

## Sur le dual d'un groupe de Lie résoluble exponentiel

Par Hidénori FUJIWARA

(Reçu le 28 oct., 1983)

### § 0. Introduction.

Soit  $G$  un groupe de Lie résoluble exponentiel, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .  $G$  agit dans l'espace dual  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$  par la représentation coadjointe et il est bien connu que le dual  $\hat{G}$ , l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles, de  $G$  est paramétré par l'espace des orbites  $\mathfrak{g}^*/G$  (cf. [1], [12]).

On munit  $\hat{G}$  de la topologie de Fell [7] et  $\mathfrak{g}^*/G$  de la topologie quotient. Depuis que Kirillov [12] a annoncé cette méthode des orbites dans la théorie de représentations unitaires d'un groupe de Lie nilpotent, il est bien conjecturé que l'application de Kirillov  $\rho_G: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$  est un homéomorphisme.

On va y donner dans cette note un résultat partiel: il existe dans  $\mathfrak{g}^*/G$  une partie ouverte partout dense où  $\rho_G$  est un homéomorphisme, et dont l'image par  $\rho_G$  est aussi ouverte dense dans  $\hat{G}$ .

Groupons des résultats connus sur cette conjecture.

1. L'application de Kirillov est continue [12], [14].
2. La conjecture est vérifiée pour le cas nilpotent [4], [11].
3. Pour  $f \in \mathfrak{g}^*$ , posons  $\mathfrak{m}(f) = \mathfrak{g}(f) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  avec  $\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g}; f([X, Y]) = 0 \text{ quel que soit } Y \in \mathfrak{g}\}$ . On considère la suite centrale descendante de  $\mathfrak{m}(f)$ :

$$\mathfrak{m}^0(f) = \mathfrak{m}(f) \supset \mathfrak{m}^1(f) = [\mathfrak{m}(f), \mathfrak{m}(f)] \supset \dots \supset \mathfrak{m}^k(f) = [\mathfrak{m}(f), \mathfrak{m}^{k-1}(f)] \supset \dots$$

La conjecture est alors établie à condition que  $f\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^k(f)\right) = 0$  pour  $f \in \mathfrak{g}^*$  quelconque [3].

4. Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie complètement résoluble de dimension 4 définie sur la base  $(T, X, Y, Z)$  par les crochets  $[T, X] = -X$ ,  $[T, Y] = Y$ ,  $[X, Y] = Z$ . Alors  $G = \exp \mathfrak{g}$  est le plus simple des groupes qui ne satisfont pas à l'hypothèse du résultat précédent. En faisant usage de la continuité des caractères infini-tésimaux [2], Rosenberg a montré la conjecture pour  $G$  et il m'a tenu au courant du fait que cette méthode avait récemment permis à Boidol de trouver le même résultat pour des groupes de dimension inférieure ou égale à 5.

Je tiens à remercier M. Jonathan Rosenberg des conversations instructives sur ce problème.

### § 1. Quelques lemmes.

Dans tout ce qui suit, soit  $G = \exp \mathfrak{g}$  un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  (avec cette notation,  $G$  est sous-entendu connexe et simplement connexe). Toutes les représentations d'un groupe seront supposées implicitement continues et on confondra parfois une représentation unitaire d'un groupe avec sa classe d'équivalence.

Choisissons une fois pour toutes un idéal  $\mathfrak{g}_0$  de codimension 1 contenant  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  et un élément non nul  $l \in \mathfrak{g}^*$  s'annulant sur  $\mathfrak{g}_0$ . On identifie toujours  $\mathfrak{g}_0^*$  avec un sous-espace de  $\mathfrak{g}^*$  de sorte que  $\mathfrak{g}^* = \mathbf{R}l \oplus \mathfrak{g}_0^*$ , au moyen d'une injection fixe de  $\mathfrak{g}_0^*$  dans  $\mathfrak{g}^*$ .

Il s'agit de la représentation coadjointe de  $G$  dans  $\mathfrak{g}^*$  et l'élément  $l \in \mathfrak{g}^*$  est évidemment invariant. Posons, pour  $f \in \mathfrak{g}^*$  arbitrairement fixé,  $L_f = f + \mathbf{R}l$ . Il se produit deux possibilités :

$$\text{ou bien } L_f \cap G \cdot f = \{f\}, \quad \text{ou bien } L_f \cap G \cdot f = L_f.$$

En d'autres termes, la droite  $L_f$  rencontre l'orbite  $G \cdot f$  en un seul point, ou bien y est complètement contenue.

Suivant ces deux possibilités, qui ne dépendent que de l'orbite, une orbite sera dite respectivement non-saturée ou saturée (cf. [10], [13], [15]).

On note  $\rho_G : \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$  l'application de Kirillov pour  $G$ . Remarquons d'abord le :

LEMME 1. *Soit  $f \in \mathfrak{g}^*$  tel que l'orbite  $G \cdot f$  soit non-saturée. On a alors  $\rho_G(G \cdot (f + \alpha l)) = \chi_\alpha \otimes \rho_G(G \cdot f)$ , où  $\chi_\alpha$  est le caractère unitaire de  $G$  défini par, pour  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\chi_\alpha(\exp X) = e^{\sqrt{-1} \alpha l(X)}$  avec  $\alpha \in \mathbf{R}$ .*

LEMME 2. *Soit  $O$  un sous-ensemble ouvert partout dense de  $\hat{G}_0$ . On considère la partie de  $\hat{G}$  constituée par les représentations dont la restriction au sous-groupe  $G_0$  contient faiblement un élément de  $O$ . Elle est alors ouverte et partout dense dans  $\hat{G}$ .*

DÉMONSTRATION. On note  $\mathcal{T}(G)$  l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires de  $G$  de dimension au plus dénombrable muni de la topologie de Fell [8]. Chaque  $\pi \in \mathcal{T}(G)$  est faiblement équivalente à un unique sous-ensemble fermé  $\text{Sp}(\pi)$  de  $\hat{G}$  appelé spectre de  $\pi$ .

Pour  $\pi \in \mathcal{T}(G)$ , on note  $\pi|_{G_0}$  la restriction de  $\pi$  au sous-groupe  $G_0$ . Considérons deux applications continues :

$$p : \hat{G} \ni \sigma \rightarrow \sigma|_{G_0} \in \mathcal{T}(G_0) \quad \text{et} \quad \tilde{p} : \hat{G}_0 \ni \tau \rightarrow \text{ind}_{G_0}^G \tau \in \mathcal{T}(G).$$

Sur définition,  $U(O) = \{\pi \in \mathcal{T}(G_0); \text{Sp}(\pi) \cap O \neq \emptyset\}$  est ouvert dans  $\mathcal{T}(G_0)$ , et la partie énoncée dans le lemme est égale à l'ouvert  $\tilde{p}^1(O) = p^{-1}(U(O))$ .

Supposons maintenant qu'il existe une partie ouverte  $O'$  non vide et disjointe de  $\tilde{p}^1(O)$ . On sait que  $O'' = \tilde{p}^{-1}(U(O'))$  est une partie ouverte non vide de  $\hat{G}_0$  (cf. [10], [15]). Montrons par l'absurde que  $O''$  est disjointe de  $O$ , ce qui est contradictoire.

Supposons donc qu'il existe  $\pi \in \hat{G}_0$  appartenant à  $O \cap O''$ . Puisque  $\pi$  appartient à  $O''$ ,  $\text{Sp}(\text{ind}_{G_0}^{\hat{G}} \pi) \cap O'$  n'est pas vide. Quant à la représentation  $\text{ind}_{G_0}^{\hat{G}} \pi$ , il se produit deux possibilités : elle est irréductible, on la note  $\tilde{\pi}$ , ou bien elle se décompose en l'intégrale hilbertienne des représentations irréductibles  $\pi_t \in \hat{G}$  à un paramètre  $t \in \mathbf{R}$  telles que, pour  $t \in \mathbf{R}$  quelconque,  $\pi_t|_{G_0}$  soit équivalente à  $\pi$  (cf. [10], [15]) :

$$\text{ind}_{G_0}^{\hat{G}} \pi = \int_{\mathbf{R}} \pi_t dt, \quad \pi_t|_{G_0} \simeq \pi.$$

Suivant l'alternative, on observe que  $\text{Sp}(\text{ind}_{G_0}^{\hat{G}} \pi)$  est l'adhérence ou de  $\tilde{\pi}$  ou de l'ensemble  $\{\pi_t; t \in \mathbf{R}\} \subset \hat{G}$  pour la topologie de Fell. D'après ce qui précède, on a  $\tilde{\pi} \in \tilde{p}^1(O) \cap O'$ , car  $\tilde{\pi}|_{G_0}$  contient faiblement  $\pi$ , ou bien  $\{\pi_t; t \in \mathbf{R}\} \subset \tilde{p}^1(O)$  et  $\{\pi_t; t \in \mathbf{R}\} \cap O'$  n'est pas vide. En tout cas, on en a tiré le fait que  $O' \cap \tilde{p}^1(O)$  n'est pas vide, ce qui est absurde. c. q. f. d.

Le lemme suivant reste valable pour un groupe localement compact séparable de type I. La  $C^*$ -algèbre de  $G$  se notera  $C^*(G)$ .

LEMME 3. On considère la partie de  $\hat{G}$  constituée par les représentations  $\pi \in \hat{G}$  telles qu'il existe un élément positif  $x$  de  $C^*(G)$  ayant les deux propriétés suivantes :

- (i)  $\pi(x)$  ne soit pas nul ;
- (ii) la fonction  $\hat{G} \ni \sigma \rightarrow \text{Tr} \sigma(x)$  soit finie et continue en  $\pi$ . C'est alors une

partie ouverte partout dense dans  $\hat{G}$ .

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 4.4.2 dans [5], on voit aussitôt que la partie  $O$  dans l'énoncé est ouverte dans  $\hat{G}$ , car la  $C^*$ -algèbre  $C^*(G)$  est postliminaire.

Supposons qu'il existe une partie ouverte  $O'$  de  $\hat{G}$  non vide et disjointe de  $O$ . Alors  $O'$  s'identifie au spectre d'un idéal bilatère fermé non nul de  $C^*(G)$  (cf. Propositions 3.2.1, 3.2.2, [5]), qui est une  $C^*$ -algèbre postliminaire. Ceci étant, d'après le lemme 4.4.4 dans [5],  $O'$  contient une partie ouverte  $O''$  contenue en même temps dans  $O$ , ce qui est absurde. c. q. f. d.

## § 2. Un théorème.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver un résultat partiel sur notre

problème.

**THÉORÈME.** *Il existe dans  $\hat{G}$  une partie ouverte partout dense où l'application  $\rho_{\hat{G}}^{-1}$  est continue, et dont l'image par  $\rho_{\hat{G}}^{-1}$  est aussi ouverte dense dans  $\mathfrak{g}^*/G$ .*

**DÉMONSTRATION.** La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de  $G$ . Si  $\dim G=1$ , le théorème est trivial. On suppose le théorème démontré pour les groupes de dimension strictement inférieure à celle de  $G$ . En gardant les notations précédentes, on considère le sous-groupe invariant  $G_0=\exp \mathfrak{g}_0$  de codimension 1. Par hypothèse de récurrence, il existe dans  $\hat{G}_0$  une partie ouverte  $O_0$  partout dense sur laquelle  $\rho_{\hat{G}_0}^{-1}$  soit continue et  $\rho_{\hat{G}_0}^{-1}(O_0)$  soit dense dans  $\mathfrak{g}_0^*/G_0$ . En appliquant le lemme 3 à  $\hat{G}_0$ , on obtient la partie  $O_1$  énoncée là de  $\hat{G}_0$  ouverte partout dense. Alors  $O_0 \cap O_1$  est un sous-ensemble partout dense de  $\hat{G}_0$ , auquel s'applique le lemme 2 pour nous donner une partie cherchée  $O$  de  $\hat{G}$  ouverte partout dense.

On constate tout d'abord que le sous-ensemble ouvert  $\rho_{\hat{G}}^{-1}(O)$  est partout dense dans  $\mathfrak{g}^*/G$ . En effet,  $\rho_{\hat{G}}^{-1}(O)$  contient toutes les orbites dont la projection sur  $\mathfrak{g}_0^*$  contient une orbite appartenant à  $\rho_{\hat{G}_0}^{-1}(O_0 \cap O_1)$  (cf. [10], [15]) qui est ouvert dense dans  $\mathfrak{g}_0^*/G_0$ , d'où le résultat.

Puisque la topologie de Fell pour  $\hat{G}$  admet une base dénombrable, donnons-nous maintenant une suite  $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$  dans  $O$  convergeant vers un élément  $\pi$  de  $O$ . Soit  $\Omega_n = \rho_{\hat{G}}^{-1}(\pi_n)$  (resp.  $\Omega = \rho_{\hat{G}}^{-1}(\pi)$ ) l'orbite dans  $\mathfrak{g}^*$  correspondante à  $\pi_n$  (resp.  $\pi$ ) pour chaque  $n$ . Il s'agit de trouver dans  $\mathfrak{g}^*$  une suite  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  vérifiant  $f_n \in \Omega_n$  pour tout  $n$  et convergeant vers un élément  $f$  de  $\Omega$ .

Désignons par  $q: \mathfrak{g}^* = \mathbf{R}l \oplus \mathfrak{g}_0^* \rightarrow \mathfrak{g}_0^*$  la projection naturelle. Vu la continuité de l'application de restriction  $p: \hat{G} \rightarrow \mathcal{T}(G_0)$ , l'hypothèse de récurrence nous assure qu'il existe dans  $\mathfrak{g}_0^*$  une suite  $\{f_n^0\}_{n=1}^{\infty}$  vérifiant  $f_n^0 \in q(\Omega_n)$  quel que soit  $n$  et tendant vers un élément  $f^0$  de  $q(\Omega)$  (cf. [10], [15]). En extrayant au besoin une sous-suite, on peut se placer dans le cas où toutes les orbites  $\Omega_n$  sont de la même espèce.

Pourvu qu'elles soient toutes saturées, il ne reste rien à montrer. Supposons désormais que toutes les orbites  $\Omega_n$  soient non-saturées. Quand on regarde  $f_n^0$  et  $f^0$  comme des éléments de  $\mathfrak{g}^*$ , l'application de Kirillov  $\rho_G$  étant continue, on se donne des représentations  $\pi_n^0 = \rho_G(f_n^0) \in \hat{G}$  tendant vers  $\pi^0 = \rho_G(f^0) \in \hat{G}$ . D'après le lemme 1, en posant  $L_{f_n^0} \cap \Omega_n = \{f_n^0 + \beta_n l\}$  avec  $\beta_n \in \mathbf{R}$ , on voit d'ailleurs que  $\pi_n \simeq \chi_{\beta_n} \otimes \pi_n^0$  pour tout  $n$ .

En résumé, il existe dans  $O$  deux suites convergentes :

$$\pi_n \rightarrow \pi = \rho_G(\Omega) \quad \text{et} \quad \pi_n^0 \simeq \chi_{-\beta_n} \otimes \pi_n \rightarrow \pi^0 = \rho_G(G \cdot f^0), \quad (1)$$

où  $f^0$  appartient à  $q(\Omega)$ .

Si  $\Omega$  est saturée,  $\Omega = G \cdot f^0$  et  $\pi = \pi^0$ . Si  $\Omega$  est non-saturée, en posant  $L_{f^0} \cap \Omega = \{f^0 + \beta_0 l\}$  avec  $\beta_0 \in \mathbf{R}$ , on observe que  $\pi^0 \simeq \chi_{-\beta_0} \otimes \pi$ . Compte tenu de

$\pi_n^0 \simeq \chi_{-\beta_n} \otimes \pi_n \rightarrow \pi^0 \simeq \chi_{-\beta_0} \otimes \pi$ , on voit également que  $\chi_{\beta_0 - \beta_n} \otimes \pi_n \rightarrow \pi$  (cf. [9]). En tout cas, on récrit les données (1) comme suit :

$$\pi_n \rightarrow \pi \quad \text{et} \quad \chi_{\alpha_n} \otimes \pi_n \rightarrow \pi, \tag{2}$$

où on a noté  $\alpha_n$  au lieu de  $-\beta_n$  ou  $\beta_0 - \beta_n$  conformément aux deux possibilités.

S'il en est ainsi, on se propose de montrer que la suite  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  reste bornée, ce qui achèvera la démonstration à condition que  $\Omega$  soit saturée. On suppose pour cela, extrayant au besoin encore une sous-suite, que  $\alpha_n$  tende vers l'infini.

On notera  $\mathcal{H}_n$  (resp.  $\mathcal{H}$ ) l'espace de Hilbert où opère la représentation  $\pi_n$  (resp.  $\pi$ ). Pour  $\xi_0$  un élément arbitraire, qui sera précisé plus tard, non nul de  $\mathcal{H}$ , il existe, d'après (2), un élément  $\xi_n$  (resp.  $\eta_n$ ) dans  $\mathcal{H}_n$  tel que la fonction de type positif définie par  $(\pi_n, \xi_n)$  (resp.  $(\chi_{\alpha_n} \otimes \pi_n, \eta_n)$ ) tende vers celle définie par  $(\pi, \xi_0)$  uniformément sur des compacts de  $G$ . Comme les vecteurs indéfiniment différentiables pour  $\pi_n$  sont partout dense dans  $\mathcal{H}_n$ , on peut imposer à  $\eta_n$  d'être indéfiniment différentiable pour  $\pi_n$ .

Par conséquent, étant donné un nombre positif  $\varepsilon$  et une fonction  $\psi$  indéfiniment différentiable à support compact sur  $G$ , il existe un entier  $n_0$  tel que

$$|\chi_{\alpha_m}(g)(\pi_m(g)\eta_m | \eta_m) - \chi_{\alpha_{n_0}}(g)(\pi_{n_0}(g)\eta_{n_0} | \eta_{n_0})| < \varepsilon$$

quels que soient  $m \geq n_0$  et  $g$  appartenant au support de  $\psi$ . Il s'ensuit que, une mesure de Haar à gauche sur  $G$  se notant  $dg$ ,

$$|(\pi_m(\psi)\eta_m | \eta_m) - \int_G \psi(g)\chi_{\alpha_{n_0} - \alpha_m}(g)(\pi_{n_0}(g)\eta_{n_0} | \eta_{n_0})dg| < \varepsilon \int_G |\psi(g)| dg$$

pour  $m \geq n_0$ . Lorsque  $m \rightarrow \infty$ , compte tenu de notre hypothèse  $\alpha_m \rightarrow \infty$ , il est évident que

$$\int_G \psi(g)\chi_{\alpha_{n_0} - \alpha_m}(g)(\pi_{n_0}(g)\eta_{n_0} | \eta_{n_0})dg \rightarrow 0.$$

On voit ainsi que  $(\pi_m(\psi)\eta_m | \eta_m) \rightarrow 0$ , d'où  $(\pi_m(x)\eta_m | \eta_m) \rightarrow 0$  pour tout  $x \in C^*(G)$ . Cela revient au même de dire que  $\|\pi_m(x)\eta_m\| \rightarrow 0$  pour  $x \in C^*(G)$  quelconque.

D'autre part, la fonction  $\|\pi_m(g)\xi_m - \xi_m\|^2 = 2\{\|\xi_m\|^2 - \text{Re}(\pi_m(g)\xi_m | \xi_m)\}$  tend vers  $2\{\|\xi_0\|^2 - \text{Re}(\pi(g)\xi_0 | \xi_0)\}$  uniformément sur tout compact de  $G$ . Il en résulte que, pour  $\varepsilon > 0$  arbitraire, on peut trouver un petit voisinage symétrique  $U_\varepsilon$  de l'élément neutre de  $G$  de sorte qu'on ait

$$\|\pi_m(g)\xi_m - \xi_m\| < \varepsilon$$

pour tout  $g \in U_\varepsilon$  et tout  $m$  assez grand.

Soit  $T$  un élément non nul de  $\mathfrak{g}$  supplémentaire au idéal  $\mathfrak{g}_0$  de sorte qu'on a  $\mathfrak{g} = \mathbf{RT} \oplus \mathfrak{g}_0$ . Chaque élément  $g$  de  $G$  s'écrit alors de manière unique sous la

forme  $g = g(t)g_0$  avec  $g(t) = \text{ext}tT$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) et  $g_0 \in G_0$ . On considère une fonction  $\phi$  continue à support compact sur  $G$  de la forme  $\phi(g) = \phi_\varepsilon(t)\phi_0(g_0)$  pour  $g = g(t)g_0$ , où  $\phi_\varepsilon$  (resp.  $\phi_0$ ) est une fonction continue à support compact sur  $\mathbf{R}$  (resp.  $G_0$ ). On impose de plus à  $\phi_\varepsilon$  de jouir des propriétés :

$$\text{i) } \phi_\varepsilon \geq 0; \quad \text{ii) } \int_{\mathbf{R}} \phi_\varepsilon(t) dt = 1; \quad \text{iii) } \text{supp} \phi_\varepsilon \subset \{t \in \mathbf{R}; g(t) \in U_\varepsilon\}.$$

Posons maintenant, pour chaque  $n$ ,  $\pi'_n = p(\pi_n) = \pi_n|G_0 \in \hat{G}_0$  et  $\pi' = p(\pi) = \pi|G_0 \in \mathcal{T}(G_0)$ . D'après ce qui précède, on voit, pour  $m$  assez grand, que

$$\left\| \int_{\mathbf{R}} \phi_\varepsilon(t) \pi_m(g(-t)) \xi_m dt - \xi_m \right\| < \varepsilon$$

et donc que

$$|(\pi_m(\phi)\eta_m|\xi_m) - (\pi'_m(\phi_0)\eta_m|\xi_m)| < \varepsilon \|\phi_0\|_{C^*(G_0)} \cdot \|\eta_m\|.$$

Puisqu'on a déjà vu que  $\|\pi_m(\phi)\eta_m\| \rightarrow 0$ , et que  $\|\eta_m\|$  restent bornées, il en est de même de  $(\pi'_m(\phi_0)\eta_m|\xi_m)$ :  $(\pi'_m(\phi_0)\eta_m|\xi_m) \rightarrow 0$ . Vu l'arbitraire de  $\phi_0$ , on vérifie également que

$$(\pi'_m(x)\eta_m|\xi_m) \rightarrow 0 \tag{3}$$

quel que soit  $x \in C^*(G_0)$ .

Lorsque  $\Omega$  est non-saturée,  $\pi' \in \hat{G}_0$  appartient à  $O_1$  et,  $C^*(G_0)$  étant post-liminaire, il existe un élément positif  $x_0$  de  $C^*(G_0)$  tel que  $\sigma(x_0)$  soit un projecteur de rang 1 pour tous les  $\sigma \in \hat{G}_0$  d'un voisinage de  $\pi'$  (cf. Lemme 4.4.2, [5]). Si tel est le cas, prenons dans l'image de  $\pi'(x_0)$  l'élément  $\xi_0$ , supposé de norme 1, utilisé dans ce qui précède.

Lorsque  $\Omega$  est saturée, la désintégration de  $\pi'$  en représentations irréductibles s'effectue comme

$$\pi' = \int_{\mathbf{R}} \pi(t) dt, \quad \pi(t) \in \hat{G}_0 \quad (\text{cf. [10], [15]}).$$

Il existe donc un  $t_0 \in \mathbf{R}$  tel que  $\pi(t_0) \in O_1 \subset \hat{G}_0$ , et on peut trouver un élément positif  $x_0$  de  $C^*(G_0)$  de même manière qu'avant. Soit  $\xi'_0$  un élément de norme 1 contenu dans l'image du projecteur  $\pi(t_0)(x_0)$  de rang 1. La forme positive sur  $C^*(G_0)$  définie par  $(\pi(t_0), \xi'_0)$  est limite faible de formes positives associées à  $\pi'$  (cf. [7]). On peut donc prendre cette fois l'élément  $\xi_0 \in \mathcal{H}$  introduit ci-dessus de telle sorte que, étant donné  $\varepsilon > 0$  arbitrairement,

$$|(\pi'(x_0)\xi_0|\xi_0) - (\pi(t_0)(x_0)\xi'_0|\xi'_0)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire  $|(\pi'(x_0)\xi_0|\xi_0) - 1| < \varepsilon$ .

D'après notre choix de  $\xi_0 \in \mathcal{H}$ , que l'orbite  $\Omega$  soit saturée ou non, la valeur  $\gamma = (\pi'(x_0)\xi_0|\xi_0)$  vérifie

$$|\gamma - 1| < \varepsilon. \tag{4}$$

Or  $\chi_\alpha|_{G_0} \equiv 1$  pour tout  $\alpha \in \mathbf{R}$  et  $x_0 \in C^*(G_0)$ , d'où

$$(\pi'_m(x_0)\xi_m|\xi_m) \rightarrow \gamma \quad \text{et} \quad (\pi'_m(x_0)\eta_m|\eta_m) \rightarrow \gamma. \tag{5}$$

Lorsque  $m$  est suffisamment grand, choisissons un élément  $\zeta_m \in \mathcal{H}_m$  de norme 1 tel que  $\pi'_m(x_0)$  soit le projecteur sur  $C\zeta_m$ . D'après (5),

$$|(\xi_m|\zeta_m)|^2 \rightarrow \gamma \quad \text{et} \quad |(\eta_m|\zeta_m)|^2 \rightarrow \gamma. \tag{6}$$

D'autre part, d'après (3),

$$(\eta_m|\zeta_m)(\zeta_m|\xi_m) \rightarrow 0. \tag{7}$$

En groupant les résultats (4), (6) et (7), on y trouve une contradiction cherchée.

Il nous reste donc à envisager le cas où  $\Omega$  est non-saturée, ce qui sera supposé dorénavant. En tenant compte de ce qu'on vient de voir et en supposant la suite  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  convergente, on désigne  $\alpha_0$  sa limite finie. Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que  $\alpha_0$  n'est autre que 0.

Reprenant les notations précédentes,

$$\begin{aligned} (\pi_m(g)\xi_m|\xi_m) &\rightarrow (\pi(g)\xi_0|\xi_0), \\ (\pi_m(g)\eta_m|\eta_m) &\rightarrow \chi_{-\alpha_0}(g)(\pi(g)\xi_0|\xi_0) \end{aligned}$$

pour  $g \in G$ . Comme dans le paragraphe 1 de [6], quelle que soit  $\phi \in L^1(G)$ ,

$$\begin{aligned} (\pi'_m(x_0^*)\pi_m(\phi)\pi'_m(x_0)\xi_m|\xi_m) &\rightarrow (\pi'(x_0^*)\pi(\phi)\pi'(x_0)\xi_0|\xi_0), \\ (\pi'_m(x_0^*)\pi_m(\phi)\pi'_m(x_0)\eta_m|\eta_m) &\rightarrow (\pi'(x_0^*)(\chi_{-\alpha_0} \otimes \pi)(\phi)\pi'(x_0)\xi_0|\xi_0). \end{aligned}$$

Cela revient à dire que, car  $\pi'(x_0)$  est le projecteur sur  $C\xi_0$ ,

$$\begin{aligned} |(\xi_m|\zeta_m)|^2(\pi_m(\phi)\zeta_m|\zeta_m) &\rightarrow (\pi(\phi)\xi_0|\xi_0), \\ |(\eta_m|\zeta_m)|^2(\pi_m(\phi)\zeta_m|\zeta_m) &\rightarrow ((\chi_{-\alpha_0} \otimes \pi)(\phi)\xi_0|\xi_0). \end{aligned}$$

Compte tenu de (6), on a nécessairement

$$(\pi(\phi)\xi_0|\xi_0) = ((\chi_{-\alpha_0} \otimes \pi)(\phi)\xi_0|\xi_0)$$

pour toute  $\phi \in L^1(G)$ . Enfin, en utilisant  $\phi$  de la forme  $\phi(g) = \phi_1(t)\phi_2(g_0)$  pour  $g = g(t)g_0 \in G$ , on en déduit que

$$\int_{\mathbf{R}} (e^{\mathcal{N}^{-1}\alpha_0 t} - 1)\phi(t)(\pi(g(t))\xi_0|\eta) dt = 0$$

quels que soient  $\phi \in L^1(\mathbf{R})$  et  $\eta \in \mathcal{H}$ . D'où visiblement  $\alpha_0 = 0$ . c. q. f. d.

**Bibliographie**

- [ 1 ] P. Bernat, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **82** (1965), 37-99.
- [ 2 ] P. Bernat et J. Dixmier, Sur le dual d'un groupe de Lie, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **250** (1960), 1778-1779.
- [ 3 ] J. Boidol, \*-regularity of exponential Lie groups, *Invent. Math.*, **56** (1980), 231-238.
- [ 4 ] I. Brown, Dual topology of a nilpotent Lie group, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **6** (1973), 407-411.
- [ 5 ] J. Dixmier, *Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [ 6 ] J. Dixmier, Bicontinuité dans la méthode du petit groupe de Mackey, *Bull. Soc. Math. France*, **97** (1973), 233-240.
- [ 7 ] J. M. G. Fell, The dual space of  $C^*$ -algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **94** (1960), 365-403.
- [ 8 ] J. M. G. Fell, Weak containment and induced representations of groups, *Canad. J. Math.*, **14** (1962), 237-268.
- [ 9 ] J. M. G. Fell, Weak containment and Kronecker products of group representations, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 503-510.
- [10] G. Grélaud, Désintégration de représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **277** (1973), 327-330.
- [11] K. Joy, A description of the topology on the dual space of a nilpotent Lie group, Thèse, Univ. of Colorado, Boulder, 1977.
- [12] A. A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, *Uspehi Mat. Nauk*, **17** (1962), 57-110.
- [13] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.
- [14] L. Pukanszky, On unitary representations of exponential groups, *J. Func. Anal.*, **2** (1968), 73-113.
- [15] S. R. Quint, Decomposition of induced representations of solvable exponential Lie groups, Thèse, Univ. of California, Berkeley, 1973.
- [16] J. Rosenberg, The dual topology of a crossed product and applications to group representations, *Proc. Symp. Pure Math.*, **38** (1982), 361-363.

Hidénori FUJIWARA

Département de Mathématiques

Université de Kyushu

Hakozaki, Fukuoka 812

Japon