, 0)}[1+\delta(0, x)]^{p_0+q_0}$$

$$\int_M I_2^{x, t}(u) d\sigma(u) \leqq C_2 e^{2\rho\delta(x, 0)}[1+\delta(0, x)]^{p_0+q_0}.$$

Supposons $x=0$

$$f(y, t)=\int_M P_t(v^{-1}y) f(v) d\sigma(y) = \int_M P_t(yv^{-1}) f(v) d\sigma(y)$$

$$\leqq \int_M I_1^{y, t}(\delta(0, y)) f(v) d\sigma(v)+\int_M I_2^{y, t}(\delta(0, y)) f(v) d\sigma(v) = \int_0^\infty M^{y, t}(r) \lambda(r) g(r) dr$$

où

$$\lambda(r)=\int_K f(k a_r, 0) dk \qquad M^{y, t}(r)=I_1^{y, t}(r)+I_2^{y, t}(r) \qquad \Lambda(r)=\int_0^r \lambda(s) g(r) ds.$$

La quantité ci-dessus vaut :

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\, N\to\infty} \int_\varepsilon^N \lambda(r) M^{y, t}(r) g(r) dr = \lim_{\varepsilon\to 0,\, N\to\infty} -\int_\varepsilon^N \Lambda(s) dM^{y, t}(s).$$

Mais $\Lambda(s) \leqq C|B(s)| f^*(0)$ par conséquent

$$-\int_\varepsilon^N \Lambda(s) dM^{y, t}(s) \leqq -C\int_\varepsilon^N |B(s)| dM^{y, t}(s) f^*(0)$$

$$= +C\int_\varepsilon^N g(s) M^{y, t}(s) ds\, f^*(0)$$

$$= C f^*(0) \int_{\varepsilon<\delta(0, u)<N} M^{y, t}[\delta(0, u)] d\sigma(u)$$

$$\leqq C f^*(0)[1+\delta(0, y)]^{p_0+q_0} e^{2\rho\delta(0, y)}$$

par conséquent

$$|P_t f(y)| = \lim_{\varepsilon\to 0,\, N\to\infty} \int_\varepsilon^N \lambda(r) M^{y, t}(r) g(r) dr \leqq C f^*(0)[1+\delta(0, y)]^{p_0+q_0} e^{2\rho\delta(0, y)}.$$

D'après l'inégalité de Harnack, si f est positive

$$\|\nabla f(y, t)\| \leqq C_1 f(y, t)$$

si $t \geqq 1000$ avec une constante C.

$$\int_{1000}^{\infty}\int_{\delta(x,y)\leqq \alpha t} t|B(t)|^{-1}\|\nabla f(y, t)\|^2 d\sigma(y)dt$$

$$\leqq C\int_{1000}^{\infty} t|B(t)|^{-1}\int_{\delta(x,y)\leqq \alpha t} f^{2*}(x)e^{(4\rho)\delta(x,y)}d\sigma(y)dt$$

$$\leqq C f^{*2}(x)\int_{1000}^{\infty} t|B(t)|^{-1}\int_0^{\alpha t} e^{(4\rho+2\rho)s}ds\,dt \leqq C f^{*2}(x)\int_{1000}^{\infty} t|B(t)|^{-1}e^{2\alpha(3\rho)t}dt$$

$$\leqq C f^{*2}(x)\int_{1000}^{\infty} t e^{-[2\rho-2\alpha(3\rho)]t}dt = C f^{*2}(x) \quad \text{si } 2\rho > 6\alpha\rho,\ \alpha < 1/3.$$

Démonstration du théorème. Montrons que

$$\|S_\alpha(f)\|_p \leqq C\|f\|_p.$$

D'après l'inégalité précédente et le théorème maximal,

$$\|S_\alpha(f)\|_p \leqq \left\|\left\{\int_{1000}^{\infty} t|B(t)|^{-1}\int_{\delta(x,y)\leqq \alpha t}\|\nabla f\|^2(y, t)d\sigma(y)dt\right\}^{1/2}\right\|_p$$

$$+\left\|\left\{\int_0^{1000} t\,dt|B(t)|^{-1}\int_{\delta(x,y)\leqq \alpha t}\|\nabla f\|^2(y, t)d\sigma(y)dt\right\}^{1/2}\right\|_p$$

$$\leqq C\|f\|_p+\left\|\left\{\int_0^{1000} t\,dt|B(t)|^{-1}\int_{\delta(x,y)\leqq \alpha t}\|\nabla f\|^2(y, t)d\sigma(y)dt\right\}^{1/2}\right\|_p.$$

Pour terminer la preuve de l'inégalité

$$\|S_\alpha(f)\|_p \leqq C\|f\|_p$$

il suffit d'utiliser le lemme 1.

On pose: $\gamma=2\rho(1-\alpha)$ et l'on remarque que:

$$\int_0^{\infty} e^{-t(\gamma+2(\lambda^2+\rho^2)^{1/2})}t\,dt = \frac{1}{\gamma^2+4\gamma(\lambda^2+\rho^2)^{1/2}+4(\rho^2+\lambda^2)}.$$

Soit K_1 la fonction dont la transformée de Fourier vaut:

$$\hat{K}_1(\lambda) = \frac{\lambda^2+\rho^2}{4(\lambda^2+\rho^2)+4\gamma(\lambda^2+\rho^2)^{1/2}+\gamma^2}.$$

Alors avec

$$\hat{K}(\lambda) = \frac{4\gamma(\lambda^2+\rho^2)^{1/2}+\gamma^2}{4(\lambda^2+\rho^2)+4\gamma(\lambda^2+\rho^2)^{1/2}+\gamma^2}$$

$$\hat{K}_1(\lambda) = \frac{1}{4}[1-\hat{K}(\lambda)]$$

et l'on a la relation suivante pour tout couple de fonctions (f, g), C^∞ à support compact,

$$\langle f, g\rangle - \langle Kf, g\rangle = 4\int_0^\infty\int_M t e^{-t\gamma}\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\frac{\partial g}{\partial t}(y, t)d\sigma(y)dt$$

$$= \left|\int_0^\infty\int_M t|B(t)|^{-1}|B(t)|e^{-2\rho t}|B(\alpha t)|^{-1}e^{2\rho\alpha t}|B(\alpha t)|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\frac{\partial g}{\partial t}(y, t)d\sigma(y)dt\right|$$

$$= \left|\int_0^1\int_M t|B(t)|^{-1}|B(t)||B(\alpha t)|^{-1}e^{-\gamma t}|B(\alpha t)|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\frac{\partial g}{\partial t}(y, t)d\sigma(y)dt\right|$$

$$+\left|\int_1^\infty\int_M t|B(t)|^{-1}|B(t)|e^{-2\rho t}|B(\alpha t)|^{-1}e^{2\rho\alpha t}|B(\alpha t)|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\frac{\partial g}{\partial t}(y, t)d\sigma(y)dt\right|$$

$$\leqq C_1\int_0^1\int_M t|B(t)|^{-1}|B(\alpha t)|\left|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\right|\left|\frac{\partial g}{\partial t}(y, t)\right|d\sigma(y)dt$$

$$+C_2\int_1^\infty\int_M t|B(t)|^{-1}|B(\alpha t)|\left|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\right|\left|\frac{\partial g}{\partial t}(y, t)\right|d\sigma(y)dt$$

$$\leqq C_1'\int_0^\infty\int_M t|B(t)|^{-1}|B(\alpha t)|\left|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\right|\left|\frac{\partial g}{\partial t}(y, t)\right|d\sigma(y)dt$$

$$= C_1'\int_0^\infty\int_M t|B(t)|^{-1}\int_{B_y(\alpha t)}d\sigma(x)\left|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\right|\left|\frac{\partial g}{\partial t}(y, t)\right|d\sigma(y)dt$$

$$= C_1'\int_M d\sigma(x)\int_0^\infty\int_M t|B(t)|^{-1}\mathbf{1}_{B_x(\alpha t)}(y)\left|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\right|\left|\frac{\partial g}{\partial t}(y, t)\right|d\sigma(y)dt$$

$$\leqq C_1'\int_M d\sigma(x)\left(\int_0^\infty\int_M t|B(t)|^{-1}\mathbf{1}_{B_x(\alpha t)}(y)\left|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\right|^2 d\sigma(y)dt\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\int_0^\infty\int_M t|B(t)|^{-1}\mathbf{1}_{B_x(\alpha t)}(y)\left|\frac{\partial g}{\partial t}(y, t)\right|^2 d\sigma(y)dt\right)^{1/2}.$$

Il s'en suit que

$$|\langle f, g\rangle| \leqq C_1'\|S_\alpha(f)\|_p\|S_\alpha(g)\|_{p'} + \|Kf\|_{p'}\|g\|_{p'}.$$

Nous allons montrer que:

$$\|Kf\|_p \leqq C_1''\|f\|_p \qquad \text{avec} \quad C_1'' < 1.$$

Ce qui prouve que

$$\|f\|_p \leqq C_1'\|S_\alpha(f)\|_p + C_1''\|f\|_p$$

et

$$\|f\|_p \leqq C\|S_\alpha(f)\|_p.$$

Remarquons par ailleurs que si l'on veut que $S_\alpha(f)$ soit borné sur $L^2(M)$ il est nécessaire que $0<\alpha<2$. Ce que l'on supposera par la suite.

En effet si f est de classe C_0^∞

$$\|S_\alpha(f)\|_2^2=\int_M d\sigma(x)\int_M d\sigma(y)\int_0^\infty t|B(t)|^{-1}\mathbf{1}_{\delta(x,y)\leq\alpha t}(x)\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial t}(y,t)\right|^2+\|\nabla_y f\|^2(y,t)\right\}dt$$

$$=\int_M\int_0^\infty |B(t)|^{-1}|B(\alpha t)|t\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial t}(y,t)\right|^2+\|\nabla_y f(y,t)\|^2\right\}d\sigma(y)dt$$

$$\simeq\int_1^\infty\int_0^\infty d\lambda dt e^{-2\rho(1-\alpha)t}e^{-2t(\lambda^2+\rho^2)^{1/2}}(\lambda^2+\rho^2)d\|E_\lambda f\|^2$$

où dE_λ est la mesure spectrale associée à Δ.

Il s'en suit que $S_\alpha(f)$ est borné sur $L^2(M)$ si et seulement si

$$2\rho(1-\alpha)+2\rho>0 \iff 0<\alpha<3.$$

$$K(x)=-\frac{2\gamma}{\Gamma(2)}\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}_{2t}(x)e^{-\gamma t}dt+\frac{\gamma^2}{\Gamma(2)}\int_0^\infty\mathcal{P}_{2t}(x)te^{-\gamma t}dt$$

$$=\frac{2\gamma}{\Gamma(2)}\int_0^\infty\mathcal{P}_{2t}(x)e^{-\gamma t}dt-\frac{2\gamma^2}{\Gamma(2)}\int_0^\infty\mathcal{P}_{2t}(x)e^{-\gamma t}t\,dt+\frac{\gamma^2}{\Gamma(2)}\int_0^\infty t\mathcal{P}_{2t}(x)e^{-\gamma t}dt$$

$$|K(x)|\leqq\frac{2\gamma}{\Gamma(2)}\int_0^{1/\gamma}(1-\gamma t)\mathcal{P}_{2t}(x)dt+\frac{2\gamma}{\Gamma(2)}\int_{1/\gamma}^\infty\mathcal{P}_{2t}(x)(\gamma t-1)e^{-\gamma t}dt$$

$$+\frac{\gamma^2}{\Gamma(2)}\int_0^\infty\mathcal{P}_{2t}(x)te^{-\gamma t}dt.$$

Comme

$$\|\mathcal{P}_{2t}\|_{p\to p}\underset{t\to+\infty}{\simeq}e^{-4\rho t/\sqrt{pp'}}$$

$$\|K\|_{p\to p}\leqq\frac{2\gamma}{\Gamma(2)}\int_0^\infty|1-\gamma t|e^{-t(\gamma+4\rho/\sqrt{pp'})}dt+\frac{\gamma^2}{\Gamma(2)(\gamma+4\rho/\sqrt{pp'})^2}.$$

Par ailleurs:

$$\|K\|_{2\to2}<\frac{4\gamma\rho+\rho^2}{4\rho^2+4\gamma\rho+\gamma^2}<1.$$

Si p est voisin de 2, par interpolation, on trouve le résultat annoncé.

Bibliographie

[1] R. Azencott, Géodésiques et diffusion en temps petit, Astérisque, 1984-1985, pp. 19-31.

[2] N. Lohoue, Estimation des fonctions de Littlewood-Paley-Stein sur les variétés riemanniennes à courbure non positive, Ann. Sci. École. Norm. Sup., **20** (1987), 505-544.

[3] N. Lohoue, Comparaison de champs de vecteurs et du Laplacien sur une variété riemannienne à courbure non positive, J. Funct. Anal., **41** (1983), 164-201.

[4] F. Magnus and R. Soni, Formulas and theorems for special functions of maths, Physics Grundlehren, **52**, Springer, 1966.

[5] N. Lohoue and Th. Rychner, Die Resolvente von Δs symmetrischen Raumen vom nichtkompakten typ, Comment. Math. Helv., **57** (1982), 445-468.

[6] Zhu Fu-Liu, Prépubl., Dept. Math., Univ. de Huan, Chine.
[7] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970.

Noël LOHOUE
CNRS UA 757
Université de Paris-Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex
France