J. Math. Soc. Japan
Vol. 41, No. 3, 1989

Untersuchung Selbergscher Zetafunktionen

Von Ulrich CHRISTIAN

(Eingegangen am Mai 23, 1988)

§ 0. Einleitung.

Bei dem Versuch, den Rang der Schar der Spitzenformen zu elliptischen Modulgruppen auch für kleine Gewichte g mittels der Selbergschen Spurformel zu berechnen, wird man auf das Problem geführt, die Selbergsche Zetafunktion (zur Bezeich s. Christian [**37**])

$$\zeta(q, g, s) = \sum_{\substack{\{P\}_{\mathcal{M}(q)} \\ |\mathrm{Tr}\, P| > 2}} (\mathrm{sign}\, \mathrm{Tr}\, P)^g \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}} \left(2 \cosh \frac{1}{2} \log N(P)\right)^{-2s}$$

auf meromorphe Fortsetzbarkeit in die s-Ebene zu untersuchen. Dabei ist $\mathcal{M}(q)$ die Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe zur elliptischen Modulgruppe. $\{P\}_{\mathcal{M}(q)}$ durchläuft die Konjugiertenklassen der hyperbolischen Elemente aus $\mathcal{M}(q)$, weiter ist P_0 das zu P gehörige primitive Element und $N(P)$ die Norm von P; schließlich bezeichnet s eine komplexe Variable und Tr die Spur.

Die Funktion $\zeta(q, g, s)$ tritt auch schon bei Hiramatsu [**19**], [**20**], § 5.2, (8) und bei Hiramatsu und Akiyama [**21**] auf.

In diesen Arbeiten wird aber nur der Fall $g=1$ betrachtet und die Funktion $\zeta(q, g, s)$ wird nur in einer Umgebung des Nullpunktes untersucht. Wir lassen alle $g \in \boldsymbol{Z}$ zu und untersuchen $\zeta(q, g, s)$ in der ganzen s-Ebene. Wir zeigen, daß $\zeta(q, g, s)$ nur Pole erster Ordnung besitzt. Diese Resultate wurden unabhängig von [**15**] bis [**23**] gewonnen.

Wir werden uns in dieser Arbeit weitgehend auf Fischer [**11**] stützen. Allerdings betrachtet Fischer nur Gruppen, die das Element $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ enthalten. Bei uns gilt $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{M}(q)$ $(q \geqq 3)$. Das hat einige kleine Abänderungen zur Folge. Insbesondere erscheint durch diesen Unterschied der Term $(\mathrm{sign}\, \mathrm{Tr}\, P)^g$ unter der Summe von $\zeta(q, g, s)$. Wir werden $\zeta(q, g, s)$ für jedes Gewicht g meromorph fortsetzen. Beachten wir dann, daß $\zeta(q, g, s)$ nur von der Restklasse $g \bmod 2$ abhängt, so ergeben sich explizite Formeln für die Ränge der Scharen der Spitzenformen vom Gewicht g.

Schließlich betrachten wir statt $\zeta(q, g, s)$ zunächst die Funktion

$$\mathscr{Z}(q, g, G) = \sum_{\substack{\{P\}\subset\mathscr{H}(q)\\ |\mathrm{Tr}\,P|>2}} (\mathrm{sign}\,\mathrm{Tr}\,P)^g \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2}-N(P)^{-1/2}} G(\log N(P))$$

mit einer relativ allgemeinen Funktion $G(t)$. Erst später wird die Spezialisierung $G(t)=(2\cosh(t/2))^{-2s}$ vorgenommen.

Für Literaturhinweise danke ich K. Hashimoto, Y. Morita und S. J. Patterson. Ferner danke ich T. Arakawa dafür, daß er mich auf mehrere Schreibfehler hingewiesen hat.

§ 1. Grundlagen.

Es sei $\mathfrak{Z}(1)=\{z=x+iy \mid y>0\}$ die in $\boldsymbol{C}$ gelegene obere Halbebene. Für $N=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \boldsymbol{R})$ setze man

(1) $$N\langle z\rangle = \frac{az+b}{cz+d} = x_N + iy_N, \qquad N\{z\} = cz+d\,,$$

wobei x_N, y_N Real- und Imaginärteil von $N\langle z\rangle$ bezeichnen. Ferner sei

(2) $$j_N(g, z) = \left(\frac{N\{z\}}{|N\{z\}|}\right)^g = e^{ig \arg N\{z\}} = \frac{(N\{z\})^{g/2}}{(N\{\bar{z}\})^{g/2}}\,;$$

dabei ist $g\in\boldsymbol{Z}$. Durch die Zuordnung $z\to N\langle z\rangle$ wird $\mathfrak{Z}(1)$ bijektiv auf sich abgebildet. Für $w, z\in\mathfrak{Z}(1)$ gilt

(3) $$\frac{N\langle w\rangle - N\langle z\rangle}{N\langle w\rangle - N\langle \bar{z}\rangle} = j_N^{-1}(2\,;z)\frac{w-z}{w-\bar{z}} \qquad (N\in SL(2, \boldsymbol{R}))\,.$$

Das unter $SL(2, \boldsymbol{R})$ invariante Volumenelement in $\mathfrak{Z}(1)$ ist

(4) $$d\omega_z = \frac{dxdy}{y^2}\,.$$

Für eine Funktion $f(z)$ und $N\in SL(2, \boldsymbol{R})$ werde

(5) $$f_N(z) = (f\,|\,[N, g])(z) = j_N^{-1}(g\,;z)f(N\langle z\rangle)$$

gesetzt. Bei der Bezeichnung $f_N(z)$ ersieht man das Gewicht g aus dem Zusammenhang.

Man bilde

(6) $$\Delta_g = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - igy\frac{\partial}{\partial x}\,.$$

Dann gilt

$$\Delta_g = \bar{\Delta}_{-g}\,,$$
$$(\Delta_g f)\,|\,[M, g] = \Delta_g(f\,|\,[M, g]) \qquad (M\in SL(2, \boldsymbol{R}))\,.$$

Für $q\in\boldsymbol{N}$ sei $\mathscr{M}(q)=\left\{N\in SL(2, \boldsymbol{Z}),\ N\equiv I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\operatorname{mod} q\right\}$ die "Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe" zur elliptischen Modulgruppe $\mathscr{M}(1)=SL(2, \boldsymbol{Z})$. Wir treffen die folgende

VERABREDUNG. Für $q\geqq 3$ ist das Gewicht $g\in\boldsymbol{Z}$. Ferner gilt

(7) $$g\equiv 0 \operatorname{mod} 2 \qquad (q=1,\ 2).$$

Es seien $\mathfrak{F}(q)$ ein Fundamentalbereich von $\mathscr{M}(q)$ und $\xi_1=\infty,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_{p(q)}$ seine bezüglich $\mathscr{M}(q)$ inäquivalenten Spitzen. Aus Christian [3], S. 59, (17), folgt

(8) $$p(q)=\varepsilon(q)^{-1}q^2\prod_{p^*\mid q}(1-p^{*-2}).$$

das Produkt ist über alle in q steckenden Primzahlen p^* zu erstrecken. Weiter ist

(9) $$\varepsilon(q)=\left\{\begin{matrix}1 & (q=1,\ 2)\\ 2 & (q>2)\end{matrix}\right\}.$$

Es seien $R_1=I,\ R_2,\ \cdots,\ R_{p(q)}\in\mathscr{M}(1)$ Matrizen mit

(10) $$R_\iota\langle\xi_\iota\rangle=\infty \qquad (\iota=1,\ \cdots,\ p(q)).$$

Das nichteuklidische Volumen von $\mathfrak{F}(q)$ ist

$$\omega(\mathfrak{F}(q))=[\mathscr{M}(1)/_{(\pm I)}:\mathscr{M}(q)/_{(\pm I)\cap\mathscr{M}(q)}]\,\omega(\mathfrak{F}(1)).$$

Aus Koecher [24], Seite 403, folgt

(11) $$[\mathscr{M}(1)/_{(\pm I)}:\mathscr{M}(q)/_{(\pm I)\cap\mathscr{M}(q)}]=qp(q).$$

Bekanntlich gilt

(12) $$\omega(\mathfrak{F}(1))=\frac{\pi}{3}.$$

Also

(13) $$\omega(\mathfrak{F}(q))=qp(q)\frac{\pi}{3}.$$

Zur späteren Benutzung beweisen wir

HILFSSATZ 1. *Es ist*

(14) $$p(1)=1,\quad p(2)=3,\quad p(4)=6,$$

(15) $$4\mid p(q) \qquad (q=3 \text{ und } q\geqq 5),$$

(16) $$12\mid qp(q) \qquad (q\geqq 3).$$

BEWEIS. (14) folgt aus (8) und (9). Weiter sei

(17) $$q = 2^{\alpha} p_1^{*\alpha_1} \cdots p_r^{*\alpha_r} \qquad (r \geqq 0;\ \alpha_r \in \boldsymbol{N};\ \alpha \in 0 \cup \boldsymbol{N})$$

die Primfaktorzerlegung von q mit verschiedenen ungeraden Primzahlen $p_1^*, \cdots, p_r^*$. Wegen (8), (9) ist die Aussage (15) gleichbedeutend mit

(18) $$8 \,\Big|\, \begin{Bmatrix} 1 & (\alpha=0) \\ 3\cdot 2^{2\alpha-2} & (\alpha \geqq 1) \end{Bmatrix} \cdot \prod_{\rho=1}^{r} p_\rho^{*2\alpha_\rho-2}(p_\rho^{*2}-1).$$

Aber $p_\rho^{*2}-1 \equiv 0 \bmod 8$. Für $r \geqq 1$ ist (18) also richtig. Ist $r=0$, so ist wegen $q=3$ oder $q \geqq 5$ stets $\alpha \geqq 3$. Dann gilt (18) auch. Damit ist (15) bewiesen. Aus (14) folgt $4p(4)=24$. Somit gilt (16) für $q=4$. Es genügt also, (16) für $q=3$ und $q \geqq 5$ zu zeigen. Wegen (15) reicht es hin, $3 \mid qp(q)$ zu beweisen. Vermöge (8), (9), ist das gleichbedeutend mit

(19) $$3 \,\Big|\, \begin{Bmatrix} 1 & (\alpha=0) \\ 3\cdot 2^{3\alpha-2} & (\alpha \geqq 1) \end{Bmatrix} \prod_{\rho=1}^{r} p_\rho^{*3\alpha_\rho-3} p_\rho^*(p_\rho^{*2}-1).$$

Aber $p_\rho^*(p_\rho^{*2}-1) = p_\rho^*(p_\rho^*+1)(p_\rho^*-1) \equiv 0 \bmod 3$. Für $r \geqq 1$ ist (19) also richtig. Für $r=0$ ist $\alpha \geqq 1$, und dann gilt (19) auch. Hilfssatz 1 ist bewiesen.

Es sei $P \in \mathcal{M}(q)$ ein hyperbolisches Element. Dann gibt es eine durch P eindeutig bestimmte Zahl $\alpha(P) \in \boldsymbol{R}$ mit

(20) $$D(P) = \begin{pmatrix} \alpha(P) & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}(P) \end{pmatrix} = RPR^{-1},$$

$R \in SL(2, \boldsymbol{R})$ und

(21) $$|\alpha(P)| > 1.$$

Es gilt

(22) $$\alpha(P^k) = (\alpha(P))^k \qquad (k \in \boldsymbol{N}),$$

(23) $$\operatorname{Tr} P = \alpha(P) + \alpha^{-1}(P),$$

wobei Tr die Spur der Matrix P bezeichnet. Aus (23) folgt

(24) $$\operatorname{sign} \alpha(P) = \operatorname{sign} \operatorname{Tr} P.$$

Aus (22), (24) folgt

(25) $$\operatorname{sign} \operatorname{Tr} P^k = \operatorname{sign} (\operatorname{Tr} P)^k \qquad (k \in \boldsymbol{N}).$$

Mit $\mathcal{M}(q)$ ist auch $R\mathcal{M}(q)R^{-1}$ diskret, also existiert ein eindeutig bestimmtes $\alpha_0 \in \boldsymbol{R}$ mit $|\alpha_0| > 1$, so daß

$$D_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0^{-1} \end{pmatrix}$$

für $q \geqq 3$ den Zentralisator von $D(P)$ bezüglich $R\mathcal{M}(q)R^{-1}$ erzeugt. Für $q=1, 2$ gilt dasselbe, wenn man $-I$ als weiteres erzeugendes Element des Zentralisators hinzunimmt. $P_0=R^{-1}D_0R$ erzeugt (bei $q=1, 2$ zusammen mit $-I$) den Zentralisator $Z(P)$ von P bezüglich $\mathcal{M}(q)$. Es gilt $\alpha(P_0)=\alpha_0$ und

(26) $$P=P_0^k$$

mit passendem $k\in\boldsymbol{N}$.

DEFINITION 1. Die Zahl

(27) $$N(P)=\alpha^2(P)>1$$

heißt die "Norm" des hyperbolischen Elementes $P\in\mathcal{M}(q)$. Die Matrix P_0 heißt "primitives hyperbolisches Element" von $\mathcal{M}(q)$ oder auch "das zu P gehörige primitive hyperbolische Element". Zwei Matrizen P_1, $P_2\in\mathcal{M}(q)$ heißen "konjugiert", wenn es ein $M\in\mathcal{M}(q)$ mit

(28) $$P_2=M^{-1}P_1M$$

gibt. Die zu P konjugierten Matrizen bilden die "Konjugiertenklasse" $\{P\}_{\mathcal{M}(q)}$. Schließlich ist $\{P_0\}_{\mathcal{M}(q)}$ eine "primitive hyperbolische Konjugiertenklasse".

Offenbar gilt:

HILFSSATZ 2. *Sind P_1, P_2 konjugiert, so ist $\alpha(P_1)=\alpha(P_2)$. Genau dann ist P_1 primitiv, wenn P_2 primitiv ist.*

Es sei $\mathcal{M}_\infty(q)$ die durch $\begin{pmatrix}1 & qa\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $(a\in\boldsymbol{Z})$ gegebene Untergruppe von $\mathcal{M}(q)$ $\Big($bei $q=1, 2$ hat man $\pm\begin{pmatrix}1 & qa\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ zu nehmen$\Big)$. Die Eisensteinreihe werde durch

(29) $$E(q, g, z, s)=\sum_{N\in\mathcal{M}_\infty(q)\backslash\mathcal{M}(q)} y^s|[N, g]$$

erklärt. Hierbei ist $z=x+iy\in\mathfrak{Z}(1)$.

Die Reihe konvergiert für $\operatorname{Re} s>1$ absolut und stellt eine holomorphe Funktion in s dar. Wie man z. B. aus Christian [4], §2 entnimmt, ist $E(q, g, z, s)$ meromorph in die s-Ebene fortsetzbar. Es gilt

(30) $$E_{R_\iota R_\kappa^{-1}}(q, g, z+q, s)=E_{R_\iota R_\kappa^{-1}}(q, g, z, s) \qquad (\iota, \kappa=1, \cdots, p(q)).$$

Dabei sind die in (30) benutzten Bezeichnungen durch (5) und (10) erklärt. Wegen (30) kann man $E_{R_\iota R_\kappa^{-1}}(q, g, z, s)$ in eine Fourierreihe bezüglich $x=\operatorname{Re} z$ entwickeln. Nach Christian [4], Hilfssatz 5 hat der 0-te Fourierkoffizient die Gestalt

(31) $$\delta_{\iota\kappa}^* y^s+\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)y^{1-s}.$$

Dabei ist $\delta_{\iota\iota}^*=1$, $\delta_{\iota\kappa}^*=0$ $(\iota\neq\kappa)$. Die Funktionen $\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)$ werden in Christian

[**4**], Hilfssatz 5 näher beschrieben. Man bilde die $p(q)\times p(q)$-Matrix

$$\Phi(q, g, s)=(\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)) \tag{32}$$

und setze

$$\phi(q, g, s)=\operatorname{Det}\Phi(q, g, s). \tag{33}$$

Für $\iota=\kappa$ ist $R_\iota R_\kappa^{-1}=I$, also

$$\phi_{\iota\iota}(q, g, s)=\phi_{11}(q, g, s) \qquad (\iota=1, \cdots, p(q)). \tag{34}$$

HILFSSATZ 3. *Es ist*

$$\phi_{11}(q, g, s)=0 \qquad (g\equiv 1 \bmod 2) \tag{35}$$

und

$$\phi_{11}\left(q, g, \frac{1}{2}\right)=-\frac{\varepsilon(q)}{\phi^*(q)} \qquad (g\equiv 0 \bmod 2). \tag{36}$$

Dabei ist $\varepsilon(q)$ *durch* (9) *gegeben.*

$$\phi^*(q)=q\prod_{p^*\mid q}\left(1-\frac{1}{p^*}\right) \tag{37}$$

ist die Anzahl der primen Restklassen $\bmod q$.

BEWEIS. (35) folgt aus Christian [**4**], (44) und (52) oder auch aus Hiramatsu, Akiyama [**21**]. Es sei

$$g\equiv 0 \bmod 2. \tag{38}$$

Eine Formel für $\phi_{11}(q, g, s)$ bekommt man aus Christian [**4**], (44), wenn man dort $(g+s)/2$ durch s ersetzt. Außerdem gilt Christian [**4**], (44) nur für $q\geqq 3$. Um auch $q=1, 2$ hineinzubekommen, muß man den Faktor $\varepsilon(q)$ einfügen. Es folgt

$$\phi_{11}(q, g, s)=(-1)^{g/2}\frac{2^{2-2s}\pi\Gamma(2s)}{q\Gamma(s+g/2)\Gamma(s-g/2)}\frac{1}{2s-1}L(q, g, s), \tag{39}$$

$$L(q, g, s)=\frac{\varepsilon(q)}{2}\sum_{\substack{c=-\infty\\ c\neq 0\\ (c\ d)\equiv(0\ 1)\bmod q\\ \langle c, d\rangle=1,\, 0\leqq d/c<q}}^{\infty}|c|^{-2s}. \tag{40}$$

Aus (39) folgt

$$\phi_{11}\left(q, g, \frac{1}{2}\right)=(-1)^{|g|/2}\frac{2\pi}{q\Gamma(1/2+|g|/2)\Gamma(1/2-|g|/2)}b,$$

$$b=\lim_{s\to 1/2}\frac{1}{2s-1}L(q, g, s). \tag{41}$$

Eine leichte Rechnung zeigt

$$(-1)^{|g|/2}\frac{\pi}{\Gamma(1/2+|g|/2)\Gamma(1/2-|g|/2)}=1,$$

also

(42) $$\phi_{11}\left(q, g, \frac{1}{2}\right)=\frac{2b}{q}.$$

Aus Christian [**4**], (57) folgt mit der dortigen Bezeichnung

(43) $$L(q, g, s)=\frac{\varepsilon(q)}{2}(\zeta(q, 0, 1, 2s)+\zeta(q, 0, -1, 2s)).$$

Aus Christian [**4**], (58), (59) folgt $|\delta|=1$, $\eta=1$, $q_1=q$. Wegen (43) und Christian [**4**], (65) also

$$L(q, g, s)=\frac{\varepsilon(q)q^{-2s}}{\phi^*(q)}\sum_{n=1}^{\infty}\phi^*(q^2n)n^{-2s}.$$

Mit Christian [**4**], (72) also

(44) $$L(q, g, s)=\frac{\varepsilon(q)q^{-2s}}{\phi^*(q)}\check{\zeta}(1, q^2, 1, 2s).$$

Wegen Christian [**4**], (78) somit

(45) $$L(q, g, s)=\frac{\varepsilon(q)q^{-2s}\rho^*(1, q^2, 1, 2s)\zeta(2s-1)}{\phi^*(q)\zeta(2s)}.$$

Dabei bezeichnet ζ die Riemannsche Zetafunktion. Beachtet man noch $\zeta(0)=-1/2$, so folgt aus (41), (45)

$$b=-\frac{\varepsilon(q)}{2q\phi^*(q)}\rho^*(1, q^2, 1, 1).$$

Christian [**4**], (77) liefert $\rho^*(1, q^2, 1, 1)=q^2$. Also

(46) $$b=-\frac{q\varepsilon(q)}{2\phi^*(q)}.$$

Aus (42), (46) folgt (36). Hilfssatz 3 ist bewiesen.

Man setze

(47) $$g^*=\begin{Bmatrix}0 & (g\equiv 0 \bmod 2)\\ 1 & (g\equiv 1 \bmod 2)\end{Bmatrix}.$$

Dann ist stets

(48) $$g\equiv g^* \bmod 2.$$

Weiter sei

(49) $$\beta(q, g)=\beta(q, g^*)=\begin{Bmatrix}\frac{p(q)}{4}\left(1+\frac{\varepsilon(q)}{\phi^*(q)}\right) & (|g|\equiv 0 \bmod 2)\\ 0 & (|g|\equiv 1 \bmod 2)\end{Bmatrix}.$$

HILFSSATZ 4. *Es ist*

$$2\beta(q, 0) \in \boldsymbol{N}. \tag{50}$$

Weiterhin bezeichne p^* eine ungerade Primzahl

$$p^* \equiv 1 \bmod 4. \tag{51}$$

Ferner sei $n \in \boldsymbol{N}$. Dann gilt

$$\beta(q, 0) \in \boldsymbol{N} \qquad (q \neq 1, 2, p^{*n}, 2p^{*n}), \tag{52}$$

$$\beta(q, 0) \in \frac{1}{2}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N} \qquad (q = 1, 2, p^{*n}, 2p^{*n}). \tag{53}$$

BEWEIS. Aus (8), (9), (49) folgt

$$\beta(1, 0) = \frac{1}{2}, \qquad \beta(2, 0) = \frac{3}{2}, \qquad \beta(3, 0) = 2, \qquad \beta(4, 0) = 3.$$

Dann ist die Aussage richtig. Weiter sei $q \geqq 5$. Wegen (9), (15), (49) genügt es dann zu zeigen:

$$\frac{p(q)}{\phi^*(q)} \in 2\boldsymbol{N} \qquad (q \neq p^{*n}, 2p^{*n}), \tag{54}$$

$$\frac{p(q)}{\phi^*(q)} \in \boldsymbol{N} - 2\boldsymbol{N} \qquad (q = p^{*n}, 2p^{*n}). \tag{55}$$

Es sei

$$q = 2^{\alpha} p_1^{*\alpha_1} \cdots p_r^{*\alpha_r} \qquad (\alpha \in 0 \cup \boldsymbol{N};\ \alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \boldsymbol{N}) \tag{56}$$

die Primfaktorzerlegung von q mit paarweise verschiedenen ungeraden Primzahlen $p_1^*, \cdots, p_r^*$. Dann ist

$$\frac{p(q)}{\phi^*(q)} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 2^{\alpha-1}\cdot 3 & (\alpha \geqq 1) \\ 1 & (\alpha = 0) \end{Bmatrix} \prod_{\rho=1}^{r} p_\rho^{\alpha_\rho - 1}(p_\rho + 1). \tag{57}$$

Es ist $p_\rho + 1 \equiv 0 \bmod 2$. Für $r \geqq 2$ ist also $p(q)/\phi^*(q) \in 2\boldsymbol{N}$. Jetzt sei $r=1$. Für $p_1^* \equiv -1 \bmod 4$ gilt auch $p(q)/\phi^*(q) \in 2\boldsymbol{N}$. Es sei $p_1^* \equiv 1 \bmod 4$. Dann gilt $p(q)/\phi^*(q) \in 2\boldsymbol{N}$ für $\alpha \geqq 2$ und $p(q)/\phi^*(q) \in \boldsymbol{N} - 2\boldsymbol{N}$ für $\alpha = 1, 2$. Schließlich sei $r=0$. Wegen $q \geqq 5$ ist $\alpha \geqq 3$. Also $p(q)/\phi^*(q) \in 2\boldsymbol{N}$.

Hilfssatz 4 ist bewiesen.

HILFSSATZ 5. *Für die durch* (33) *erklärte Funktion gilt: Die logarithmische Ableitung $(\phi'/\phi)(q, g, s)$ ist in $\boldsymbol{C}$ meromorph und hat höchstens Pole erster Ordnung. Auf der Geraden* $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ *ist die Funktion holomorph. Für $t \in \boldsymbol{R}$ gilt*

$$\frac{\phi'}{\phi}\left(q, g, \frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^4). \tag{58}$$

BEWEIS. Siehe Fischer [**11**], Seite 34 unter (1.5.7); Seite 35, 1.5, 9 Proposition, Seite 97, 2.4.17 Corollary. $\phi(q, 0, s)$ wird von Efrat [8] explizit berechnet.

DEFINITION 2. Der Rang der Schar der holomorphen Spitzenformen zu $\mathcal{M}(q)$ vom Gewicht $g \in \boldsymbol{N}$ werde mit $\eta(q, g)$ bezeichnet.

DEFINITION 3. Für $g \in \boldsymbol{Z}$ sei $\mathfrak{B}(q, g)$ die Menge aller Funktionen $f: \mathfrak{Z}(1) \to \boldsymbol{C}$ mit

$$f \mid [N, g] = f \qquad (N \in \mathcal{M}(q)). \tag{59}$$

Für $\iota = 0, 1, 2, \cdots, \infty$ bezeichne $\mathfrak{B}^{\iota}(q, g)$ die Menge der $f \in \mathfrak{B}(q, g)$ mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung ι nach x und y. Schließlich sei $\mathfrak{B}^{a}(q, g) \subset \mathfrak{B}^{\infty}(q, g)$ die Menge der Funktionen, die bezüglich x und y reell analytisch sind. Ist $\lambda \in \boldsymbol{C}$, so bedeute $\hat{\mathfrak{B}}(q, g, \lambda)$ die Menge der $f \in \mathfrak{B}^{a}(q, g)$ mit folgenden Eigenschaften:
Es gilt:

$$-\Delta_g f = \lambda f. \tag{60}$$

Es gibt ein $\kappa \in \boldsymbol{R}$, so daß gleichmäßig in x gilt

$$f_R(z) = O(y^{\kappa}) \qquad (y \to \infty) \ (\boldsymbol{R} \in \mathcal{M}(1)). \tag{61}$$

Die Funktionen aus $\hat{\mathfrak{B}}(q, g, \lambda)$ heißen "automorphe Formen zur Gruppe $\mathcal{M}(q)$, zum Gewicht g und zur Kennzahl λ".

Für $s \in \boldsymbol{C}$ werde schließlich

$$\mathfrak{B}(q, g, s) = \hat{\mathfrak{B}}(q, g, s(1-s)) \tag{62}$$

gesetzt. Dann ist

$$\mathfrak{B}(q, g, s) = \mathfrak{B}(q, g, 1-s). \tag{63}$$

Es sei $\mathfrak{H}(q, g)$ der Hilbertraum aller $f \in \mathfrak{B}(q, g)$ mit

$$\|f\|^2 = \int_{\mathfrak{F}(q)} |f(z)|^2 d\omega_z < \infty. \tag{64}$$

Das skalare Produkt in diesem Hilbertraum ist durch

$$(f, h) = \int_{\mathfrak{F}(q)} \overline{f(z)} h(z) d\omega_z \tag{65}$$

gegeben. Man setze $\hat{\mathfrak{H}}(q, g, \lambda) = \mathfrak{H}(q, g) \cap \hat{\mathfrak{B}}(q, g, \lambda)$, $\mathfrak{H}(q, g, s) = \mathfrak{H}(q, g) \cap \mathfrak{B}(q, g, s)$. Letzteres ist unter der Substitution $s \to 1-s$ invariant. In $\mathfrak{H}(q, g)$ betrachten wir $-\Delta_g$ auf folgenden Definitionsbereichen:

$$\mathcal{D}^2(q, g) = \{f ; f \in \mathfrak{H}(q, g) \cap \mathfrak{B}^2(q, g) ; -\Delta_g f \in \mathfrak{H}(q, g)\}, \tag{66}$$

(67) $\vartheta^\infty(q, g)=\{f\,;\, f\in\mathfrak{B}^\infty(q, g)\,;\, f$ hat mod $\mathcal{M}(q)$ kompakten Träger$\}$.

Die Einschränkungen $-\Delta_g$ auf $\vartheta^2(q, g)$ bzw. $\vartheta^\infty(q, g)$ mögen mit $-\Delta_g^2$ bzw. $-\Delta_g^\infty$ bezeichnet werden. Offenbar ist $\vartheta^\infty(q, g)\subset\vartheta^2(q, g)$.

SATZ 1. *Die Bereiche $\vartheta^2(q, g)$ und $\vartheta^\infty(q, g)$ liegen in $\mathfrak{H}(q, g)$ dicht. $-\Delta_g^2$ und $-\Delta_g^\infty$ sind in $\mathfrak{H}(q, g)$ wesentlich selbstadjungiert und haben dieselbe selbstadjungierte Fortsetzung $-\tilde{\Delta}_g$ mit dem Definitionsbereich $\tilde{\vartheta}(q, g)$. Es gilt $\vartheta^2(q, g)=\tilde{\vartheta}(q, g)\cap\mathfrak{B}^2(q, g)$. Der Operator $-\tilde{\Delta}_g$ hat ein kontinuierliches Spektrum und ein Punktspektrum. Die Eigenfunktionen und Eigenpakete von $-\tilde{\Delta}_g$ sind mit denjenigen von $-\Delta_g^2$ identisch. Das kontinuierliche Spektrum liegt in der Halbgeraden $[1/4, \infty\rangle\in\boldsymbol{R}$. In jedem Punkt dieses Intervalls hat es die Vielfachheit $p(q)$.*

Das Punktspektrum liegt in der Halbebene $[(|g|/2)(1-|g|/2), \infty\rangle\subset\boldsymbol{R}$. Es ist abzählbar und häuft sich nur bei ∞. Es seien

(68)
$$\lambda_{-\tau(q,g)}(q, g)=\frac{|g|}{2}\left(1-\frac{|g|}{2}\right)<\lambda_{1-\tau(q,g)}(q, g)<\cdots<\lambda_{-\rho(q,g)-1}(q, g)$$
$$=0<\lambda_{-\rho(q,g)}(q, g)<\cdots<\lambda_{-1}(q, g)<\lambda_0(q, g)=\frac{1}{4}<\lambda_1(q, g)<\lambda_2(q, g)<\cdots$$

die verschiedenen Eigenwerte von $-\tilde{\Delta}_g$ mit den endlichen Vielfachheiten

$$\mu_\nu(q, g) \qquad (\nu=-\tau(q, g), \cdots).$$

Wir lassen $\mu_\nu(q, g)=0$ $(\nu=-\tau(g, q), \cdots, -\rho(q, g)-1, 0)$ zu. Wie unter diesen Umständen die "Eigenwerte" $\lambda_{-\tau(q,g)}(q, g), \cdots, \lambda_{-\rho(q,g)-1}(q, g), \lambda_0(q, g)$ zu erklären sind, beschreiben wir weiter unten. Es gilt

(69)
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu(q, g)\lambda_\nu(q, g)^{-2}<\infty,$$

(70)
$$\lambda_\nu(q, -g)=\lambda_\nu(q, g)\,;\,\mu_\nu(q, -g)=\mu_\nu(q, g) \quad (\nu=-\tau(q, g), 1-\tau(q, g), \cdots)$$

(71)
$$\lambda_\nu(q, g)=\lambda_\nu(q, g^*)\,;\,\mu_\nu(q, g)=\mu_\nu(q, g^*) \quad (\nu=-\rho(q, g), 1-\rho(q, g), \cdots).$$

Man setze

(72)
$$r_\nu(q, g)=\sqrt{\lambda_\nu(q, g)-\frac{1}{4}}>0 \qquad (\nu=1, 2, \cdots).$$

Dann gilt $r_\nu(q, g)\in\boldsymbol{R}$ und

(73)
$$0<r_1(q, g)<r_2(q, g)<\cdots.$$

Der Eigenwert $\lambda_0(q, g)$ werde durch

(74)
$$\lambda_0(q, g)=\frac{1}{4}$$

erklärt. Es gilt

(75)
$$\mu_0(q, g)=\eta(q, 1) \qquad (g\equiv 1 \bmod 2).$$

Weiter sei

$$a_\nu(q, g) = \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_\nu(q, g)} > 0 \qquad (\nu = -\tau(q, g), \cdots, -1). \tag{76}$$

Dann gilt $a_\nu(q, g) \in \boldsymbol{R}$ *und*

$$a_{-1}(q, g) < a_{-2}(q, g) < \cdots. \tag{77}$$

Die Eigenwerte $\lambda_{-\rho(q,g)}, \cdots, \lambda_{-1}$ *heißen "exzeptionell". Für* $g \equiv 1 \bmod 2$ *treten diese nicht auf. Es gilt also*

$$\rho(q, g) = 0 \qquad (g \equiv 1 \bmod 2). \tag{78}$$

Weiter hat man

$$\frac{3}{16} \leqq \lambda_{-\rho(q,g)}(q, g) < \cdots < \lambda_{-1}(q, g) < \frac{1}{4} \qquad (g \equiv 0 \bmod 2), \tag{79}$$

$$0 < a_{-1}(q, g) < \cdots < a_{-\rho(q,g)}(q, g) \leqq \frac{1}{4} \qquad (g \equiv 0 \bmod 2). \tag{80}$$

Es gilt

$$\tau(q, 0) = \rho(q, 0) + 1, \tag{81}$$

$$\lambda_{-\rho(q,g^*)-1}(q, g^*) = 0, \tag{82}$$

$$a_{-\rho(q,g^*)-1}(q, g^*) = \frac{1}{2}, \tag{83}$$

$$\mu_{-\rho(q,0)-1}(q, 0) = 1, \tag{84}$$

$$\tau(q, 1) = 0. \tag{85}$$

Dabei ist der Eigenwert $\lambda_{-\rho(q,g^*)-1}(q, g^*)$ *durch* (82) *erklärt. Hiermit sind die Fälle* $g=0, 1,$ *und wegen* (70) *auch* $g=-1$ *erledigt.*

Jetzt sei

$$g \equiv 0 \bmod 2, \qquad |g| \geqq 2.$$

Dann setze man

$$\tau(q, g) = \tau(q, |g|) = \frac{|g|}{2} + \rho(q, 0) \tag{86}$$

und definiere

$$\lambda_\nu(q, g) = \lambda_\nu(q, |g|) = (-\nu - \rho(q, 0))(1 + \rho(q, 0) + \nu) \qquad (\nu = -\tau(q, g), \cdots, -\rho(q, g) - 1). \tag{87}$$

Andere nicht positive Eigenwerte kann der Operator $-\tilde{\Delta}_g$ *nicht haben. Es gilt*

$$a_\nu(q, g) = a_\nu(q, |g|) = -\left(\nu + \rho(q, 0) + \frac{1}{2}\right) \quad (\nu = -\tau(q, g), \cdots, -\rho(q, g) - 1), \tag{88}$$

$$\mu_\nu(q, g) = \mu_\nu(q, |g|) = \eta(q, 2(-\nu - \rho(q, 0))) \quad (\nu = -\tau(q, g), \cdots, -\rho(q, g) - 1). \tag{89}$$

Für

(90) $$g \equiv 1 \bmod 2, \qquad |g| \geqq 3$$

setze man

(91) $$\tau(q, g) = \tau(q, |g|) = \frac{|g|-1}{2}$$

und definiere

(92) $$\lambda_\nu(q, g) = \lambda_\nu(q, |g|) = \frac{1}{4} - \nu^2 \qquad (\nu = -\tau(q, g), \cdots, -1).$$

Andere nicht positive Eigenwerte kann der Operator $-\tilde{\Delta}_g$ *nicht haben. Es gilt*

(93) $$a_\nu(q, g) = a_\nu(q, |g|) = -\nu \qquad (\nu = -\tau(q, g), \cdots, -1),$$

(94) $$\mu_\nu(q, g) = \mu_\nu(q, |g|) = \eta(q, -2\nu+1) \qquad (\nu = -\tau(q, g), \cdots, -1).$$

BEWEIS. Alles, was weiterhin nicht erwähnt wird, steht in Christian [4], Satz 1. Beweise der Aussage (69) findet man auch bei Efrat [8], Seite 83, Theorem 9.7 und Fischer [**11**], Seite 38, 1.6.5 Theorem. Es sei $g \equiv 1 \bmod 2$. Wegen (71) ist $\mu_0(q, g) = \mu_0(q, 1)$. Aus Christian [4], Hilfssatz 3, folgt $\mu_0(q, 1) = \eta(q, 1)$. Daraus folgt (75). Die Aussage (79) folgt aus (68) und Christian [4], Satz 16. Daraus folgt (80). Die Aussage (84) bekommt man aus Roelcke [**27**], Teil I, Seite 319, Satz 5.1; (85) aus (68). Aus Roelcke [**27**], Teil I, Seite 306, Lemma 3.1 und Lemma 3.2 und Seite 320, Satz 5.4 folgt, daß die nicht-positiven Eigenwerte des Operators $-\tilde{\Delta}_g$ nur die Gestalt (87) bzw. (92) haben können. Wir wählen alle diese Zahlen als "Eigenwerte", wobei die zugehörigen Vielfachheiten aber Null sein können. Dann gelten (86), (88), (91), (93). Aus Roelcke [**27**], Teil I, Seite 306, Lemma 3.1 γ) folgt

(95) $$\mu_\nu(q, g) = \mu_\nu(q, |g|) = \mu_{-\tau(q, 2(-\nu-\rho(q, 0)))}(q, 2(-\nu-\rho(q, 0))) \quad (g \equiv 0 \bmod 2),$$

(96) $$\mu_\nu(q, g) = \mu_\nu(q, |g|) = \mu_{-\tau(q, -2\nu+1)}(q, -2\nu+1) \qquad (g \equiv 1 \bmod 2).$$

Schließlich liefert Christian [4], Hilfssatz 3 die Aussage

(97) $$\mu_{-\tau(q, |g|)}(q, |g|) = \eta(q, |g|).$$

Aus (95), (96), (97) folgen (89), (94). Satz 1 ist bewiesen.

Die Gammafunktion $\Gamma(z)$ hat Pole erster Ordnung bei den nicht-positiven ganzen Argumentstellen. Es gilt

(98) $$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (n \in 0 \cup \boldsymbol{N}).$$

HILFSSATZ 6 (Stirlingsche Formel). *Es gilt*

(99) $$\lim_{|z| \to \infty} \frac{\Gamma(z)}{z^{z-1/2} e^{-z} \sqrt{2\pi}} = 1,$$

wenn sich z von der Achse der negativen reellen Zahlen unendlich entfernt.

BEWEIS. Nielsen [**25**], Seite 96, (1).

Wie üblich setze man

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{100}$$

$\psi(z)$ ist in $\boldsymbol{C}$ meromorph und hat nur Pole erster Ordnung bei nicht-positiven ganzen Argumentstellen.

Aus Nielsen [**25**], Seite 15, (2) folgt

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \psi(z) = -1. \tag{101}$$

Aus Fischer [**11**], Seite 121, (3.2.2) folgt

$$\psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} + O(z^{-2}) \qquad (|z| \to \infty) \quad (|\arg z| \leqq \pi - \delta < \pi). \tag{102}$$

HILFSSATZ 7. *Die Barnes'sche G-Funktion $\check{G}(z)$ ist holomorph in $\boldsymbol{C}$. Ihre Nullstellen sind genau die Punkte $1-n$ mit Ordnung n ($n \in \boldsymbol{N}$). Es gilt*

$$\check{G}(1) = 1, \tag{103}$$

$$\check{G}(z+1) = \Gamma(z)\check{G}(z), \tag{104}$$

$$\frac{\check{G}'(z+1)}{\check{G}(z+1)} = \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} - z + z\psi(z). \tag{105}$$

BEWEIS. Barnes [**1**].

§ 2. Einige Resultate von Fischer.

In diesem Paragraphen wollen wir Fischer [**11**], Teil 2 einschließlich der ersten zwei Seiten von Teil 3 auf den Fall der Gruppen $\mathcal{M}(q)$ übertragen. Es gilt $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(q)$ ($q=1, 2$) und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{M}(q)$ ($q \geqq 3$). Alle Formeln erweisen sich als symmetrisch in g und $-g$. Für das Folgende ist es daher praktisch, $|g|$ statt g zu schreiben. Der Resolventenkern zum Operator $-\tilde{\Delta}_g$ werde durch Fischer [**11**], Seite 26, (1.4.7) erklärt, wobei für $q \geqq 3$ der Faktor 1/2 wegzulassen ist. Wie bei Fischer [**11**] teilen wir diese Summe dann in vier Teilsummen auf, entsprechend $M=I=$Identität, M hyperbolisch, M elliptisch, M parabolisch. Wie bei Fischer [**11**] führen wir die Funktionen $\Xi_{\mathrm{I}}(s)$, $\Xi_{\mathrm{hyp}}(s)$, $\Xi_{\mathrm{ell}}(s)$, $\Xi_{\mathrm{par}}(s)$ ein.

HILFSSATZ 8. *Der Anteil der Identität ist*

$$(106)\quad \Xi_I(q, |g|, s) = \exp\Big[\frac{qp(q)}{6}\Big\{s\log(2\pi)+s(1-s)+\frac{|g|+1}{2}\log\Gamma\Big(s+\frac{|g|}{2}\Big)$$
$$+\frac{1-|g|}{2}\log\Gamma\Big(s-\frac{|g|}{2}\Big)-\log\check{G}\Big(s+\frac{|g|}{2}+1\Big)-\log\check{G}\Big(s-\frac{|g|}{2}+1\Big)\Big\}\Big],$$

$$(107)\quad \frac{\Xi_I'}{\Xi_I}(q, |g|, s) = -(2s-1)\frac{qp(q)}{12}\Big(\psi\Big(s+\frac{|g|}{2}\Big)+\psi\Big(s-\frac{|g|}{2}\Big)\Big).$$

BEWEIS. Man benutze (13) und Fischer [11], Seite 114, 3.1.3 Remark.

HILFSSATZ 9. *Der Anteil der hyperbolischen Elemente ist für* $\mathrm{Re}\, s>1$

$$(108)\quad \Xi_{\mathrm{hyp}}(q, |g|, s) = \Xi_{\mathrm{hyp}}(q, g^*, s) = \prod_{\substack{\{P_0\}_{\mathcal{M}(q)} \\ |\mathrm{Tr}\, P_0|>2}} \prod_{m=0}^{\infty} (1-(\mathrm{sign}\,\mathrm{Tr}\, P_0)^{|g|} N(P_0)^{-s-m}),$$

$$(109)\quad \frac{\Xi'_{\mathrm{hyp}}}{\Xi_{\mathrm{hyp}}}(q, |g|, s) = \frac{\Xi'_{\mathrm{hyp}}}{\Xi_{\mathrm{hyp}}}(q, g^*, s) = \sum_{\substack{\{P\}_{\mathcal{M}(q)} \\ |\mathrm{Tr}\, P|>2}} (\mathrm{sign}\,\mathrm{Tr}\, P)^{|g|} \log N(P_0) \frac{N(P)^{-s}}{1-N(P)^{-1}}$$
$$= \sum_{\substack{\{P_0\}_{\mathcal{M}(q)} \\ |\mathrm{Tr}\, P_0|>2}} \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{sign}\,\mathrm{Tr}\, P_0)^{|g|n} \log N(P_0) \frac{N(P_0)^{-ns}}{1-N(P_0)^{-n}}.$$

Hierbei durchlaufen $\{P\}_{\mathcal{M}(q)}$ *die hyperbolischen und* $\{P_0\}_{\mathcal{M}(q)}$ *die primitiven hyperbolischen Konjugiertenklassen von* $\mathcal{M}(q)$. *Weiter ist* P_0 *das zu* P *gehörige primitive hyperbolische Element. Für* $q=1, 2$ *sind* $\pm P$ *bzw.* $\pm P_0$ *zu identifizeiren. Die Ausdrücke* (108), (109) *konvergieren für* $\mathrm{Re}\, s>1$ *absolut und stellen holomorphe Funktionen in* s *dar.*

BEWEIS. Wie bei Fischer [11], Abschnitt 2.2, mit folgendem Unterschied: Für $q\geqq 3$ ist $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\notin\mathcal{M}(q)$. Wir können uns daher in dem Produkt (108) bzw. der Summe (109) nicht auf die P mit $\mathrm{Tr}\, P>2$ beschränken, sondern wir müssen alle P mit $|\mathrm{Tr}\, P|>2$ betrachten. Ist $D(P)$ durch (20) erklärt, so folgt aus (2), (20), (24)

$$(110)\quad j_{D(P)}(g\,;\, z) = (\mathrm{sign}\,\mathrm{Tr}\, P)^g.$$

Führt man dann alle Rechnungen von Fischer [11], Abschnitt 2.2 durch, so kommt man auf (108), (109). Im Falle $q=1, 2$ ist $g\equiv 0 \bmod 2$ laut (7). Dann besteht kein Unterschied zu Fischer.

HILFSSATZ 10. *Der Anteil der elliptischen Elemente ist*

$$(111)\quad \Xi_{\mathrm{ell}}(q, |g|, s) = 1 \qquad (q>1),$$

$$(112)\quad \frac{\Xi'_{\mathrm{ell}}}{\Xi_{\mathrm{ell}}}(q, |g|, s) = 0 \qquad (q>1),$$

$$(113)\qquad \Xi_{\mathrm{ell}}(1,|g|,s)=\Big(\frac{\Gamma(s/2+|g|/4+1/2)\Gamma(s/2-|g|/4+1/2)}{\Gamma(s/2+|g|/4)\Gamma(s/2-|g|/4)}\Big)^{1/4((-1)^{|g|/2})}\cdot$$

$$\Big(\frac{\Gamma(s/3-|g|/6+2/3)}{\Gamma(s/3+|g|/6)}\Big)^{\frac{1}{3}(\frac{|g|+1}{3})}\Big(\frac{\Gamma(s/3-|g|/6)}{\Gamma(s/3+|g|/6+2/3)}\Big)^{\frac{1}{3}(\frac{|g|-1}{3})}\cdot$$

$$\Big(\frac{\Gamma(s/3-|g|/6+1/3)}{\Gamma(s/3+|g|/6+1/3)}\Big)^{\frac{1}{3}(\frac{|g|}{3})}\qquad (q=1,\ |g|\equiv 0 \bmod 2),$$

$$(114)\qquad \frac{\Xi'_{\mathrm{ell}}}{\Xi_{\mathrm{ell}}}(1,|g|,s)=\frac{(-1)^{|g|/2}}{8}\Big(\psi\Big(\frac{s}{2}+\frac{|g|}{4}+\frac{1}{2}\Big)+\psi\Big(\frac{s}{2}-\frac{|g|}{4}+\frac{1}{2}\Big)-\psi\Big(\frac{s}{2}+\frac{|g|}{4}\Big)$$

$$-\psi\Big(\frac{s}{2}-\frac{|g|}{4}\Big)\Big)+\frac{1}{9}\Big(\frac{|g|+1}{3}\Big)\Big(\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}+\frac{2}{3}\Big)-\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}\Big)\Big)$$

$$+\frac{1}{9}\Big(\frac{|g|-1}{3}\Big)\Big(\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}\Big)-\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}+\frac{2}{3}\Big)\Big)+\frac{1}{9}\Big(\frac{|g|}{3}\Big)\Big(\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}+\frac{1}{3}\Big)$$

$$-\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}+\frac{1}{3}\Big)\Big)\qquad (q=1,\ |g|\equiv 0 \bmod 2).$$

Dabei sind $(-)$ Legendresche Symbole. Diese verschwinden, wenn Zähler und Nenner nicht teilerfremd sind.

Beweis. Für $q>1$ ist $\mathcal{M}(q)$ fixpunktfrei; daraus folgen (111), (112). Für $q=1$ genügt es, (114) zu beweisen. Dann ist klar, daß (113) eine Stammfunktion ist. Wegen $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}(1)$ können wir die Resultate von Fischer [**11**] direkt anwenden. Man setze

$$(115)\qquad J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad S=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Die elliptischen Konjugiertenklassen von $\mathcal{M}(1)$ werden dann durch J, S, S^2 repräsentiert. Wir definieren $\nu(R)$ und $\Theta=\Theta(R)$ wie bei Fischer [**11**], S. 61, 2.3.4 Proposition.

Dann ist

$$(116)\qquad \nu(J)=2,\qquad \nu(S)=\nu(S^2)=3,$$

$$(117)\qquad \Theta(J)=\frac{\pi}{2},\qquad \Theta(S)=\frac{\pi}{3},\qquad \Theta(S^2)=\frac{2\pi}{3}.$$

Aus Fischer [**11**], Seite 61, 2.3.4 Proposition und Seite 68 folgt mit $k=|g|/2$

$$(118)\qquad \frac{\Xi'_{\mathrm{ell}}}{\Xi_{\mathrm{ell}}}(q,|g|,s)=\frac{ie^{\pi i|g|/2}}{2\sin(\pi/2)}\cdot\frac{1}{4}\Big(e^{\pi i/2}\psi\Big(\frac{s}{2}+\frac{|g|}{4}\Big)-e^{-\pi i/2}\psi\Big(\frac{s}{2}-\frac{|g|}{4}\Big)$$

$$+e^{3\pi i/2}\psi\Big(\frac{s}{2}+\frac{|g|}{4}+\frac{1}{2}\Big)-e^{-3\pi i/2}\psi\Big(\frac{s}{2}-\frac{|g|}{4}+\frac{1}{2}\Big)\Big)+\frac{ie^{\pi i|g|/3}}{2\sin(\pi/3)}\frac{1}{9}\Big(e^{\pi i/3}\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}\Big)$$

$$-e^{-\pi i/3}\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}\Big)+e^{\pi i}\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}+\frac{1}{3}\Big)-e^{-\pi i}\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}+\frac{1}{3}\Big)$$

$$+e^{5\pi i/3}\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}+\frac{2}{3}\Big)-e^{-5\pi i/3}\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}+\frac{2}{3}\Big)\Big)$$

$$+\frac{ie^{2\pi i|g|/3}}{2\sin(2\pi/3)}\frac{1}{9}\Big(e^{2\pi i/3}\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}\Big)-e^{-2\pi i/3}\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}\Big)+e^{2\pi i}\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}+\frac{1}{3}\Big)$$

$$-e^{-2\pi i}\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}+\frac{1}{3}\Big)+e^{10\pi i/3}\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}+\frac{2}{3}\Big)-e^{-10\pi i/3}\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}+\frac{2}{3}\Big)\Big).$$

Also

$$\frac{\Xi'_{\text{ell}}}{\Xi_{\text{ell}}}(q,|g|,s)=\frac{(-1)^{|g|/2}}{8}\Big(\psi\Big(\frac{s}{2}+\frac{|g|}{4}+\frac{1}{2}\Big)+\psi\Big(\frac{s}{2}-\frac{|g|}{4}+\frac{1}{2}\Big)\tag{119}$$

$$-\psi\Big(\frac{s}{2}+\frac{|g|}{4}\Big)-\psi\Big(\frac{s}{2}-\frac{|g|}{4}\Big)\Big)+\frac{1}{9}\Big\{\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}(|g|+1)\Big(\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}+\frac{2}{3}\Big)$$

$$-\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}\Big)\Big)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}(|g|-1)\Big(\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}\Big)-\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}+\frac{2}{3}\Big)\Big)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}|g|\Big(\psi\Big(\frac{s}{3}-\frac{|g|}{6}+\frac{1}{3}\Big)-\psi\Big(\frac{s}{3}+\frac{|g|}{6}+\frac{1}{3}\Big)\Big)\Big\}.$$

Nun gilt für $|g|\equiv 0 \bmod 2$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}(|g|+1)=\Big(\frac{|g|+1}{3}\Big),\tag{120}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}(|g|-1)=\Big(\frac{|g|-1}{3}\Big),\tag{121}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}|g|=\Big(\frac{|g|}{3}\Big).\tag{122}$$

Dabei sind $(-)$ Legendresche Symbole, welche verschwinden, wenn Zähler und Nenner nicht teilerfremd sind.

Aus (119), (120), (121), (122) folgt (114). Hilfssatz 10 ist bewiesen.

HILFSSATZ 11. *Der Anteil der parabolischen Elemente ist wie folgt gegeben. Die* $\mathfrak{g}_1$, p_m, q_n, M, N *seien wie bei Fischer* [**11**], *Seite* 96, *erklärt. Dann ist für* $\operatorname{Re} s>1$

$$\Xi_{\text{par}}(q,|g|,s)=2^{-p(q)s}\Big(\frac{\Gamma(s+|g|/2)\Gamma(s-|g|/2)}{\Gamma(s)^2\Gamma(s+1/2)^2}\Big)\cdot\tag{123}$$

$$\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^{(p(q)/2)(1-\phi_{11}(|g|,1/2))}\cdot\mathfrak{g}_1^{-s}\cdot\prod_{m=1}^{M}\Big(1+\frac{s-1/2}{p_m-1/2}\Big)\prod_{n=1}^{N}\Big(1+\frac{s-1/2}{q_n-1/2}\Big)^{-1}\cdot$$

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{s-1/2}{q_n-1/2}\Big)^2\Big)\prod_{n\geqq N+1}\Big(1+\frac{s-1/2}{q_n-1/2}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{s-1/2}{\bar{q}_n-1/2}\Big)^{-1}\cdot$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{(q_n-1/2)^2}+\frac{1}{(\bar{q}_n-1/2)^2}\right)\right)$$

$$\text{(124)}\quad \frac{\Xi'_{\text{par}}}{\Xi_{\text{par}}}(q,|g|,s)=-p(q)\log 2+\frac{p(q)}{2}\psi\left(s+\frac{|g|}{2}\right)+\frac{p(q)}{2}\psi\left(s-\frac{|g|}{2}\right)$$

$$-p(q)\psi(s)-p(q)\psi\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{p(q)}{2s-1}\left(1-\phi_{11}\left(|g|,\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$+(2s-1)\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(s-1/2)^2+t^2}-\frac{1}{1/4+t^2}\right)\frac{\phi'}{\phi}\left(|g|,\frac{1}{2}+it\right)dt\,.$$

Beweis. Aus Fischer [**11**], Seite 103, folgt

$$\text{(125)}\quad \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(s-1/2)^2+t^2}-\frac{1}{1/4+t^2}\right)\frac{\phi'}{\phi}\left(\frac{1}{2}+it\right)dt$$

$$=\left(1-\frac{1}{2s-1}\right)\log g_1+\frac{1}{2s-1}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1}{s-1+p_m}-\frac{2s-1}{p_m}\right)-\frac{1}{2s-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{s-1+q_n}-\frac{2s-1}{q_n}\right)$$

$$-\frac{1}{2s-1}\sum_{n\geqq N+1}\left(\frac{1}{s-1+q_n}+\frac{1}{s-1+\bar{q}_n}-\frac{2s-1}{q_n}-\frac{2s-1}{\bar{q}_n}\right)\qquad\left(\operatorname{Re}s>\frac{1}{2}\right).$$

Damit ist klar, daß (123) eine Stammfunktion von (124) ist. (124) folgt aus Fischer [**11**], Seite 101, 2, 4.20 Lemma, Seite 103 und (34) dieser Arbeit. Hierbei ist zu beachten, daß für die parabolischen Elemente N aus $\mathcal{M}(q)$ $(q\geqq 3)$ stets $\operatorname{Tr} N=2>0$ gilt. Daher kann man Fischers Resultate anwenden.

Insgesamt gilt

$$\text{(126)}\quad \Xi(q,|g|,s)=\Xi_I(q,|g|,s)\cdot\Xi_{\text{hyp}}(q,|g|,s)\cdot\Xi_{\text{ell}}(q,|g|,s)\cdot\Xi_{\text{par}}(q,|g|,s),$$

$$\text{(127)}\quad \frac{\Xi'}{\Xi}(q,|g|,s)=\frac{\Xi'_I}{\Xi_I}(q,|g|,s)+\frac{\Xi'_{\text{hyp}}}{\Xi_{\text{hyp}}}(q,|g|,s)+\frac{\Xi'_{\text{ell}}}{\Xi_{\text{ell}}}(q,|g|,s)+\frac{\Xi'_{\text{par}}}{\Xi_{\text{par}}}(q,|g|,s).$$

§ 3. Die Selbergsche Spurformel.

Definition 4. Es seien $\delta>0$, r eine komplexe Variable und $H(r)$ eine holomorphe Funktion in dem Streifen

$$\text{(128)}\quad \left\{r\in\boldsymbol{C}\,;\,|\operatorname{Im} r|<\max\left(\frac{1}{2},\frac{|g|-1}{2}\right)+\delta\right\}.$$

Es gelte

$$\text{(129)}\quad H(r)=H(-r)\qquad(\text{für alle } r)$$

und

$$\text{(130)}\quad |H(r)|=O(|\operatorname{Re} r|^{-5-\delta})\qquad(\text{für } |\operatorname{Re} r|\to\infty)\,.$$

Man bilde die Fouriertransformierte

$$G(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(r)e^{-iru}dr. \tag{131}$$

Dann ist

$$H(r)=\int_{-\infty}^{\infty}G(u)e^{iur}du. \tag{132}$$

DEFINITION 5. Es sei

$$T_1(q, |g|, H)=\sum_{\nu=-\tau(q,|g|)}^{-\rho(q,g^*)-1}\mu_\nu(q, |g|)H(ia_\nu(q, |g|)), \tag{133}$$

$$T_2(q, g^*, H)=\sum_{\nu=-\rho(q,g^*)}^{-1}\mu_\nu(q, g^*)H(ia_\nu(q, g^*)), \tag{134}$$

$$T_3(q, g^*, H)=\mu_0(q, g^*)H(0), \tag{135}$$

$$T_4(q, g^*, H)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu(q, g^*)H(r_\nu(q, g^*)), \tag{136}$$

$$A=T_1(q, |g|, H)+T_2(q, g^*, H)+T_3(q, g^*, H)+T_4(q, g^*, H). \tag{137}$$

HILFSSATZ 12. *Es sei B eine reelle Zahl aus dem Intervall*

$$\max\left(\frac{1}{2}, \frac{|g|-1}{2}\right)<B<\max\left(\frac{1}{2}, \frac{|g|-1}{2}\right)+\delta. \tag{138}$$

Dann ist

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\frac{\Xi'}{\Xi}\left(q, |g|, \frac{1}{2}+u\right)du. \tag{139}$$

BEWEIS. Man benutze (71) und Fischer [**11**], Seite 164, 4.1.2 Notation und 4.1.3 Lemma.

Man setze

$$A_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\frac{\Xi_I'}{\Xi_I}\left(q, |g|, \frac{1}{2}+u\right)du, \tag{140}$$

$$A_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\frac{\Xi_{\mathrm{hyp}}'}{\Xi_{\mathrm{hyp}}}\left(q, g^*, \frac{1}{2}+u\right)du, \tag{141}$$

$$A_3=\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\frac{\Xi_{\mathrm{ell}}'}{\Xi_{\mathrm{ell}}}\left(q, |g|, \frac{1}{2}+u\right)du, \tag{142}$$

$$A_4=\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\frac{\Xi_{\mathrm{par}}'}{\Xi_{\mathrm{par}}}\left(q, |g|, \frac{1}{2}+u\right)du. \tag{143}$$

Aus (108), (127), (139) bis (143) folgt

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4. \tag{144}$$

Man hat also für A die beiden Darstellungen (137) und (144). Das ist die Selbergsche Spurformel.

DEFINITION 6. Im folgenden seien $f_\nu(u)$ ($\nu=0, 1, 2, 3, \cdots$) Funktionen mit folgenden Eigenschaften: $f_\nu(u)$ ist für alle $u\in \boldsymbol{C}$ meromorph und besitzt nur Pole erster Ordnung. Auf der Geraden $\operatorname{Re} u=0$ ist $f_\nu(u)$ holomorph. Für $v\in \boldsymbol{R}$ gilt

$$f_\nu(iv) = O(|v|^4) \qquad (|v|\to\infty). \tag{145}$$

HILFSSATZ 13. *Es gilt*

$$A_1 = \frac{qp(q)}{12} \sum_{\substack{\nu=2 \\ \nu\equiv|g| \bmod 2}}^{|g|} (\nu-1)H\Big(i\frac{\nu-1}{2}\Big)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} f_1(u)H(iu)du. \tag{146}$$

BEWEIS. Aus (107), (140) folgt

$$A_1 = -\frac{qp(q)}{12\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty} H(iu)u\phi\Big(\frac{1}{2}+\frac{|g|}{2}+u\Big)du-\frac{qp(q)}{12\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty} H(iu)u\phi\Big(\frac{1}{2}-\frac{|g|}{2}+u\Big)du. \tag{147}$$

Es sei R eine große positive reelle Zahl und $\mathfrak{C}(c, B, R)$ ($c\leqq 1/4$) das positiv durchlaufene Rechteck mit den Ecken $c-iR$, $B-iR$, $B+iR$, $c+iR$. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{C}(0,B,R)} H(iu)u\phi\Big(\frac{1}{2}+\frac{|g|}{2}+u\Big)du = 0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}(0,B,R)} H(iu)u\phi\Big(u-\frac{|g|-1}{2}\Big)du = C,$$

$$C = \text{Summe der Residuen von } H(iu)u\phi\Big(u-\frac{|g|-1}{2}\Big) \text{ im Intervall } 0<u<B. \tag{148}$$

Läßt man $R\to\infty$ streben, so folgt wegen (102), (130)

$$A_1 = -\frac{qp(q)}{6}C+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} f_1(u)H(iu)du. \tag{149}$$

Dabei ist wegen (102)

$$f_1(u) = -\frac{qp(q)}{6}u\Big(\phi\Big(\frac{1}{2}+\frac{|g|}{2}+u\Big)+\phi\Big(u-\frac{|g|-1}{2}\Big)\Big) \tag{150}$$

eine Funktion der in Definition 6 genannten Art.

Zur Berechnung von C bedenken wir, daß $\phi(u-(|g|-1)/2)$ nur bei

$$u = \frac{|g|-1}{2}-m \qquad (m\in 0\cup \boldsymbol{N}) \tag{151}$$

Pole besitzt. Aus $0<u<B$ und (138) folgt leicht

$$m = 0, \cdots, \Big[\frac{|g|-2}{2}\Big]. \tag{152}$$

Also

$$C = \sum_{m=0}^{[(|g|-2)/2]} \operatorname*{Res}_{u=(|g|-1)/2-m} H(iu)u\phi\Big(u-\frac{|g|-1}{2}\Big). \tag{153}$$

Wegen (101) somit

$$C = -\sum_{m=0}^{[(|g|-2)/2]}\Big(\frac{|g|-1}{2}-m\Big)H\Big(i\Big(\frac{|g|-1}{2}-m\Big)\Big). \tag{154}$$

Substituiert man hier $\nu=|g|-2m$, so folgt

$$C=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{\nu=2\\ \nu\equiv|g|\bmod 2}}^{|g|}(\nu-1)H\Big(i\frac{\nu-1}{2}\Big). \tag{155}$$

Aus (149), (155) bekommt man (146). Hilfssatz 13 ist bewiesen.

DEFINITION 7. Es sei

$$\mathcal{Z}(q,g,G)=\mathcal{Z}(q,g^*,G)=\sum_{\substack{\{P\}\mathcal{M}(q)\\ |\operatorname{Tr}P|>2}}(\operatorname{sign}\operatorname{Tr}P)^g\frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2}-N(P)^{-1/2}}G(\log N(P)). \tag{156}$$

Dabei durchläuft $\{P\}_{\mathcal{M}(q)}$ die hyperbolischen Konjugiertenklassen von $\mathcal{M}(q)$. Weiter ist P_0 das zu P gehörige primitive hyperbolische Element. Für $q=1, 2$ sind $\pm P$ und $\pm P_0$ zu identifizieren.

HILFSSATZ 14. *Es gilt*

$$A_2=\mathcal{Z}(q,g^*,G). \tag{157}$$

BEWEIS. Fischer [11], Seite 169, 4.1.5 Lemma.

HILFSSATZ 15. *Es gilt*

$$A_3=0\qquad(q>1). \tag{158}$$

Für $q=1$ ist $|g|\equiv 0 \bmod 2$. Dann hat man

$$A_3=\sum_{\substack{\nu=2\\ \nu\equiv|g|\equiv 0\bmod 2}}^{|g|}\Big(\frac{1}{4}(-1)^{\nu/2}-\frac{1}{3}\Big(\frac{\nu-1}{3}\Big)\Big)H\Big(i\frac{\nu-1}{2}\Big)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}f_2(u)H(iu)du. \tag{159}$$

BEWEIS. (158) folgt aus (112) und (142). Nun sei $q=1$ und $|g|\equiv 0 \bmod 2$. Aus (114), (142) folgt

$$\begin{aligned}A_3=&\frac{(-1)^{|g|/2}}{8}\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\Big(\frac{|g|+3}{4}+\frac{u}{2}\Big)du\\
&+\frac{(-1)^{|g|/2}}{8}\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\Big(\frac{u}{2}-\frac{|g|-3}{4}\Big)du\\
&+\frac{(-1)^{(|g|-2)/2}}{8}\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\Big(\frac{|g|+1}{4}+\frac{u}{2}\Big)du\\
&+\frac{(-1)^{(|g|-2)/2}}{8}\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\Big(\frac{u}{2}-\frac{|g|-1}{4}\Big)du\\
&+\frac{1}{9}\Big(\frac{|g|+1}{3}\Big)\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\Big(\frac{u}{3}-\frac{|g|-5}{6}\Big)du\\
&-\frac{1}{9}\Big(\frac{|g|+1}{3}\Big)\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\Big(\frac{1+|g|}{6}+\frac{u}{3}\Big)du\\
&+\frac{1}{9}\Big(\frac{|g|-1}{3}\Big)\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\Big(\frac{u}{3}-\frac{|g|-1}{6}\Big)du\end{aligned} \tag{160}$$

$$-\frac{1}{9}\left(\frac{|g|-1}{3}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\left(\frac{5+|g|}{6}+\frac{u}{3}\right)du$$
$$+\frac{1}{9}\left(\frac{|g|}{3}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\left(\frac{u}{3}-\frac{|g|-3}{6}\right)du$$
$$-\frac{1}{9}\left(\frac{|g|}{3}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\left(\frac{3+|g|}{6}+\frac{u}{3}\right)du\,.$$

Überall dort, wo $\phi(u/2+\text{positiver Ausdruck})$ oder $\phi(u/3+\text{positiver Ausdruck})$ steht, kann man den Integrationsweg auf $-i\infty$, $+i\infty$ verschieben. Es folgt

$$(161)\quad A_3=\frac{(-1)^{|g|/2}}{4}\frac{1}{2\pi i}\int_{B/2-i\infty}^{B/2+i\infty}H(i2u)\phi\left(u-\frac{|g|-3}{4}\right)du$$
$$+\frac{(-1)^{(|g|-2)/2}}{4}\frac{1}{2\pi i}\int_{B/2-i\infty}^{B/2+i\infty}H(i2u)\phi\left(u-\frac{|g|-1}{4}\right)du$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{|g|+1}{3}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{B/3-i\infty}^{B/3+i\infty}H(i3u)\phi\left(u-\frac{|g|-5}{6}\right)du$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{|g|}{3}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{B/3-i\infty}^{B/3+i\infty}H(i3u)\phi\left(u-\frac{|g|-3}{6}\right)du$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{|g|-1}{3}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{B/3-i\infty}^{B/3+i\infty}H(i3u)\phi\left(u-\frac{|g|-1}{6}\right)du+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}f_4(u)H(iu)du\,.$$

Jetzt fahren wir fort wie im Beweis von Hilfssatz 13. Wir integrieren über $\mathfrak{C}(0, B/2, R)$ bzw. $\mathfrak{C}(0, B/3, R)$ und lassen R gegen ∞ streben. Es folgt

$$(162)\qquad A_3=C_1+C_2+C_3+C_4+C_5+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}f_2(u)H(iu)du\,.$$

Hierbei ist

$$(163)\quad C_1=\frac{(-1)^{|g|/2}}{4}\left[\text{Residuum von } H(i2u)\phi\left(u-\frac{|g|-3}{4}\right) \text{ im Intervall } 0<u<\frac{B}{2}\right],$$

$$(164)\quad C_2=\frac{(-1)^{(|g|-2)/4}}{4}\left[\text{Residuum von } H(i2u)\phi\left(u-\frac{|g|-1}{4}\right) \text{ im Intervall } 0<u<\frac{B}{2}\right],$$

$$(165)\quad C_3=\frac{1}{3}\left(\frac{|g|+1}{3}\right)\left[\text{Residuum von } H(i3u)\phi\left(u-\frac{|g|-5}{6}\right) \text{ im Intervall } 0<u<\frac{B}{3}\right],$$

$$(166)\quad C_4=\frac{1}{3}\left(\frac{|g|}{3}\right)\left[\text{Residuum von } H(i3u)\phi\left(u-\frac{|g|-3}{6}\right) \text{ im Intervall } 0<u<\frac{B}{3}\right],$$

$$(167)\quad C_5=\frac{1}{3}\left(\frac{|g|-1}{3}\right)\left[\text{Residuum von } H(i3u)\phi\left(u-\frac{|g|-1}{6}\right) \text{ im Intervall } 0<u<\frac{B}{3}\right].$$

Man erhält dann

$$(168)\quad C_1=-\frac{(-1)^{|g|/2}}{4}\sum_{m=0}^{[(|g|-4)/4]}H\left(i\frac{|g|-3-4m}{2}\right)=\sum_{\substack{\nu=2\\ \nu\equiv|g|-2 \bmod 4}}^{|g|}\frac{(-1)^{\nu/2}}{4}H\left(i\frac{\nu-1}{2}\right),$$

$$(169)\quad C_2=\frac{(-1)^{|g|/2}}{4}\sum_{m=0}^{[(|g|-2)/4]}H\Big(i\frac{|g|-1-4m}{2}\Big)=\sum_{\substack{\nu=2\\ \nu\equiv|g|\bmod 4}}^{|g|}\frac{1}{4}(-1)^{\nu/2}H\Big(i\frac{\nu-1}{2}\Big),$$

$$(170)\quad C_3=-\frac{1}{3}\Big(\frac{|g|+1}{3}\Big)\sum_{m=0}^{[(|g|-6)/6]}H\Big(i\frac{|g|-5-6m}{2}\Big)=\sum_{\substack{\nu=2\\ \nu\equiv|g|-4\bmod 6}}^{|g|}-\frac{1}{3}\Big(\frac{\nu-1}{3}\Big)H\Big(i\frac{\nu-1}{2}\Big),$$

$$(171)\quad C_4=-\frac{1}{3}\Big(\frac{|g|}{3}\Big)\sum_{m=0}^{[(|g|-4)/6]}H\Big(i\frac{|g|-3-6m}{2}\Big)=\sum_{\substack{\nu=2\\ \nu\equiv|g|-2\bmod 6}}^{|g|}-\frac{1}{3}\Big(\frac{\nu-1}{3}\Big)H\Big(i\frac{\nu-1}{2}\Big),$$

$$(172)\quad C_5=-\frac{1}{3}\Big(\frac{|g|-1}{3}\Big)\sum_{m=0}^{[(|g|-2)/6]}H\Big(i\frac{|g|-1-6m}{2}\Big)=\sum_{\substack{\nu=2\\ \nu\equiv|g|\bmod 6}}^{|g|}-\frac{1}{3}\Big(\frac{\nu-1}{3}\Big)H\Big(i\frac{\nu-1}{2}\Big).$$

Aus (162), (168) bis (172) folgt (159). Hilfssatz 15 ist bewiesen.

HILFSSATZ 16. *Es gilt*

$$(173)\quad A_4=-\frac{p(q)}{2}\sum_{\substack{\nu=2\\ \nu\equiv|g|\bmod 2}}^{|g|}H\Big(i\frac{\nu-1}{2}\Big)+\beta(q,g^*)H(0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}f_3(u)H(iu)du\,.$$

Dabei ist $\beta(q, g^*)$ *durch* (49) *erklärt.*

BEWEIS. Aus Hilfssatz 11 und (143) folgt

$$(174)\quad A_4=\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)(-p(q)\log 2)du+\frac{p(q)}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\Big(\frac{1}{2}+\frac{|g|}{2}+u\Big)du$$
$$+\frac{p(q)}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\Big(u-\frac{|g|-1}{2}\Big)du-p(q)\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\Big(\phi\Big(\frac{1}{2}+u\Big)+\phi(1+u)\Big)du$$
$$+p(q)\Big(1-\phi_{11}\Big(|g|,\frac{1}{2}\Big)\Big)\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\frac{1}{2u}du$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)u\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{u^2+t^2}-\frac{1}{1/4+t^2}\Big)\frac{\phi'}{\phi}\Big(|g|,\frac{1}{2}+it\Big)dt\,du\,.$$

Aus Fischer [**11**], Seiten 173, 174, ersieht man, daß das letzte Integral den Wert

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}H(iu)\frac{\phi'}{\phi}\Big(\frac{1}{2}+u\Big)du$$

hat. Man benutze Hilfssatz 5 und verschiebe in den übrigen Integralen von (174) den Integrationsweg nach links, soweit das ohne Überschreiten von Singularitäten möglich ist. Es folgt

$$(175)\quad A_4=\frac{p(q)}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{B-i\infty}^{B+i\infty}H(iu)\phi\Big(u-\frac{|g|-1}{2}\Big)du$$
$$+\frac{p(q)}{2}\Big(1-\phi_{11}\Big(|g|,\frac{1}{2}\Big)\Big)\frac{1}{2\pi i}\int_{1/4-i\infty}^{1/4+i\infty}H(iu)\frac{du}{u}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}f_5(u)H(iu)du\,.$$

Im ersten Integral von (175) verschiebe man den Integrationsweg auf $1/4-i\infty$, $1/4+i\infty$. Es folgt

$$(176)\quad A_4=C^*+C^{**}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}f_5(u)H(iu)du$$

mit

$$(177)\quad C^* = \frac{p(q)}{2}\left[\text{Residuum von } H(iu)\phi\left(u-\frac{|g|-1}{2}\right) \text{ im Intervall } \frac{1}{4}<u<B\right],$$

$$(178)\qquad C^{**} = \frac{p(q)}{2}\left(1-\phi_{11}\left(|g|, \frac{1}{2}\right)\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{1/4-i\infty}^{1/4+i\infty} H(iu)\frac{du}{u}$$

$$+\frac{p(q)}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{1/4-i\infty}^{1/4+i\infty} H(iu)\phi\left(u-\frac{|g|-1}{2}\right)du.$$

Eine leichte Rechnung liefert

$$(179)\qquad C^* = -\frac{p(q)}{2}\sum_{\substack{\nu=2\\ \nu\equiv|g| \bmod 2}}^{|g|} H\left(i\frac{\nu-1}{2}\right).$$

Zur Untersuchung von C^{**} setzen wir noch

$$(180)\qquad \hat{C} = \frac{1}{2\pi i}\int_{1/4-i\infty}^{1/4+i\infty} H(iu)\frac{du}{u}.$$

Es sei $|g|\equiv 0 \bmod 2$. Dann kann man in dem zweiten Integral von (178) den Integrationsweg auf $-i\infty$, $i\infty$ verschieben. Beachtet man (36), (49), so folgt

$$(181)\qquad C^{**} = 2\beta(q, g^*)\hat{C}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} f_6(u)H(iu)du.$$

Jetzt sei $|g|\equiv 1 \bmod 2$. Vermöge (35) gilt dann

$$(182)\qquad C^{**} = \frac{p(q)}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{1/4-i\infty}^{1/4+i\infty}\left(\phi\left(u-\frac{|g|-1}{2}\right)+\frac{1}{u}\right)H(iu)du.$$

Wegen $|g|\equiv 1 \bmod 2$ hat $\phi(u-(|g|-1)/2)$ bei $u=0$ einen Pol erster Ordnung vom Residuum -1. $\phi(u-(|g|-1)/2)+1/u$ ist also bei $u=0$ holomorph. In dem Integral (182) kann man also den Integrationsweg auf $-i\infty$, $i\infty$ verschieben. Beachtet man noch (49), so sieht man, daß (181) auch für $|g|\equiv 1 \bmod 2$ gilt.

Um $\hat{C}$ zu bestimmen, substituieren wir $-u$ statt u und beachten (129). Es folgt

$$(183)\qquad \hat{C} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{-1/4-i\infty}^{-1/4+i\infty} H(iu)\frac{du}{u}.$$

Addition von (180) und (183) liefert

$$(184)\quad 2\hat{C} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{1/4-i\infty}^{1/4+i\infty}-\int_{-1/4-i\infty}^{-1/4+i\infty}\right)H(iu)\frac{du}{u} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}(-1/4,1/4,R)} H(iu)\frac{du}{u} = H(0).$$

Also $\hat{C}=(1/2)H(0)$. Wegen (181) somit

$$(185)\qquad C^{**} = \beta(q, g^*)H(0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} f_6(u)H(iu)du.$$

Aus (176), (179), (185) folgt (173). Hilfssatz 16 ist bewiesen.

HILFSSATZ 17. *Es gilt*

$$(186)\quad A = \mathfrak{Z}(q, g^*, G) + \sum_{\substack{\nu=2 \\ \nu\equiv |g| \bmod 2}}^{|g|} \gamma(q, \nu) H\left(i\frac{\nu-1}{2}\right) + \beta(q, g^*) H(0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} f_0(u) H(iu) du.$$

Dabei ist

$$(187)\quad \gamma(q, \nu) = \frac{qp(q)}{12}(\nu-1) - \frac{p(q)}{2} \qquad (q>1),$$

$$(188)\quad \gamma(1, \nu) = \left\{\begin{array}{ll} \left[\frac{\nu}{12}\right]-1 & (\nu\equiv 2 \bmod 12) \\ \left[\frac{\nu}{12}\right] & (\nu\not\equiv 2 \bmod 12) \end{array}\right\}.$$

BEWEIS. Dieses folgt aus (144), Hilfssatz 13, Hilfssatz 14, Hilfssatz 15, Hilfssatz 16, wobei man für $q=1$ zunächst

$$(189)\quad \begin{aligned} \gamma(1, \nu) &= \frac{1p(1)}{12}(\nu-1) - \frac{p(1)}{2} + \frac{1}{4}(-1)^{\nu/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\nu-1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{12}(\nu-1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(-1)^{\nu/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\nu-1}{3}\right) \end{aligned}$$

bekommt.

Für $q=1$ ist $\nu\equiv|g|\equiv 0 \bmod 2$. Rechnet man nun mit geraden $\nu \bmod 12$, so folgt (188). Hilfssatz 17 ist bewiesen.

HILFSSATZ 18. *Es gilt*

$$(190)\quad T_1(q, |g|, H) = \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{\substack{\nu=2 \\ \nu\equiv |g| \bmod 2}}^{|g|} \eta(q, \nu) H\left(i\frac{\nu-1}{2}\right) & (|g|\geqq 2) \\ 0 & (|g|=1) \\ H\left(\frac{i}{2}\right) & (|g|=0) \end{array}\right\}.$$

BEWEIS. Für $|g|\geqq 2$ folgt die Behauptung aus (86), (88), (89), (91), (93), (94), (133). Für $|g|=1$ aus (78), (133) für $|g|=0$ aus (81), (83), (84). Hilfssatz 18 ist bewiesen.

DEFINITION 8. Es sei

$$(191)\quad \delta(q, \nu) = \eta(q, \nu) - \gamma(q, \nu) \qquad (\nu=2, 3, \cdots),$$

$$(192)\quad \xi(q, g^*) = \left\{\begin{array}{ll} \mu_0(q, 0) - \beta(q, 0) & (g^*=0) \\ \eta(q, 1) & (g^*=1) \end{array}\right\},$$

$$U(q, |g|, H) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{\nu=2 \\ \nu \equiv |g| \bmod 2}}^{|g|} \delta(q, \nu) H\left(i\frac{\nu-1}{2}\right) & (|g| \geqq 2) \\ 0 & (|g| = 1) \\ H\left(\frac{i}{2}\right) & (|g| = 0) \end{cases} . \tag{193}$$

Aus (49), (75), (192) folgt

$$\xi(q, g^*) = \mu_0(q, g^*) - \beta(q, g^*) . \tag{194}$$

Es gilt $\mu_0(q, 0) \in 0 \cup \boldsymbol{N}$. Wegen Hilfssatz 4 ist

$$2\xi(q, 0) \in \boldsymbol{Z} . \tag{195}$$

Weiter folgt aus diesem Hilfssatz, daß $\xi(q, 0)$ nicht für alle q ganz ist, also auch nicht für alle q verschwindet.

HILFSSATZ 19. *Es gilt*

$$T_2(q, 1, H) = 0 \qquad (|g| \equiv 1 \bmod 2) . \tag{196}$$

BEWEIS. Satz 1, insbesondere (78) und (134).

SATZ 2. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(q, |g|, G) = \mathcal{Z}(q, g^*, G) = U(q, |g|, H) + \xi(q, g^*) H(0) + T_2(q, g^*, H) \\ + T_4(q, g^*, H) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} f_0(u) H(iu) du . \end{aligned} \tag{197}$$

BEWEIS. (135), (137), Hilfssatz 17, Hilfssatz 18, Definition 8, (194).

Für den in § 2 behandelten Spezialfall und $g=0$ steht (197) auch bei Venkov [**32**], § 5.1.

HILFSSATZ 20. *Es gilt*

$$\delta(q, 2) = 1 \qquad (\nu = 2) , \tag{198}$$

$$\delta(q, \nu) = 0 \qquad (\nu \geqq 3) . \tag{199}$$

BEWEIS. Nächster Paragraph.

Aus (193) und Hilfssatz 20 folgt

$$U(q, |g|, H) = U(q, g^*, H) = \begin{cases} H\left(\frac{i}{2}\right) & (|g| \equiv 0 \bmod 2) \\ 0 & (|g| \equiv 1 \bmod 2) \end{cases} . \tag{200}$$

§ 4. Die Selbergsche Zetafunktion.

Es sei $s \in \boldsymbol{C}$, $t \in \boldsymbol{R}$. Man setze

$$G(s, t) = \left(2\cosh\frac{t}{2}\right)^{-2s}. \tag{201}$$

Wegen (132) also

$$H(s, r) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(2\cosh\frac{u}{2}\right)^{-2s} e^{iur} du \tag{202}$$

Somit

$$H(s, r) = \int_{-\infty}^{\infty}(e^u+1)^{-2s} e^{(s+ir)u} du\,.$$

Die Substitution $e^u = v$ liefert

$$H(s, r) = \int_0^{\infty}(v+1)^{-2s} v^{s+ir-1} dv\,. \tag{203}$$

Wegen E. M. O. T., [9], Band 1, Seite 9, (2), also

$$H(s, r) = \mathcal{B}(s+ir, s-ir)\,, \tag{204}$$

wobei

$$\mathcal{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{205}$$

die Eulersche Betafunktion bezeichnet.

HILFSSATZ 21. *Es sei $a \in \boldsymbol{C}$ fest und $s \in \boldsymbol{C}$ variabel. Dann ist $\mathcal{B}(s+a, s-a)$ meromorph in der s-Ebene und hat höchstens Pole erster Ordnung. Liegt s in einem Kompaktum, so gilt für $r \in \boldsymbol{R}$*

$$\mathcal{B}(s+ir, s-ir) = O(|r|^{2\mathrm{Re}\, s-1} e^{-\pi|r|}) \qquad (\textit{für } |r| \to \infty)\,. \tag{206}$$

BEWEIS. Es gilt

$$\mathcal{B}(s+a, s-a) = \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s-a)}{\Gamma(2s)}\,. \tag{207}$$

Daher ist $\mathcal{B}(s+a, s-a)$ meromorph in der s-Ebene. Pole können nur bei $s = -a-n$; $s = a-m$ $(n, m = 0, 1, 2, \cdots)$ liegen. Für $2a \notin \boldsymbol{Z}$ ist $-a-n \neq a-m$ $(n, m = 0, 1, 2, \cdots)$. Dann können diese Pole nur von erster Ordnung sein. Jetzt sei $2a \in \boldsymbol{Z}$, also $a = b/2$, $b \in \boldsymbol{Z}$. Dann ist

$$\mathcal{B}(s+a, s-a) = \mathcal{B}\left(s+\frac{|b|}{2}, s-\frac{|b|}{2}\right) = \frac{\Gamma(s+|b|/2)\Gamma(s-|b|/2)}{\Gamma(2s)}\,. \tag{208}$$

Bei $s = -|b|/2, -|b|/2-1, -|b|/2-2, \cdots$ hat dann der Zähler von (208) Pole zweiter Ordnung, und der Nenner von (208) hat Pole erster Ordnung. Also hat

$\mathscr{B}(s+a, s-a)$ Pole erster Ordnung. Die Abschätzung (206) folgt aus Hilfssatz 6 und (205).

HILFSSATZ 22. *Es sei $f(u)$ für alle $u \in \boldsymbol{C}$ meromorph. Auf der Geraden* $\operatorname{Re} u=0$ *sei $f(u)$ holomorph. Für $r \in \boldsymbol{R}$ gelte*

$$f(ir) = O(e^{d|r|}) \qquad (|r| \to \infty) \tag{209}$$

mit

$$d \in \boldsymbol{R}, \qquad d < \pi. \tag{210}$$

Dann wird für $\operatorname{Re} s > 0$ *durch*

$$J(f, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mathscr{B}(s+u, s-u) f(u) du, \tag{211}$$

eine Funktion definiert, welche bezüglich der komplexen Variablen s die folgenden Eigenschaften hat.

a) *$J(f, s)$ ist meromorph auf ganz $\boldsymbol{C}$ fortsetzbar.*

b) *Für* $\operatorname{Re} s \geqq 0$ *ist $J(f, s)$ holomorph.*

c) *Besitzt $f(u)$ nur Pole erster Ordnung, so hat auch $J(f, s)$ nur Pole erster Ordnung in $\boldsymbol{C}$.*

BEWEIS. Wegen (206), (209) ist das Integral in (211) gut konvergent. Für $\operatorname{Re} s > 0$ wird durch (211) eine holomorphe Funktion $J(f, s)$ definiert. Diese ist nun meromorph auf die s-Ebene fortzusetzen.

Es seien $\varepsilon, T \in \boldsymbol{R}$; $0 < \varepsilon < 1/2 < 2 < T$ und $\mathfrak{L}(T, \varepsilon)$ die Kurve mit den Eckpunkten $-i\infty, -i2T, 2\varepsilon - i2T, 2\varepsilon + i2T, i2T, i\infty$; zwei aufeinanderfolgende Punkte sind dabei geradlinig zu verbinden. Laut Voraussetzung ist $f(u)$ auf der Geraden $\operatorname{Re} u = 0$ holomorph. Zu vorgegebenem T kann man ε so klein wählen, daß $f(u)$ in dem Rechteck $2\varepsilon - i2T, 2\varepsilon + i2T, -2\varepsilon + i2T, -2\varepsilon - i2T$ holomorph ist. Für

$$0 < \operatorname{Re} s \leqq \varepsilon, \qquad |\operatorname{Im} s| \leqq T \tag{212}$$

gilt dann

$$J(f, s) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}(T, \varepsilon)} \mathscr{B}(s+u, s-u) f(u) du = -\operatorname*{Res}_{u=s} (\mathscr{B}(s+u, s-u) f(u)) = f(s),$$

also

$$J(f, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}(T, \varepsilon)} \mathscr{B}(s+u, s-u) f(u) du + f(s). \tag{213}$$

Dieses gilt zunächst für (212), doch ist die rechte Seite in

$$|\operatorname{Re} s| \leqq \varepsilon, \qquad |\operatorname{Im} s| \leqq T \tag{214}$$

holomorph. Damit ist $J(f, s)$ holomorph fortgesetzt auf die Vereinigungsmenge der Halbebene $\mathrm{Re}\, s>0$ mit dem Rechteck (214). Da man T beliebig groß vorgeben und dann ε passend wählen kann, ist klar, daß sich $J(f, s)$ über die Gerade $\mathrm{Re}\, s=0$ hinaus holomorph fortsetzen läßt. Damit ist b) bewiesen.

Jetzt sei

$$-\varepsilon \leqq \mathrm{Re}\, s < 0, \qquad |\mathrm{Im}\, s| \leqq T \tag{215}$$

und $J(f, s)$ durch (213) gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} J(f, s)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \mathscr{B}(s+u, s-u)f(u)du &= f(s)+ \operatorname*{Res}_{u=-s}(\mathscr{B}(s+u, s-u)f(u)) \\ &= f(s)+f(-s). \end{aligned}$$

Also

$$J(f, s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \mathscr{B}(s+u, s-u)f(u)du+P_1(f, s). \tag{216}$$

Dabei ist $P_1(f, s)=f(s)+f(-s)$ für alle $s\in \boldsymbol{C}$ meromorph. Besitzt $f(s)$ nur Pole erster Ordnung, so gilt dasselbe für $P_1(f, s)$.

Diese Formel gilt zunächst unter der Voraussetzung (215). Die rechte Seite von (216) ist aber in dem Streifen

$$-1 < \mathrm{Re}\, s < 0 \tag{217}$$

sinnvoll, und das Integral ist dort holomorph. Durch (216) wird also $J(f, s)$ meromorph auf den Streifen (217) fortgesetzt, wobei Pole nur durch $P_1(f, s)$ hineinkommen können. Diese sind von erster Ordnung, sofern f nur Pole erster Ordnung besitzt.

Jetzt sei $n\in \boldsymbol{N}$. Wir machen die folgende Induktionsannahme:

$J(f, s)$ läßt sich meromorph auf die Halbebene $\mathrm{Re}\, s>-n$ fortsetzen; besitzt f nur Pole erster Ordnung, so gilt dasselbe für $J(f, s)$.

In dem Streifen

$$-n < \mathrm{Re}\, s < 1-n \tag{218}$$

gelte eine Darstellung

$$J(f, s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \mathscr{B}(s+u, s-u)f(u)du+P_n(f, s). \tag{219}$$

Dabei sei $P_n(f, s)$ für alle $s\in \boldsymbol{C}$ meromorph; es besitze nur Pole erster Ordnung, sofern dasselbe für f gilt.

Um $J(f, s)$ weiter fortzusetzen, wähle man T wieder beliebig und ε so klein, daß f in dem Rechteck $2\varepsilon-i2T$, $2\varepsilon+i2T$, $-2\varepsilon+i2T$, $-2\varepsilon-i2T$ holomorph ist. Für

$$-n < \mathrm{Re}\, s \leqq \varepsilon-n, \qquad |\mathrm{Im}\, s| \leqq T \tag{220}$$

gilt dann

$$J(f,\ s)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}(T,\varepsilon)}\mathscr{B}(s+u,\ s-u)f(u)du=P_n(f,\ s)-\operatorname*{Res}_{u=s+n}(\mathscr{B}(s+u,\ s-u)f(u))$$

$$=P_n(f,\ s)+(-1)^n\frac{\Gamma(2s+n)}{n\,!\,\Gamma(2s)}f(s+n)$$

wegen (98). Also

$$(221)\quad J(f,s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}(T,\varepsilon)}\mathscr{B}(s+u,s-u)f(u)du+P_n(f,s)+(-1)^n\frac{\Gamma(2s+n)}{n\,!\,\Gamma(2s)}f(s+n).$$

Hierbei ist $\Gamma(2s+n)/\Gamma(2s)=(2s+n-1)\cdots(2s)$ ein Polynom in s. Die Formel (221) gilt zunächst für (220). Die rechte Seite von (221) bleibt aber im Rechteck

$$(222)\qquad -\varepsilon-n\leqq \operatorname{Re}s\leqq\varepsilon-n,\qquad |\operatorname{Im}s|\leqq T$$

sinnvoll. Das in (221) stehende Integral ist in diesem Rechteck holomorph. Durch (221) wird also $J(f,s)$ auf die Vereinigungsmenge der Halbebene $\operatorname{Re}s>-n$ mit dem Rechteck (222) meromorph fortgesetzt. Pole können nur durch $P_n(f,s)$ und $f(s+n)$ hineinkommen. Diese sind von erster Ordnung, sofern f nur Pole erster Ordnung besitzt. Da man T beliebig groß vorgeben und ε passend wählen kann, ist $J(f,s)$ über die Gerade $\operatorname{Re}s=-n$ hinaus meromorph fortsetzbar.

Jetzt sei

$$(223)\qquad -\varepsilon-n\leqq\operatorname{Re}s<-n,\qquad |\operatorname{Im}s|\leqq T.$$

Dann ist

$$J(f,s)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\mathscr{B}(s+u,s-u)f(u)du=P_n(f,s)+(-1)^n\frac{\Gamma(2s+n)}{n\,!\,\Gamma(2s)}f(s+n)$$

$$+\operatorname*{Res}_{u=-s-n}(\mathscr{B}(s+u,s-u)f(u))=P_n(f,s)+(-1)^n\frac{\Gamma(2s+n)}{n\,!\,\Gamma(2s)}(f(s+n)+f(-s-n)).$$

Also

$$(224)\qquad J(f,\ s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\mathscr{B}(s+u,\ s-u)f(u)du+P_{n+1}(f,\ s).$$

Dabei ist

$$P_{n+1}(f,\ s)=P_n(f,\ s)+(-1)^n\frac{\Gamma(2s+n)}{n\,!\,\Gamma(2s)}(f(s+n)+f(-s-n))$$

für $s\in\boldsymbol{C}$ meromorph. Hat f nur Pole erster Ordnung, so auch $P_{n+1}(f,s)$. Die Formel (224) gilt zunächst für (223). Sie bleibt jedoch im Streifen

$$(225)\qquad -n-1<\operatorname{Re}s<-n$$

sinnvoll. Das in (224) auftretende Integral ist in (225) holomorph. Durch (224) wird also $J(f,s)$ meromorph bis $\operatorname{Re}s>-n-1$ fortgesetzt. In dem Streifen (225) kommen Pole nur durch das Glied $P_{n+1}(f, s)$ hinein. Diese sind von erster Ordnung, sofern f nur Pole erster Ordnung besitzt. Damit ist die Induktion vollständig und Hilfssatz 22 bewiesen.

DEFINITION 9. Man setze

$$\zeta(q, |g|, s) = \mathcal{Z}\left(q, |g|, \left(2\cosh\frac{t}{2}\right)^{-2s}\right), \tag{226}$$

$$V_1(q, |g|, s) = U(q, |g|, \mathcal{B}(s+ir, s-ir)), \tag{227}$$

$$V_2(q, g^*, s) = T_2(q, g^*, \mathcal{B}(s+ir, s-ir)), \tag{228}$$

$$V_3(q, g^*, s) = T_4(q, g^*, \mathcal{B}(s+ir, s-ir)), \tag{229}$$

$$V_4(q, |g|, s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} f_0(u)\mathcal{B}(s+u, s-u)du. \tag{230}$$

Die Formel (197) lautet dann

$$\begin{aligned}\zeta(q, |g|, s) &= \zeta(q, g^*, s) \\ &= V_1(q, |g|, s)+\xi(q, g^*)\mathcal{B}(s, s)+V_2(q, g^*, s)+V_3(q, g^*, s)+V_4(q, |g|, s).\end{aligned} \tag{231}$$

HILFSSATZ 23. *Es gilt*

$$V_1(q, |g|, s) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{\nu=2 \\ \nu\equiv|g| \bmod 2}}^{|g|} \delta(q, \nu)\mathcal{B}\left(s+\frac{\nu-1}{2}, s-\frac{\nu-1}{2}\right) & (|g|\geqq 2) \\ 0 & (|g|=1) \\ \mathcal{B}\left(s+\frac{1}{2}, s-\frac{1}{2}\right) & (|g|=0) \end{cases}. \tag{232}$$

Die Funktion $V_1(q, |g|, s)$ *ist für* $s\in \boldsymbol{C}$ *meromorph und besitzt nur Pole erster Ordnung.*

BEWEIS. (232) folgt aus (193) und (204). Der Rest folgt aus Hilfssatz 21 und (232).

HILFSSATZ 24. $V_2(q, g^*, s)$ *ist für* $s\in\boldsymbol{C}$ *meromorph und hat nur Pole erster Ordnung. Es gilt*

$$V_2(q, 1, s) = 0, \tag{233}$$

$$V_2(q, 0, s) = \sum_{\nu=-\rho(q,0)}^{-1} \mu_\nu(q, 0)\mathcal{B}(s+a_\nu(q, 0), s-a_\nu(q, 0)). \tag{234}$$

In der Halbebene $\mathrm{Re}\, s\geqq 0$ *liegen Pole genau bei* $a_\nu(q, 0)$ $(\nu=-\rho(q, 0), \cdots, -1)$. *Es gilt*

$$\operatorname*{Res}_{s=a_\nu(q,0)} V_2(q, 0, s) = \mu_\nu(q, 0). \tag{235}$$

BEWEIS. Die Formeln (233), (234) folgen aus (134), Hilfssatz 19 und (204). Der Rest folgt aus Hilfssatz 21 und (233), (234).

HILFSSATZ 25. *Die Reihe*

$$V_3(q, g^*, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu(q, g^*) \mathscr{B}(s + ir_\nu(q, g^*), s - ir_\nu(q, g^*)) \tag{236}$$

konvergiert absolut-exponentiell und stellt eine in $\boldsymbol{C}$ *meromorphe Funktion dar, welche höchstens Pole erster Ordnung besitzt. Sie ist für* $\operatorname{Re} s > 0$ *holomorph. Auf der Geraden* $\operatorname{Re} s = 0$ *liegen Pole bei* $\pm ir_\nu(q, g^*)$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$. *Es gilt*

$$\operatorname*{Res}_{s=\pm ir_\nu(q, g^*)} V_3(q, g^*, s) = \mu_\nu(q, g^*) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots). \tag{237}$$

BEWEIS. Die Formel (236) folgt aus (136), (204), die Konvergenzaussage aus (69), (206), die Meromorphieaussage aus Hilfssatz 21. Der Rest ist dann klar.

HILFSSATZ 26. $V_4(q, |g|, s)$ *ist meromorph in* $\boldsymbol{C}$ *und hat nur Pole erster Ordnung. In* $\operatorname{Re} s \geqq 0$ *ist die Funktion holomorph.*

BEWEIS. Definition 6, Hilfssatz 22, (230).

HILFSSATZ 27. $\zeta(q, |g|, s) = \zeta(q, g^*, s)$ *ist in* $\boldsymbol{C}$ *meromorph und besitzt nur Pole erster Ordnung.*

BEWEIS. Hilfssatz 21, (231), Hilfssatz 23, Hilfssatz 24, Hilfssatz 25, Hilfssatz 26.

HILFSSATZ 28. *Die in der Halbebene* $\operatorname{Re} s \geqq 0$ *gelegenen Polstellen der Funktion* $V_1(q, |g|, s)$ *und deren Residuen hängen nur von* g^* *ab.*

BEWEIS. In der Formel (231) hängen alle Terme außer $V_1(q, |g|, s)$ und $V_4(q, |g|, s)$ von g^* ab. $V_4(q, |g|, s)$ hat wegen Hilfssatz 26 in der Halbebene $\operatorname{Re} s \geqq 0$ keine Pole. Daraus folgt die Behauptung.

BEWEIS VON HILFSSATZ 20 AUS § 3. Für $|g| \geqq 2$ entnimmt man aus (232)

$$V_1(q, |g|, s) = \sum_{\substack{\nu=2 \\ \nu \equiv |g| \bmod 2}}^{|g|} \delta(q, \nu) \mathscr{B}\left(s + \frac{\nu-1}{2}, s - \frac{\nu-1}{2}\right). \tag{238}$$

In der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ kann dieses Pole haben bei $s = (|g|-1)/2 - m$ $(m = 0, \cdots, [(|g|-2)/2])$.

Aus (98) und (238) folgt

$$\operatorname*{Res}_{s=(|g|-1)/2-m} V_1(q, |g|, s) = \sum_{\substack{\nu=|g|-2m \\ \nu \equiv |g| \bmod 2}}^{|g|} (-1)^{m+(\nu-|g|)/2} \binom{\frac{|g|+\nu}{2} - 2 - m}{|g| - 2 - 2m} \delta(q, \nu). \tag{239}$$

Dabei sind ( ) Binomialkoeffizienten. Wegen (232) hat $V_1(q, 0, s)$ in der

Halbebene $\mathrm{Re}\, s>0$ nur einen Pol erster Ordnung bei $s=1/2$ vom Residuum 1. Weiter ist $V(q, 1, s)$ in $\mathrm{Re}\, s>0$ holomorph. Wegen Hilfssatz 28 also

$$\sum_{\substack{\nu=|g|-2m \\ \nu\equiv|g| \bmod 2}}^{|g|} (-1)^{m+(\nu-|g|)/2} \binom{\frac{|g|+\nu}{2}-2-m}{|g|-2-2m} \delta(q, \nu) = 1 \quad \left(|g|\equiv 0 \bmod 2,\, m=\frac{|g|-2}{2}\right), \tag{240}$$

$$\sum_{\substack{\nu=|g|-2m \\ \nu\equiv|g| \bmod 2}}^{|g|} (-1)^{m+(\nu-|g|)/2} \binom{\frac{|g|+\nu}{2}-2-m}{|g|-2-2m} \delta(q, \nu) = 0 \tag{241}$$
$$\left(m=0, \cdots, \left[\frac{|g|-2}{2}\right];\, m\neq\frac{|g|-2}{2}\right).$$

Aus diesen Relationen folgen sofort die Gleichungen (198), (199). Hilfssatz 20 ist bewiesen. Man siehe auch Fischer [**11**], Seiten 109 bis 111, insbesondere 2.5.4 Theorem.

Also gilt auch (200). Somit

HILFSSATZ 29. *Es ist*

$$V_1(q, |g|, s) = V_1(q, g^*, s) = \begin{cases} \mathscr{B}\left(s+\frac{1}{2}, s-\frac{1}{2}\right) & (|g|\equiv 0 \bmod 2) \\ 0 & (|g|\equiv 1 \bmod 2) \end{cases}. \tag{242}$$

$V_1(q, g^*, s)$ ist meromorph in $\boldsymbol{C}$ *und hat höchstens Pole erster Ordnung. In der Halbebene* $\mathrm{Re}\, s\geqq 0$ *hat $V_1(q, 0, s)$ einen Pole erster Ordnung bei $s=1/2$ vom Residuum* 1. *Die Funktion $V_1(q, 1, s)$ ist in* $\boldsymbol{C}$ *holomorph.*

BEWEIS. Klar.

Wegen (231), (242) gilt auch

$$V_4(q, |g|, s) = V_4(q, g^*, s). \tag{243}$$

SATZ 3. *Die Dirichletreihe*

$$\zeta(q, 0, s) = \sum_{\substack{\{P\}\mathscr{H}(q) \\ |\mathrm{Tr}\, P|>2}} \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2}-N(P)^{-1/2}} \left(2\cosh\frac{1}{2}\log N(P)\right)^{-2s} \tag{244}$$

hat die Konvergenzabszisse 1/2 *und die Abszisse absoluter Konvergenz* 1/2. *Für* $\mathrm{Re}\, s>1/2$ *ist sie holomorph. Durch*

$$\zeta(q, 0, s) = V_1(q, 0, s)+\xi(q, 0)\mathscr{B}(s, s)+V_2(q, 0, s)+V_3(q, 0, s)+V_4(q, 0, s) \tag{245}$$

wird sie meromorph auf die s-Ebene fortgesetzt. Dort hat sie nur Pole erster Ordnung. In der Halbebene $\mathrm{Re}\, s\geqq 0$ *hat sie folgende Pole:*

Bei $s=1/2$ vom Residuum 1,
bei $s=a_\nu(q, 0)$ vom Residuum $\mu_\nu(q, 0)$ $\quad (\nu=-\rho(q, 0), \cdots, -1)$,

bei $s=0$ *vom Residuum* $2\xi(q, 0)$,
bei $s=\pm ir_\nu(q, 0)$ *vom Residuum* $\mu_\nu(q, 0)$ $(\nu=1, 2, 3, \cdots)$.

Die Dirichletreihe

$$\zeta(q, 1, s) = \sum_{\substack{\{P\}\mathfrak{M}(q) \\ |\mathrm{Tr}\, P|>2}} (\operatorname{sign} \mathrm{Tr}\, P) \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2}-N(P)^{-1/2}} \Big(2\cosh\frac{1}{2}\log N(P)\Big)^{-2s} \tag{246}$$

hat die Abszisse absoluter Konvergenz 1/2. *Durch*

$$\zeta(q, 1, s) = \eta(q, 1)\mathfrak{B}(s, s) + V_3(q, 1, s) + V_4(q, 1, s) \tag{247}$$

wird sie meromorph auf die s-Ebene fortgesetzt. Sie hat dort nur Pole erster Ordnung. In der Halbebene $\mathrm{Re}\, s>0$ *ist sie holomorph. Auf der Geraden* $\mathrm{Re}\, s=0$ *liegen Pole bei*

$s=0$ *vom Residuum* $2\eta(q, 1)$,
$s=\pm ir_\nu(q, 1)$ *vom Residuum* $\mu_\nu(q, 1)$ $(\nu=1, 2, 3, \cdots)$.

BEWEIS. Die Formeln (245), (247) folgen aus (192), (231), Hilfssatz 24, Hilfssatz 29. Die Aussagen über die meromorphe Fortsetzbarkeit und die Pole folgen aus den Hilfssätzen 24, 25, 26, 29. Die Formeln (244), (246) erhält man aus (156), (226). Die Abszisse absoluter Konvergenz von $\zeta(q, 1, s)$, die Abszisse absoluter Konvergenz von $\zeta(q, 0, s)$ und die Konvergenzabszisse von $\zeta(q, 0, s)$ stimmen überein. Da $\zeta(q, 0, s)$ bei $s=1/2$ einen Pol hat, muß die Konvergenzabszisse $\geqq 1/2$ sein. Können wir noch zeigen, daß die Reihe (244) für $\mathrm{Re}\, s>1/2$ absolut konvergiert, so ist die Konvergenzabszisse 1/2. $(2\cosh(1/2)\log N(P))$ hat die Größenordnung $N(P)^{1/2}$. Die Reihe (244) konvergiert also genau wie die Reihe

$$\sum_{\substack{\{P\}\mathfrak{M}(q) \\ |\mathrm{Tr}\, P|>2}} \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2}-N(P)^{-1/2}} N(P)^{-s} = \sum_{\substack{\{P\}\mathfrak{M}(q) \\ |\mathrm{Tr}\, P|>2}} \frac{\log N(P_0)}{1-N(P)^{-1}} N(P)^{-s-1/2}.$$

Wegen Fischer [**11**], Seite 55 unten konvergiert das für $\mathrm{Re}\, s>1/2$. Satz 3 ist bewiesen.

§ 5. Der Rang der Schar der Spitzenformen.

SATZ 4. *Es sei* $\eta(q, g)$ *der Rang der Schar der Spitzenformen zur Hauptkongruenzgruppe* $\mathfrak{M}(q)$ *der elliptischen Modulgruppe vom Gewicht* $g\in \boldsymbol{N}$. *Dann gelten folgende Formeln:*

$$\eta(q, 1) = \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{s=0} \zeta(q, 1, s) \quad (q\geqq 3), \tag{248}$$

$$\eta(1, 2) = 0, \tag{249}$$

(250) $$\eta(q, 2)=\frac{qp(q)}{12}-\frac{p(q)}{2}+1 \qquad (q\geqq 2),$$

(251) $$\eta(1, g)=\begin{cases}\left[\frac{g}{12}\right]-1 & (g\equiv 2 \bmod 12)\\ \left[\frac{g}{12}\right] & (g\not\equiv 2 \bmod 12)\end{cases} \qquad (g\equiv 0 \bmod 2),$$

(252) $$\eta(q, g)=\frac{qp(q)}{12}(g-1)-\frac{p(q)}{2} \qquad (q\geqq 2,\ g\geqq 3).$$

BEWEIS. (187), (188), (191), Hilfssatz 20, Satz 3.

Die Formel (248) steht schon bei Hiramatsu [**19**], Seite 579, (13) und [**20**], (6) sowie Hiramatsu, Akiyama [**21**] (*).

Die Formeln (251), (252) stehen für gerade $g\geqq 4$ by Gunning [**21**], Seite 26.

Aus (249), (250) folgt

(253) $$\eta(q, 2)=0 \qquad (q=1, 2, 3, 4, 5)$$

(254) $$\eta(q, 2)\geqq 1 \qquad (q\geqq 6).$$

Literaturverzeichnis

[1] E.W. Barnes, The theory of the G-function, Quart. J. of Pure and Appl. Math., **31** (1900), 264-314.

[2] H. Buchholz, The confluent hypergeometric function, Springer, 1969.

[3] U. Christian, Über die Anzahl der Spitzen Siegel'scher Modulgruppen, Abh. Math. Sem Univ Hamburg, **32** (1968), 55-60.

[4] U. Christian, Über die analytische Fortsetzung gewisser Poincaréscher Reihen zu elliptischen Modulgruppen, Tôhoku Math. J., **40** (1988), 549-590.

[5] U. Christian, Über gewisse Poincaré'sche Reihen zu elliptischen Modulgruppen, Manuscripta Math., **59** (1987), 423-440

[6] P. Deligne and J.P. Serre, Formes modulaires de poids 1, Ann. Sci. École Norm. Sup., 4e série, **7** (1974), 507-530.

[7] I. Efrat, The Selberg trace formula for $PSL_2(\boldsymbol{R})^n$, Mem. Amer. Math Soc., 65, **359** (1987).

[8] I. Efrat, Eisenstein series and Cartan groups, Illinois J. Math., **31** (1987), 428-437.

[9] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi, Higher Transcendental Functions I, II, III, Mc. Graw-Hill.

[10] D. Fay, Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group, J. Reine Angew. Math., **293/294** (1977), 143-203.

[11] J. Fischer, An approach to the Selberg trace formula via the Selberg-zeta-function, Lecture Notes in Math., **1253**, Springer, 1987.

[12] R.C. Gunning, Lectures on modular forms, Princeton Univ. Press, 1962.

[13] D.A Hejhal, The Selberg trace formula for $PSL(2, \boldsymbol{R})$, I, **548**, 1976; II, **1001**, 1983, Lecture Notes in Math., Springer.

[14] D.A. Hejhal, The Selberg trace formula and the Riemann zeta function, Duke Math J., **43** (1976), 441-482.

[15] T. Hiramatsu, Eichler classes attached to automorphic forms of dimension -1, Osaka J. Math., **3** (1966), 39-48.
[16] T. Hiramatsu, On automorphic forms of weight one I, Mathematics seminar notes, **8** (1980), 173-179.
[17] T. Hiramatsu, On automorphic forms of weight one, III. The Selberg eigenspace for discontinuous groups of finite type, preprint.
[18] T. Hiramatsu, On some dimension formula for automorphic forms of weight one, I, Nagoya Math. J., **85** (1982), 213-221; II, Nagoya Math. J., **105** (1987), 169-186.
[19] T. Hiramatsu, Theory of automorphic forms of weight 1, Adv. Stud. Pure Math., **13** (1988), 503-584.
[20] T. Hiramatsu, A formula for the dimension of spaces of cusp forms of weight 1, to appear in Adv. Stud. Pure Math , **15**.
[21] T. Hiramatsu and S. Akiyama, On some dimension formula for automorphic forms of weight one III, Nagoya Math., J., **111** (1988), 157-163.
[22] T. Hiramatsu and Y. Mimura, On automorphic forms of weight one II, Mathematics seminar notes, **9** (1981), 259-267.
[23] H. Ishikawa and Y. Tanigawa, The dimension formula of the space of cusp forms of weight one for $\Gamma_0(p)$, Proc. Japan Acad , **63** (1987), 31-34, und preprint.
[24] M. Koecher, Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades I, Math Z., **59** (1954), 399-416.
[25] N. Nielsen, Die Gammafunktion, Chelsea.
[26] W. Roelcke, Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art, Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss., 1956, pp. 161-267.
[27] W. Roelcke, Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I, Math. Ann., **167** (1966), 292-337, II, Math Ann , **168** (1967), 261-324.
[28] A Selberg, Harmonic analysis, Göttingen, 1954.
[29] A Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc , **20** (1956), 47-87.
[30] J.P. Serre, Modular forms of weight one and Galois representations. Algebraic number fields, A Fröhlich (edit), Academic Press, London, 1977.
[31] A.B. Venkov, Spectral theory of automorphic functions, the Selberg zeta-function, and some problems of analytic number theory and mathematical physics, Russian Math. Surveys, **34** (1979), 79-153.
[32] A.B. Venkov, Spectral theory of automorphic functions, Proc Steklov Inst. Math., **153** (1981), 1-163.
[33] M.-F. Vignéras, Examples de sous-groupes discrete non conjugués de $PSL(2, \boldsymbol{R})$ qui ont même fonction zêta de Selberg, Comptes Rendus, Paris, **287** (1978), 47-49.
[34] M -F Vignéras, L'equation functionielle de la fonction zêta de Selberg du groupe modulaire $PSL(2, \boldsymbol{Z})$, Astérisque, **61** (1979), 235-249
[35] E.T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1927.
[36] S Akiyama, Selberg trace formula for odd weight, to appear in Proc. Japan Acad
[37] U. Christian, Zur Theorie Selbergscher Zetafunktionen, Arch. Math, (to appear).

Ulrich CHRISTIAN

Mathematisches Institut der Universität
Bunsenstraße 3-5
D-3400 Göttingen
Bundesrepublik Deutschland